RALLYE MATHEMATIQUE

DE BOURGOGNE

29 ème RALLYE
2011

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://math.u-bourgogne.fr/IREM/

Le Rallye mathématique s'inscrit pleinement dans la politique régionale en faveur de la diffusion de la culture scientifique et technique, qui tend à encourager et faciliter le rapprochement entre le monde de la recherche et celui de l'éducation, et à donner aux jeunes Bourguignons le « goût » des sciences et des métiers scientifiques.

Le Rallye mathématique des lycées a par ailleurs le mérite de prouver aux participants, que rigueur scientifique rime avec réflexion méthodique et travail d'équipe. Les mathématiques peuvent aussi être un exercice ludique, un sport cérébral « musclant » la logique.

Au-delà des exigences scolaires et au sérieux que l'on peut attendre d'une telle épreuve, les candidat(e)s ont su exploiter au mieux leur imagination pour résoudre, ensemble, les problèmes soumis à leur perspicacité.

Félicitations aux équipes inscrites et à celles qui ont trouvé les bonnes réponses ! »

François PATRIAT,
Sénateur,
Président du conseil régional de Bourgogne

L'édition 2011 du Rallye mathématique des lycées de Bourgogne a rencontré cette année encore un franc succès : 202 équipes, soit 638 participants de 34 lycées des 4 départements bourguignons ont participé à ce défi collectif organisé par l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de l'Université de Bourgogne. Avec le concours des enseignants des différents lycées de notre région et le soutien du Conseil Régional de Bourgogne et du Rectorat de l'Académie de Dijon, ce rallye est l'occasion de faire découvrir le plaisir de la résolution de problèmes mathématiques sous un angle nouveau.

Le but des épreuves de ce rallye est en effet de faire découvrir les joies de la réussite d'épreuves sous une forme attractive et ludique. De fait, cette discipline peut alors être considérée par les lycéens, futurs étudiants, comme divertissante mais aussi comme l'une des clés essentielle au développement de toutes les sciences.

Je félicite ici l'ensemble des acteurs et partenaires, aux côtés de l'IREM de l'Université de Bourgogne, pour leur enthousiasme et leur investissement dans ce rallye qui est chaque année une réussite et l'une des clés de la dynamique de coopération entre les lycées bourguignons et notre université.

Sophie BÉJEAN,
Présidente de l'Université de Bourgogne

Le rallye mathématique des lycées de Bourgogne, sous sa forme actuelle, est entré dans sa 22e année d'existence. C'est l'âge de maturité pour un grand cru, les amateurs éclairés le savent bien. C'est aussi normalement un âge de raison, cette raison que transgressent régulièrement les auteurs des sujets de ce rallye, avec leurs habituels clins d'œil et facéties. Ces *déraisonnables* mathématiques nous sont désormais aussi familières que les personnages récurrents qui les peuplent, comme le prénommé Gaston, présent cette année dans trois des problèmes proposés. Elles sont aussi très attendues, la participation importante à cette compétition en témoigne : plus de 600 lycéens se sont mesurés cette année encore à l'épreuve, sur la base du volontariat. Les auteurs nous ont aussi habitués à ciseler les énoncés, la présence du millésime 2011 dans quatre d'entre eux est l'une des marques de cet artisanat sur mesure. Qu'on ne s'y trompe pas, derrière l'apparente futilité transparaissent de véritables mathématiques, un banal problème d'espadrilles requiert une bonne modélisation probabiliste, l'assemblage de pneus sur une voiture porte en germe une problématique de recherche opérationnelle. La légèreté intentionnelle des énoncés n'est que la marque d'un style, une griffe d'auteur de leurs concepteurs ; Paul Valéry l'a bien reconnu :

« *Un homme sérieux a peu d'idées. Un homme à idées n'est jamais sérieux.* »

Organisateur de ce rallye, l'IREM doit être remercié, en la personne de sa Directrice, sans oublier le secrétariat, qui assure de longue date une logistique sans faille. Les relais dans les lycées, qu'ils soient personnels de direction, de vie scolaire ou professeurs, méritent également toute gratitude pour porter à travers ce rallye la flamme mathématique aux quatre coins de l'académie. Sans doute les 638 chercheurs en herbe de ce rallye ont-ils pris du plaisir à chercher les neuf problèmes de mathématiques. Tout autorise à parier qu'ils deviennent des citoyens aux têtes bien faites, et rien n'interdit de rêver qu'il en émerge un jour une médaille Fields !

