SOLUTION – 006.

10 patates pèsent ensemble **500** grammes. Démontrer qu'en utilisant tout ou partie des patates mais sans les couper, il est possible de faire deux tas non vides, dont les poids sont égaux à **1** gramme près.

- S'il y a au moins deux patates pesant 1g ou moins, c'est terminé, elles forment les deux tas voulus.
- Sinon, c'est qu'il y a 9 patates pesant plus de 1g.

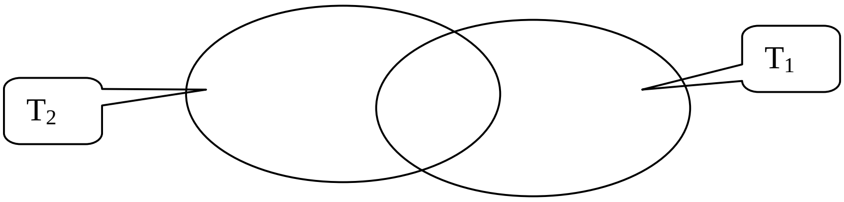
Avec ces 9 patates on peut faire $2^9 - 1 = 511$ tas non vides distincts.

Notons $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_{511}$ les masses de ces tas, p_{511} étant inférieur à 500 par hypothèse.

La somme $p_{511} - p_1 = (p_{511} - p_{510}) + (p_{510} - p_{509}) + (p_{509} - p_{508}) + \ldots (p_2 - p_1)$ est à fortiori inférieur à 500. Or cette somme comprend 510 termes, donc l'un d'eux est nécessairement inférieur à 1.

Soit par exemple $p_{i+1} - p_i < 1$.

Soient T_{i+1} le tas de masse p_{i+1}, T_i le tas de masse p_i et T_1, T_2 ces tas privés de leur intersection éventuelle :



On ne peut pas avoir T_1 et T_2 vides car $T_{i+1} \neq T_i$.

On ne peut même pas avoir un tas vide, disons T_1 car alors T_2 serait non vide et contiendrait donc au moins une patate de plus de 1g. Mais alors la différence de masse entre T_1 et T_2 (la même qu'entre T_{i+1} et T_i) serait supérieure à 1g alors qu'elle vaut $p_{i+1} - p_i < 1$.

Donc ni T_1 ni T_2 n'est vide, et ces deux tas conviennent.