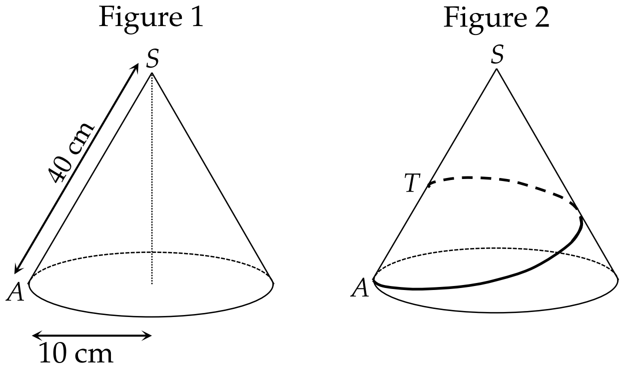
RETOUR SUR LE RALLYE 2014

8. <u>LA PROMENADE DE LA FOURMI</u>

Dans un bac à sable est posé sur sa base un jouet de forme conique. Les dimensions sont données sur la figure 1 ci-dessous.



Une fourmi part de *A* et gravit le cône en suivant toujours la même pente. On dit que la fourmi a fait « un tour » lorsqu'elle se retrouve sur le segment [*AS*] (figure 2).
Après un tour, la fourmi se retrouve en *T* et la distance est *AT* = 10 cm

Quelle est la distance parcourue, sur le cône, par la fourmi au bout de 5 tours ?

* * * * * * * * * * * * * * *

Cet exercice, posé au Rallye Mathématique de Bourgogne en 2014, était destiné aux élèves de Premières et Terminales.
69 % des équipes ont abordé ce problème, 5 % seulement ont donné la "bonne réponse" 152 cm environ.

- Voici la solution parue dans le compte rendu :

On travaille sur le patron du cône (Figure 1 ci-dessous) :

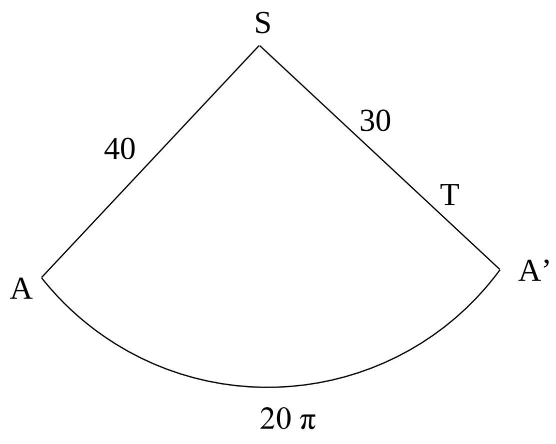


Figure 1

L'arc AA' (périmètre du cercle de base) mesure $20\,\pi$ soit le quart du cercle de centre S et de rayon 40.
Le patron du cône est donc un quart de disque.

<u>Si on suppose que le trajet AT de la fourmi sur le patron est un segment de droite</u> alors celui-ci mesure 50 (Figure 2 dans laquelle on peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AST).

À l'issue de ce trajet, la fourmi est en T ou en T' puisque SA et SA' sont confondus dur le cône.

Le second tour est semblable au premier, mais avec un cône 25% plus petit. Etc.

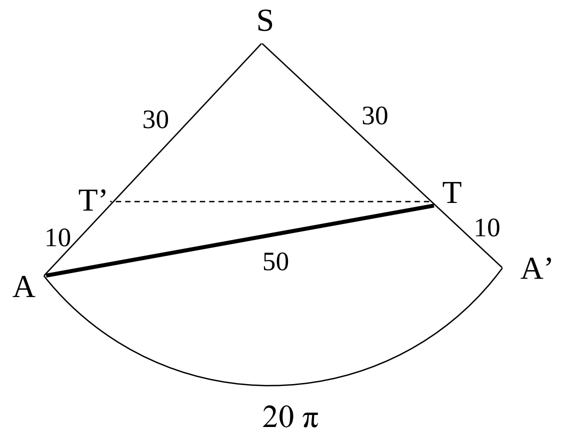


Figure 2

Donc au bout de 5 tours, la fourmi aura parcouru $50 \times (1 + 0{,}75 + 0{,}75^2 + 0{,}75^3 + 0{,}75^4) = 152{,}54$ ...

- Mais est-on sûr que le trajet AT de la fourmi sur le patron est un segment de droite ?

