

SOLUTION – 50.

$$\begin{array}{rcl} \text{On a} & 0 & = 0^3 + 0^3 + 0^3. \\ & 1 & = 0^3 + 0^3 + 1^3. \\ & 2 & = 0^3 + 1^3 + 1^3. \\ & 3 & = 1^3 + 1^3 + 1^3. \\ & 4 & = \\ & 5 & = \\ & 6 & = 2^3 - 1^3 - 1^3. \\ & 7 & = 2^3 - 1^3 + 0^3. \\ & 8 & = 2^3 + 0^3 + 0^3. \\ & 9 & = 2^3 + 1^3 + 0^3. \\ & 10 & = 2^3 + 1^3 + 1^3. \\ & 11 & = 3^3 - 2^3 - 2^3. \\ & 12 & = 7^3 + 10^3 - 11^3. \end{array}$$

Peut-on écrire 4 et 5 comme sommes de 3 cubes d'entiers relatifs ?

Quand on calcule les cubes modulo 9, on ne trouve que 3 possibilités : 0 ; 1 ; 8.

Donc quand on ajoute trois cubes on ne peut obtenir (modulo 9) que 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 8.

Un entier n de la forme $9k + 4$ ou $9k + 5$ ne peut donc pas s'écrire comme somme de trois cubes d'entiers relatifs.