Robert FERACHOGLOU
Chargé de mission en mathématiques

Le mercredi 26 janvier 2011 après-midi a eu lieu la 29ième édition du Rallye Mathématique de Bourgogne. Ce sont plus de 600 lycéens des quatre départements de Bourgogne qui, par équipe, se sont escrimés sur les neuf énigmes proposées.

L'objectif du Rallye est d'une part de faire faire des mathématiques aux lycéens de façon inhabituelle, de leur proposer des problèmes plus ludiques que ceux faits en classe et moins balisés par les notions du programme et d'autre part de valoriser le travail en équipe en donnant aux élèves l'occasion, assez rare dans le cursus scolaire, de faire l'expérience d'une activité de recherche à plusieurs, qui est souvent beaucoup plus efficace que seul, même si cette recherche en groupe à des contraintes : il faut savoir argumenter pour convaincre les autres, ne pas accepter leurs suggestions sans une vérification soigneuse et finalement savoir s'entendre sur une solution commune.

Je remercie vivement Françoise Besse, Robert Ferachoglou, Michel Lafond et Florian Plastre qui organisent chaque année le Rallye dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de l'Université de Bourgogne.

Je tiens également à remercier tous les professeurs qui inscrivent leurs élèves et assurent le déroulement du Rallye dans leur lycée ainsi que les chefs d'établissement qui autorisent la mise en place de l'épreuve.

Et enfin que soient remerciés le Conseil Régional de Bourgogne et l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public qui participent financièrement à l'achat d'une partie des lots attribués aux équipes lauréates.

Catherine LABRUÈRE CHAZAL,

Directrice de l'IREM

1. LES ÉNONCÉS

1. JEU D'OMBRES

Un pylône vertical très haut est installé sur une place, quelque part en Afrique.
Un certain jour, le soleil est au zénith à midi, et l'ombre du pylône est nulle.
À 13 heures, l'ombre mesure 9,333 m.
Combien, en cm, mesure-t-elle à 14 heures ? (Arrondir au centimètre.)

2. PUPUCE

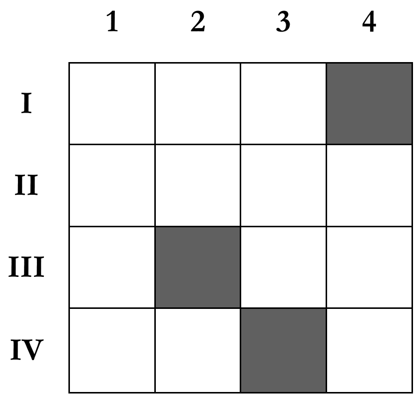
Une puce est au départ au point de coordonnée (0, 0) du plan. Elle n'effectue que des sauts de longueur 5 unités, en ligne droite, dans n'importe quelle direction. De plus elle ne peut atteindre que des points dont les deux coordonnées sont des nombres entiers. Elle veut aller au point de coordonnée (2011, 0). Combien de sauts au minimum lui faudra t-il ?

3. NOMBRES CROISÉS

Tous les nombres de cette grille à compléter, même ceux à un seul chiffre, font l'objet d'une définition. Aucun nombre ne commence par 0, et on ne doit placer qu'un seul chiffre par case.

Horizontalement
I Carré parfait.
II Carré parfait.
III Carré parfait. – Carré parfait.
IV Carré parfait. – Carré parfait.

Verticalement
1. Carré parfait.
2. Carré parfait. – Carré parfait.
3. Carré parfait.
4. Carré parfait.



4. BIDOUILLAGE À LA GOMME

Pour sa voiture, Gaston dispose de sept pneus neufs. Chaque pneu peut être employé indifféremment à l'avant comme à l'arrière et, dans chaque cas, l'usure est proportionnelle au kilométrage parcouru.
Utilisé à l'avant, un pneu dure 40000 km, utilisé à l'arrière, il dure 60000 km.
Combien Gaston peut-il parcourir de kilomètres au maximum ?

5. LE PRÉNOM MYSTÉRIEUX

Il s'agit de trouver le prénom usuel d'un célèbre mathématicien qui ne vivait pas en France.

