SOLUTION – 60.

Démontrer qu'un triangle de côtés a, b, c est rectangle si et seulement si :

$$(a^4 + b^4 + c^4)^2 = 2(a^8 + b^8 + c^8)$$

On a les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \\
&[(b^2 + c^2)^2 - a^4][a^4 - (b^2 - c^2)^2] = \\
&-(b^4 - c^4)^2 - a^8 + a^4[(b^2 + c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] = \\
&-a^8 - b^8 - c^8 + 2(a^4 b^4 + a^4 c^4 + b^4 c^4) = \\
&(a^4 + b^4 + c^4)^2 - 2(a^8 + b^8 + c^8)
\end{aligned}$$

Or, le triangle est rectangle si et seulement si
$(-a^2 + b^2 + c^2) = 0$ ou $(a^2 - b^2 + c^2) = 0$ ou $(a^2 + b^2 - c^2) = 0$.

Comme $(a^2 + b^2 + c^2) > 0$, le triangle est rectangle si et seulement si :

$(a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ donc si et seulement si :

$(a^4 + b^4 + c^4)^2 - 2(a^8 + b^8 + c^8) = 0$ C Q F D.