SOLUTION – 54.

Démontrer que **44444444444444444448888888888888888888889** est un carré parfait.

Le nombre N ci-dessus est composé de vingt “ 4 ” suivis de dix-neuf “ 8 ” et d’un 9.
On utilise la propriété : $10^n - 1 = 9999\ldots\ldots99$ (*n fois le chiffre 9*) qui entraîne :

$$A = \frac{10^n - 1}{9} = 1111\ldots11 \quad (n \text{ fois le chiffre } 1)$$

Donc $N = 4\times\frac{10^{20}-1}{9}\times10^{20} + 8\frac{10^{19}-1}{9}\times10 + 9 = \frac{4\times10^{40} - 4\times10^{20} + 8\times10^{20} - 80 + 81}{9}$

$$N = \frac{4\times10^{40} + 4\times10^{20} + 1}{9} = \left(\frac{2\times10^{20}+1}{3}\right)^2 = \left(\frac{20(10^{19}-1)+21}{3}\right)^2 = \left(\frac{60(10^{19}-1)+63}{9}\right)^2$$

$$N = \left(6\times\frac{10^{19}-1}{9}\times10 + 7\right)^2 = (66666.....667)^2$$ où 6 est présent 19 fois.

On généralise facilement :

49	=	7^2
4489	=	67^2
444889	=	667^2
44448889	=	6667^2 etc.

Robert Ferachoglou a trouvé une démonstration plus courte :

On a $10^n = 9A + 1$ donc :
$N = 4 \times 10^n A + 8A + 1 = 4(9A + 1)A + 8A + 1 = 36A^2 + 12A + 1 = (6A + 1)^2$.