Ce prénom comporte huit lettres.
On a indiqué à droite des onze mots ci-contre, le <u>nombre de lettres bien placées</u> qui coïncident avec celles du prénom.

Quel est ce prénom ?

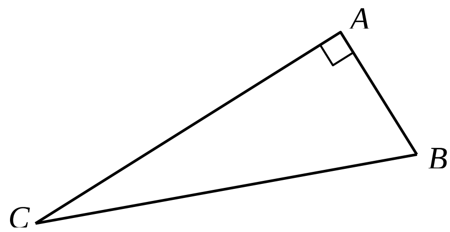
DEFROQUE	2	TABLEAUX	1
PRESENTS	2	NOISETTE	1
APPLAUDI	2	GRIMOIRE	1
MAINTENU	2	CHOCOLAT	1
		FRANCHIR	1
		POSITION	1
		REFERMER	1

6. ESPADRILLES

Gaston ne met que des espadrilles bleues, il en a plusieurs paires en vrac dans un tiroir.
Chaque paire comprend, bien entendu, un pied droit et un pied gauche, et certaines de ces espadrilles sont trouées.
Lorsqu'il prend une espadrille au hasard, il a une chance sur deux d'obtenir une espadrille trouée, mais seulement une chance sur quatre d'obtenir un pied gauche sans trou.
Lorsqu'il prend deux espadrilles au hasard, il a deux chances sur quinze d'obtenir un pied droit et un pied gauche tous deux sans trous.
Combien Gaston a-t-il d'espadrilles dans son tiroir ?

7. TROIS PETITS TOURS …

Le triangle *ABC* rectangle en *A* est constitué de trois tiges rectilignes en fil de fer.
Lorsqu'on le fait tourner autour de la tige [*AB*], on engendre un cône de volume 4960 cm^3.
Lorsqu'on le fait tourner autour de la tige [*AC*], on engendre un cône de volume 2200 cm^3.
Quel est en cm^3 le volume du solide engendré lorsqu'on le fait tourner autour de la tige [*BC*] ?
(Arrondir au centimètre cube.)

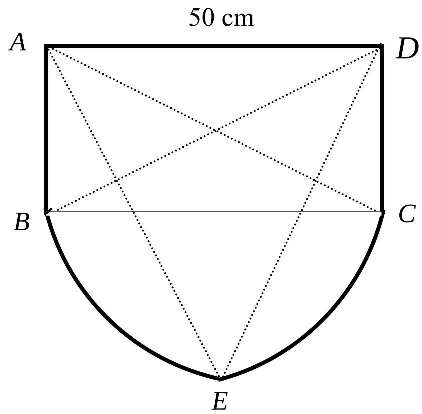


8. LE FANION

Gaston a dessiné le fanion de son équipe. Il est limité par les segments [*BA*], [*AD*], [*DC*] et les arcs de cercle *BE* et *CE*.

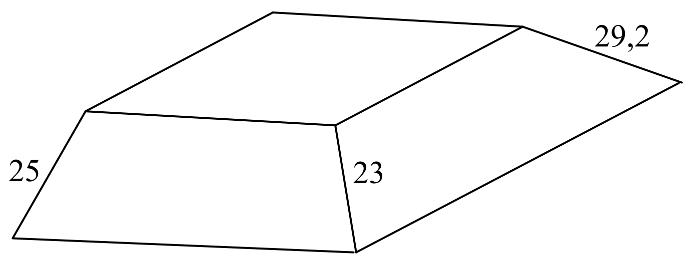
Le quadrilatère *ABCD* est un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Cette longueur est égale à 50 cm.
L'arc *BE* a pour centre *D*, et l'arc *CE* a pour centre *A*.

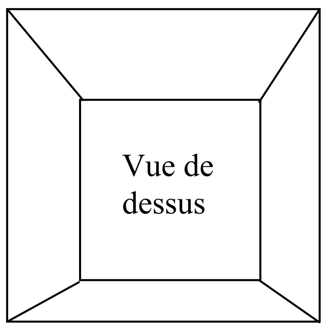
Quelle est, en cm^2, l'aire du fanion ? (Arrondir au cm^2.)



