

SOLUTION – 52.

Calculer les entiers p et q sachant que :

La partie entière de $\frac{p^2}{q}$ vaut **702** et que la partie entière de $\frac{q^2}{p}$ vaut **45**.

Par hypothèse on a : $702 q \leq p^2 < 703 q$ (1)

$$45 p \leq q^2 < 46 p \quad (2)$$

on en déduit $\frac{q^2}{46} < p < \sqrt{703q}$ (3)

et $\sqrt{702q} \leq p \leq \frac{q^2}{45}$ (4)

puis de (3) et (4) $q^2 < 46 \sqrt{703q} \Rightarrow q^4 < 46^2 \times 703q \Rightarrow q^3 < 46^2 \times 703$ (5)

$$45 \sqrt{702q} \leq q^2 \Rightarrow 45^2 \times 702q \leq q^4 \Rightarrow 45^2 \times 702 \leq q^3 \quad (6)$$

puis de (5) et (6) $112,4 \leq q \leq 114,2$ donc **$q = 113$ ou $q = 114$**

Mais si $q = 113$ alors (3) et (4) impliquent $\sqrt{702q} \leq p < \sqrt{703q} \Rightarrow 281,6 < p < 281,9$

C'est impossible.

Donc **$q = 114$** (3) et (4) impliquent alors $282,8 < p < 283,1$ donc **$p = 283$** .

On vérifie : $\frac{p^2}{q} = 702,535\dots$ $\frac{q^2}{p} = 45,922\dots$