Pour cela, plutôt que de dire dans l'énoncé que la fourmi "gravit le cône en suivant toujours la même pente" il aurait fallu dire que le tour complet du cône effectué par la fourmi de A à T, ainsi que les tours suivants, le sont de la manière la plus courte possible*.
* (ou la plus rapide possible car il est sous-entendu que la vitesse de la fourmi est constante).

Dans ce cas, les trajets sur le cône ou sur son patron sont des géodésiques et la réponse est bien 152,54.

- Une question se pose alors : si la fourmi gravit le cône en suivant toujours la même pente quelle est la vraie bonne réponse ?

Il faut d'abord bien préciser ce qu'on entend par en suivant toujours la même pente.

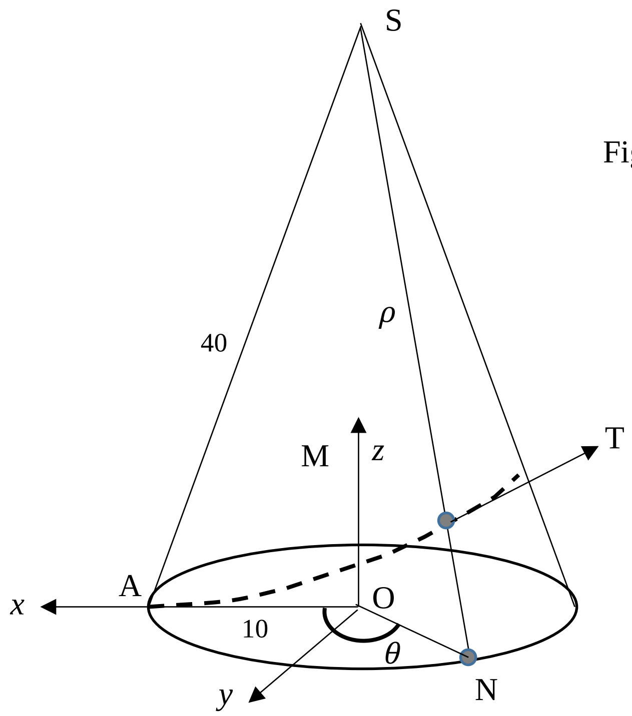


Figure 3

Sur la figure 3 ci-dessus, le trajet de la fourmi est en tirets gras. La pente sera constante si la tangente $\overrightarrow{MT}$ à la trajectoire fait un angle constant avec le plan de base (supposé horizontal).

Dans ces conditions, reprenons tout.

Il faut commencer par paramétrer la trajectoire. Prenons comme paramètre l'angle $\theta = (\mathrm{OA}, \mathrm{ON})$.
Dans le repère de la figure 3, on a N $(10\cos\theta, 10\sin\theta, 0)$ S (0, 0, h) où $h = 10\sqrt{15}$ et M (x, y, z).

Si on pose SM = $\rho\ (\theta)$ alors $\overrightarrow{\mathrm{SM}} = \frac{\rho}{40}\overrightarrow{\mathrm{SN}}$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-h \end{pmatrix} = \frac{\rho}{40}\begin{pmatrix} 10\ cos\theta \\ 10\ sin\theta \\ -h \end{pmatrix}$

On tire $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \rho\ \cos\theta \\ \rho\ \sin\theta \\ h(4-\frac{\rho}{10}) \end{pmatrix}$

Si on note pour simplifier ρ' la dérivée de ρ par rapport à θ, un vecteur tangent en M à la trajectoire est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MT}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \rho'\ \cos\theta - \rho\sin\theta \\ \rho'\ \sin\theta + \rho\cos\theta \\ -\frac{h}{10}\rho' \end{pmatrix}$

La projection de $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ sur le plan horizontal est : $\overrightarrow{\mathrm{MU}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \rho'\ \cos\theta - \rho\sin\theta \\ \rho'\ \sin\theta + \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

On a

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{MU}}\right\|^2 = \frac{1}{16}\left(\rho'^2 + \rho^2\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{MT}}\right\|^2 = \frac{1}{16}\left(\rho'^2 + \rho^2 + \frac{h^2}{100}\rho'^2\right)$$