9. ÉGYPTOLOGIE

On comprend pourquoi la pyramide qu'on vient de découvrir en Égypte est restée inachevée !
Bien que les côtés du carré supérieur soient bien parallèles aux côtés de la base, une erreur de calcul de l'architecte Septedeudis a fait que les quatre obliques ont des longueurs différentes.
Les trois obliques visibles mesurent respectivement 25 m, 23 m et 29,2 m. comme indiqué sur la figure.
Quelle est la longueur de l'arête oblique invisible ?





Exercice	Solution
1 JEU D'OMBRES.	**À 14 h l'ombre mesure environ 2011 cm.**
2 PUPUCE.	**Il faut au minimum 403 sauts.**
3 NOMBRES CROISÉS.	**Les 6 carrés horizontaux sont : 729, 7569, 4, 16, 49, 1**
4 BIDOUILLAGE A LA GOMME.	**Gaston pourra parcourir 84 000 km..**
5 LE PRÉNOM MYSTÉRIEUX.	**Le prénom est PAFNOUTI** (Le nom est Tchebychev)
6 ESPADRILLES.	**Gaston a 16 espadrilles dans son tiroir.**
7 TROIS PETITS TOURS.	**Le volume demandé est environ 2011 cm^3.**
8 LE FANION.	**L'aire du fanion est environ 2011 cm^2.**
9 ÉGYPTOLOGIE.	**La longueur de l'arête invisible est 30,8 m.**

2. LA PARTICIPATION.

Le **29**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 26 janvier 2011.
Il a concerné :

34 lycées **202 équipes** **638 participants**.

Voici l'évolution de la participation ces dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**total des participants**
2005	292	163	186	173	**814**
2006	270	143	177	142	**732**
2007	239	61	96	65	**461**
2008	266	139	255	108	**768**
2009	371	74	181	97	**723**
2010	303	82	226	101	**712**
2011	281	122	145	90	**638**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.

	Lycée	Équipes				Participants			
		2nde	1ère	Tale	**Total**	2nde	1ère	Tale	**Total**
Côte d'Or 11 lycées	Prieur de la Côte d'Or - AUXONNE	0	0	1	**1**	0	0	2	**2**
	Clos Maire - BEAUNE	2	0	1	**3**	6	0	4	**10**
	Marey - BEAUNE	2	3	0	**5**	7	9	0	**16**
	Stephen Liégeard - BROCHON	2	3	1	**6**	8	12	3	**23**
	Eiffel - DIJON	5	3	5	**13**	16	9	14	**39**
	Charles de Gaulle - DIJON	8	7	4	**19**	23	23	15	**61**
	Hippolyte Fontaine - DIJON	3	2	6	**11**	8	6	20	**34**
	Le Castel - DIJON	5	2	5	**12**	18	7	18	**43**
	Marcs d'Or - DIJON	3	1	0	**4**	12	1	0	**13**
	St Joseph - DIJON	4	0	1	**5**	14	0	4	**18**
	Anna Judic - SEMUR EN AUXOIS	3	1	3	**7**	7	4	11	**22**
Nièvre 7 lycées	Romain Rolland - CLAMECY	2	3	1	**6**	5	8	4	**17**
	Pierre-Gilles de Gennes - COSNE SUR LOIRE	2	0	0	**2**	5	0	0	**5**
	Maurice Genevoix - DECIZE	2	0	1	**3**	5	0	2	**7**
	Alain Colas - NEVERS	8	1	3	**12**	25	4	7	**36**
	Raoul Follereau - NEVERS	3	1	0	**4**	12	1	0	**13**
	Jules Renard - NEVERS	5	2	2	**9**	16	6	6	**28**
	Saint Cyr - NEVERS	2	2	1	**5**	6	5	5	**16**
Saône et Loire 10 lycées	Emiland Gauthey - CHALON SUR SAÔNE	0	0	2	**2**	0	0	5	**5**
	Mathias - CHALON SUR SAÔNE	2	1	0	**3**	6	4	0	**10**
	Niepce - CHALON SUR SAÔNE	1	1	0	**2**	4	5	0	**9**
	Julien Wittmer - CHAROLLES	0	1	0	**1**	0	3	0	**3**
	La Prat's - CLUNY	4	4	0	**8**	16	15	0	**31**
	Camille Claudel - DIGOIN	0	2	0	**2**	0	4	0	**4**
	Léon Blum - LE CREUSOT	4	1	0	**5**	15	4	0	**19**
	Lamartine - MÂCON	6	6	4	**16**	22	17	14	**53**
	Henri Parriat - MONTCEAU LES MINES	0	1	0	**1**	0	3	0	**3**
	Gabriel Voisin - TOURNUS	2	1	1	**4**	4	1	3	**8**
Yonne 6 lycées	Jacques Amyot - AUXERRE	0	3	1	**4**	0	9	2	**11**
	Fourier - AUXERRE	2	1	0	**3**	5	3	0	**8**
	Louis Davier - JOIGNY	0	3	0	**3**	0	12	0	**12**
	Chevalier d'Eon - TONNERRE	2	2	2	**6**	5	5	5	**15**
	Catherine et Raymond Janot - SENS	4	3	2	**9**	11	9	6	**26**
	Pierre Larousse - TOUCY	3	2	1	**6**	10	6	2	**18**
34 lycées	**TOTAL**	91	63	48	**202**	291	195	152	**638**

