SOLUTION – 032.

Démontrer que si $A=\left(x\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ et $B=\left(x\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2$ sont rationnels, alors ***A.B* = 14**.

On a $A = 3x^2+2\sqrt{6}\,x+2$ et $B = 5x^2+2\sqrt{35}\,x+7$

Donc $5A-3B = (10\sqrt{6}-6\sqrt{35})x-11$ est aussi rationnel, et on peut écrire $x(5\sqrt{6}-3\sqrt{35})=q$ où q est un nombre rationnel.

On tire $x=\dfrac{q}{5\sqrt{6}-3\sqrt{35}}=-\dfrac{q}{165}(5\sqrt{6}+3\sqrt{35})=q'(5\sqrt{6}+3\sqrt{35})$ où q' est un nombre rationnel

Cela donne $x^2 = q'^2(30\sqrt{210}+465)$ d'où

$A = 3x^2+2\sqrt{6}\,x+2 = 3q'^2(30\sqrt{210}+465)+2\sqrt{6}\,q'(5\sqrt{6}+3\sqrt{35})+2$

$A = q'^2(90\sqrt{210}+1395)+q'(60+6\sqrt{210})+2 = (90q'^2+6q')\sqrt{210}+1395q'^2+60q'+2$

A étant rationnel, on en déduit que $90q'^2+6q'=0$ soit $q'=0$ ou $q'=-1/15$.

Si $q'=0$ alors, $x=0$ $A=2$ $B=7$ et ***A.B* =14**.

Si $q'=-1/15$ alors $x=-\dfrac{1}{15}(5\sqrt{6}+3\sqrt{35})$ d'où l'on tire $A=\dfrac{21}{5}$ et $B=\dfrac{10}{3}$ avec encore ***A.B* =14**.