La pente sera constante si et seulement si $\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{MT}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{MU}}\|}$ est constant, donc si et seulement si $\frac{\rho'}{\rho}$ est constant.
On a donc par un calcul classique : $\rho\ (\theta) = C\ e^{k\ \theta}$ C et k étant des constantes.
Si on reporte à la figure 3, on lit : $\rho\ (0) = 40$ donc $C = 40$ et $\rho\ (\theta) = 40\ e^{k\ \theta}$
Après le premier tour, $\rho\ (2\pi) = 30$ soit $40\ e^{2\pi k} = 30$ d'où on tire $k = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

Après 5 tours, la distance parcourue par la fourmi est :

$$D = \int_0^{10\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\theta$$

Or $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{16}\left(\rho'^2 + \rho^2 + \frac{h^2}{100}\rho'^2\right) = \frac{1}{16}40^2 e^{2k\theta}\left(1 + k^2(1+\frac{h^2}{100})\right)$
Donc

$$D = 10\sqrt{1 + k^2(1+\frac{h^2}{100})}\int_0^{10\pi} e^{k\theta}\, d\theta$$

$$D = \frac{10}{k}\sqrt{1 + 16\ k^2}\ \left(e^{10k\pi} - 1\right) = 169{,}35$$

On trouve plus que dans le corrigé, ce qui est normal puisque les tronçons de trajectoire sur le patron ne sont plus des segments.

D'ailleurs avec $k = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ on a $\rho\ (\theta) = 40\ e^{k\ \theta} = 40\ \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\theta}{2\pi}}$
Sur le patron, l'angle paramètre α pour le premier tour ne varie que de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (en fait on a $\alpha = \frac{\theta}{4}$)

Par conséquent la trajectoire du premier tour de la fourmi sur le patron a pour équation $\rho\ (\alpha) = 40\ \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}$ et a l'allure de la figure 4 ci-dessous :

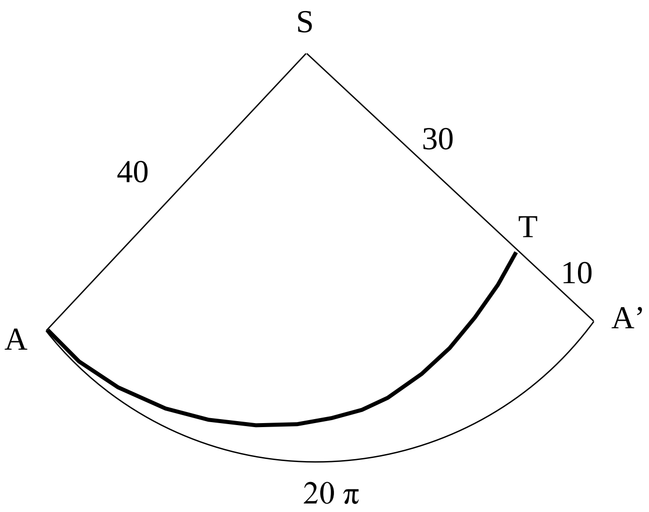


Figure 4

- Enfin, on peut se demander ce qui se passe si en partant de la figure 2 (avec une trajectoire rectiligne de A à T sur le patron), on reforme le cône.

On obtient alors la figure 5 ci-dessous dans laquelle la pente n’est pas constante. Elle décroit en passant par 0 après un peu plus d’un demi-tour.

Ça ne prend que 10 minutes pour faire une maquette en papier.
Ce que nous (organisateurs du Rallye) aurions dû faire.

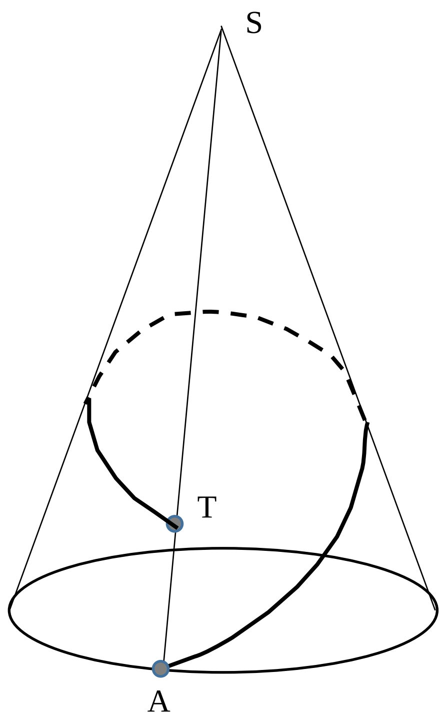


Figure 5