3. L'ORGANISATION.

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.
Le financement est assuré par le Conseil Régional de Bourgogne, le Rectorat de l'Académie de Dijon, l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), Texas Instruments et l'IREM lui-même.
L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Robert FERACHOGLOU, Michel LAFOND et Florian PLASTRE. Trois professeurs supplémentaires ont participé au choix définitif des sujets : Gérard BOUILLOT, Maurice NUSSBAUM, Daniel REISZ.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame le Recteur de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM.
Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.
Françoise BESSE, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.
Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.
Et bien évidemment les 638 participants de Bourgogne ainsi que les 64 élèves d'un lycée de Slovaquie qui ont, en même temps que nous, travaillé sur nos énoncés traduits en anglais par Frédéric METIN professeur au Lycée Eiffel.

5. LA RÉUSSITE.

Exercice	Nombre d'équipes	Pourcentage d'équipes ayant abordé le problème	Pourcentage d'équipes ayant donné la bonne réponse
1 JEU D'OMBRES.	91	90 %	11 %
2 PUPUCE.	91	90 %	27 %
3 NOMBRES CROISÉS.	91	80 %	43 %
4 BIDOUILLAGE A LA GOMME.	202	86 %	6 %
5 LE PRÉNOM MYSTÉRIEUX.	202	66 %	38 %
6 ESPADRILLES.	202	67 %	14 %
7 TROIS PETITS TOURS.	111	66 %	9 %
8 LE FANION.	111	72 %	6 %
9 ÉGYPTOLOGIE.	111	34 %	3 %

Sur les 202 équipes :

1 a trouvé les 6 bonnes réponses ; [Elle est citée juste après].
1 a trouvé 5 bonnes réponses sur 6 ;
7 ont trouvé 4 bonnes réponses sur 6 ;
16 ont trouvé 3 bonnes réponses sur 6 ;
31 ont trouvé 2 bonnes réponses sur 6 ;
63 ont trouvé une seule bonne réponse.

Les meilleures équipes de chaque niveau sont :

En seconde

L'équipe : [FORTIN Rémi – CHOQUET Toscane – BANARD Laure]
de Seconde 17 du lycée Janot de Sens avec 45 points sur 60.

En première

L'équipe : [BALLIGAND Rémi – BALZER Louis – DELABAYS Achille]
de Première S du lycée Julien Wittner de Charolles avec 36 points sur 60.

En terminale

L'équipe : [DURANTE Samuel -- SITARZ Wojciech -- JAUROU Lucas -- GIROUD Paul]
de Terminale S 10 du lycée Charles de Gaulle avec 60 points sur 60.

Cette équipe était déjà arrivée en tête des Premières en 2010.

