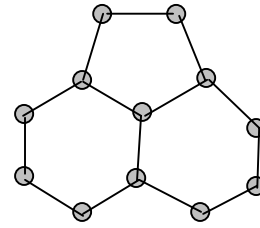


SOLUTION – 019.

Si on joint chaque trou d'une balle de golf officielle à ses trous voisins, on obtient une triangulation de la sphère. Or pour des raisons d'esthétique, chaque trou a exactement **5** ou **6** voisins.

Démontrer qu'il y a exactement 12 trous ayant 5 voisins.



La triangulation obtenue en joignant les trous a S sommets, F faces triangulaires et A arêtes, S , F , A étant liés par la relation d' Euler : $S + F = A + 2$.

On a F faces triangulaires donc $\frac{3F}{2}$ arêtes car chacune est comptée 2 fois.

Ainsi $A = \frac{3F}{2}$ ce qui entraîne $S + F = \frac{3F}{2}$ d'où $S = \frac{F}{2} + 2$.

Désignons par S_5 le nombre respectif de sommets d'ordre 5 et par S_6 le nombre respectif de sommets d'ordre 6.

Cela fait au total $5 S_5 + 6 S_6$ arêtes, mais chacune est comptée 2 fois, donc

$$5 S_5 + 6 S_6 = 2 A = 3 F \quad (1)$$

par ailleurs $S_5 + S_6 = S = \frac{F}{2} + 2$ donc $5 S_5 + 5 S_6 = \frac{5F}{2} + 10 \quad (2)$

En soustrayant membre à membre (1) et (2) on a $S_6 = \frac{F}{2} - 10$ et donc

$$S_5 = S - S_6 = \frac{F}{2} + 2 - \frac{F}{2} + 10 = \mathbf{12}$$
 ce qu'il fallait démontrer..