Nous déclarons meilleure équipe du rallye 2011

DURANTE Samuel -- SITARZ Wojciech -- JAUROU Lucas -- GIROUD Paul

5. LE PALMARÈS.

Élèves récompensés

Seconde

1	FORTIN R., CHOQUET T., BANARD L.	2^{nde} 17	Janot – Sens
2	LALANDE C., CHARVOT B., SARRA R.	2^{nde} 19	Janot – Sens
3	MERITET J., JACQUET A., MAGNON E.	2^{nde}	A. Colas - Nevers
4	ALNACHIF H., GOUZEAU G., RIEUF I., BOUILLOT T.	2^{nde} I	A. Colas - Nevers
5	MAGNIEN N., HAMMEL M., TRABET T.	2^{nde} 5-8	L. Blum - Le Creusot
6	BERTON O., MAUCOLOT A., DUPONT L., GOUEFFAN J.	2^{nde} 3-4	P. Larousse - Toucy
7	CHAMOIRE A., GLOKER B., HUYYEBAERT O.	2^{nde} G-C	A. Colas - Nevers
8	MAGNIN A., MULLER A., BIZET M.	2^{nde} C	A. Colas - Nevers
9	DAGUIN A., POURRADIER M., MIRET O.	2^{nde} E-B	A. Colas - Nevers
10	VONG N., THEURIET J., DECLE J., MARQUES A.	2^{nde} D	St Joseph - Dijon
11	PINET E., BOULLAND M., MILCENT A., JOUDELAT F.	2^{nde} 1-3	E. Jacob - Tonnerre
12	BAIN A., CAMPO F.	2^{nde} 6	G. Sand - Cosne s/Loire
13	DUMEL A., MASSE A., STIOT M.	2^{nde} 6	G. Sand - Cosne s/Loire
14	VALENTE L., VERGNES A., CASTIGLIONE L.	2^{nde} 6-16	Janot – Sens
15	LAMBERT C., GARCIA C., LINDEPERG L.	2^{nde} 2	H. Fontaine - Dijon
16	GARNIER E., PLASTRE L., RANCE C.	2^{nde} 1	A. Judic - Semur en Auxois
17	DEMATTEIS P., MARILLIER A., COLOMB G., BOUCHE G.	2^{nde}	R. Rolland - Clamecy
18	AUGUSTE C., REINNEIS J., LOPEZ C., BRIZON C.	2^{nde} H	F. Follereau - Nevers
19	GUERIN B., TORRES B., GUILLOTON V.	2^{nde} 3-4	J. Renard – Nevers
20	HAMEURY B.	2^{nde} 2	R. Rolland - Clamecy
21	MARTINS A., TCHANG-TCHONG L., PRACCA B., MARET L.	2^{nde} 4-13	Lamartine - Macon
22	ABLIN M., DUTSERAEN G., PUZENAT L.	2^{nde} 1-2	M. Genevoix - Decize

Première

1	BALLIGAND R., BALZER L., DELABAYS A.	1eS	J. Wittener - Charolles
2	Équipe AUBERT Xavier... (5 élèves)	1eS 2-1	N. Niepce - Chalon
3	COUDERT P., GASPARD L., BLOT S.	1eS	St Cyr - Nevers
4	JUSSIAU W., BOISSEAU P., PAUTRAT R., JALLET H.	1e 5 S	S. Liegeard - Brochon
5	MADINIER E., PERDEREAU J., PUJOL N., LEVANDAIS H.	1eS 10	Ch. de Gaulle - Dijon
6	ALLOIN G., PLAS J.B., LOPEZ V., PICOCHE G.	1eS 8	Ch. de Gaulle - Dijon
7	AGNELLO S., LACLEF C., MAUPIED L., GRACZYK C.	1eS 2	Marey - Beaune
8	BOUCHE L., CAMPAROT A., BEGEY R., JACQUET J.	1eS 1-2	La Prat's - Cluny
9	SOMMEREUX T., DABLIN Th., RICHEZ G., MIJIEUX T.	1eS 1	La Prat's - Cluny
10	PERRIN J., SANCHEZ M., BAIN S., DUBECQ L.	1eS 4	Janot - Sens
11	DAVANTURE L., LEFORT N., LEPAGNOLE J.	1eS1-ES1	Marey - Beaune
12	LANZINI M., BOUDIERE., SERGENT E.	1e 5 S	S. Liegeard - Brochon
12	SOUSSAND Annabelle	1eS	C. Claudel - Digoin

Terminale

1	DURANTE S., SITARZ W., JAUROU L., GIROUD P.	TS 10	Ch. de Gaulle - Dijon
2	BAILLOU R., PAGAND T., PAILLOUX V., VALENTIN A.	T 2-3	G. Eiffel - Dijon
3	BEDIOT A., DRIJSEN A., MAURE V., SESSEGOLO C.	TS 2	Lamartine - Macon
4	SULTAN C., MATHIOT L., BREUILLY L., GERMAN L.	TS 2	A. Judic - Semur en Auxois
5	GAUTHIER A.S., JANDOT C.	TS 1	J. Renard – Nevers
6	PETITJEAN M., BONIN D., TOURNIER A.	TS A-SI	G. Voisin- Tournus
7	FERNANDES B., PELLETIER A., JOBARD B.	TS	H. Fontaine - Dijon
8	ALHERITIERE P.A., SCHUMERS R., D'ABOVILLE A., VINSON C.	TS ABC	St Joseph - Dijon
9	LONGO E., LOCQUEVILLE J.	TS	J. Amyot - Auxerre
10	METSCH I., MARCHET M., JAGOURY R., ROUZEAU M.C.	TS	R. Rolland - Clamecy
11	DELABAYS P., BELLOCQ A.	TS	Prieur de la Côte d'Or - Auxonne
12	DUPONT M., BAILLY C., MOREAU V., MARTEL G.	TS 3	Janot - Sens
13	LARGE A., CHARVOZ M., HERAUD L., GALLION C.	T ES 3	Lamartine - Macon

Élèves cités, non récompensés

Seconde

1	Équipe KOECHLIN Perrine… (5 élèves)	2nde 11	J. Renard – Nevers
2	MERE V., FEVRE Ch., DONZEL E., MULLER J.	2nde 2	N. Niepce - Chalon
3	CHALAG L., FERIAUT S., GUYNOT J., DIALLO T.	2nde G1	A. Colas - Nevers
4	MARTINET M., ANCIAUX M., SANGARE M.	2nde C B	A. Colas - Nevers
5	GILLE C., ADRIEN C.	2nde 19	Janot - Sens
6	RAMIS M., SPORTES A., RAMAGE E., RANDRIAMAMPITA M.	2nde	La Prat's - Cluny
7	DORLAND F., MONTOT J., CRETIN C., PONTHENIER A.	2nde 2	La Prat's - Cluny
8	JANET J., VOYNNET J., PARADIS V., LAURIOT A.	2nde C F	Marey - Beaune
9	SAVARY L., PUIGRENIER J., GUILLEMIN A.	2nde 9	Ch. de Gaulle - Dijon
10	BENAS E., DUBRION G., FILSER A., TAS Y.	2nde 9	Ch. de Gaulle - Dijon
11	CARRETTE F., COIRET T., COMTE L., SAUVAGET P.	2nde F	Le Castel - Dijon
12	PETIT R., GUIDEL M., PELET Y.	2nde 1	G. Eiffel - Dijon
13	LAHAIE J., BOUARD N., PETIT L.	2nde F-E	Marey - Beaune
14	BONNET M., BONNET M., MONATE M., CHAMBINAUD S.	2nde A-C	R. Follereau - Nevers
15	ROUSSELOT-PAILEY C., DESSEREY J., TAVERGNIER A., KRYSMANN G.	2nde GT	Les Marcs d'Or - Dijon
16	MICHAUT Sandra	2nde 5	Fourier - Auxerre

Première

1	BRIGAND P., BEDNARCZYK M., STUDENY Q., LEGLISE M.	1eS 10	Ch. de Gaulle - Dijon
2	LALOË H., DLUGOSZ Z., HERMAND P., MAMET S.	1eS 10	Ch. de Gaulle - Dijon
3	MALYSZKO J., MILLERAND G., MARCHANDEAU T.	1eS 10	Ch. de Gaulle - Dijon
4	ALVES C., GERMAIN J., LAVAUD N., ROULINAT V.	1eS 8-9-10	J. Amyot - Auxerre
5	TARDIVON C., FORGET H., COUTANT J., PILLEVESSE Q.	1eS 3	A. Colas - Nevers
6	BERT J., BRENIER T., CHAMBON M., VANSEVENANT B.	1eS SI	La Prat's - Cluny
7	BOQUET L., MORIN T., KRAAK C., PREVOST C.	1eS 3	L. Davier - Joigny
8	PERLANGELI R., VOGADE M.	1eS 2	R. Rolland - Clamecy
9	LEBERT B., LEBERT M., PORTAIL R.	1eS 2	R. Rolland - Clamecy
10	GRANDJEAN N., RICO C., BERNARD A., STEPHANO A.	1eS2 STG 1	Mathias - Chalon
11	DUMOUT A., BERDAD N., GOIN J.B.	1eS 2	H. Parriat - Montceau

Terminale

1	GEOGELIN A., PLAIS L.	TS 2	A. Colas - Nevers
2	MOREAU C., MARION P.Y., BRETON G., GENAU T.	TS 1	A. Judic - Semur en Auxoix
3	SCHALLER A., DAVERZE Y.	TS 1	E. Jacob - Tonnerre
4	Équipe COURSOLLE Pierre-Yves… (5 élèves)	TS	St Cyr - Nevers
5	BIARD M., POINTECOUTEAU M., DÔ C., BOUCHER H.	TS 1-3	J. Renard - Nevers
6	CRIBEL M., FOURNEAUX P., RIBEIRO E., BARBIER J.F.	TS	Lamartine - Macon
7	MAJNONI A., SMORTO A., AREDE C.	TS	H. Fontaine - Dijon
8	DE CLERCK A., DE JOLY A.	TS	P. Larousse - Toucy
9	SCHUMAKER F., GUILLIEN M., RAUSCHER S.	TS A	Le Castel - Dijon
10	HOUILLON Jefferson	TS 2	E. Gauthey - Chalon
11	DAUDON G., VENOT C., BERNARD J., LIONS A.	TS	Clos Maire - Beaune

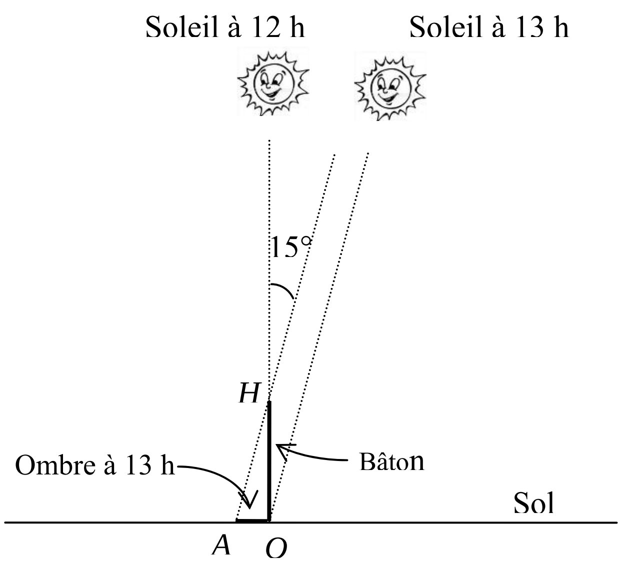
6. LE CORRIGÉ.

1. JEU D'OMBRES

Cet exercice a séduit, 90 % des équipes l'abordent. Pourtant le soleil d'Afrique n'a pas illuminé tous les esprits, puisque seulement une équipe sur dix trouve la bonne réponse : 2011 cm. Les connaissances mathématiques requises étaient pourtant modestes, limitées à des rudiments de géométrie du collège.

Solution

Lorsqu'en un lieu le soleil est au zénith un jour donné, ce jour-là la trajectoire apparente du soleil s'effectue dans un plan vertical. La situation est représentée dans ce plan sur la figure ci-contre.



Puisque le soleil tourne de 360° en 24 h, l'angle que fait le soleil avec la verticale augmente de 15° toutes les heures, en comptant les angles dans le sens horaire.

Si le bâton est symbolisé par le segment [OH] et l'ombre à 13 h par le segment [OA], on a donc :

$$OH = \frac{OA}{\tan 15°} = \frac{933,3}{\tan 15°} \text{ (en cm).}$$

À 14 h, le soleil fait un angle de 30° avec la verticale. Si l'ombre a pour longueur L à 14 h, on de même : $OH = \dfrac{L}{\tan 30°}$.

On en déduit : $\dfrac{L}{\tan 30°} = \dfrac{933,3}{\tan 15°}$, d'où $L = 933,3 \times \dfrac{\tan 30°}{\tan 15°} \approx 2010,98$ cm.

Conclusion : arrondie au centimètre, l'ombre du bâton à 14 h mesure 2011 cm.

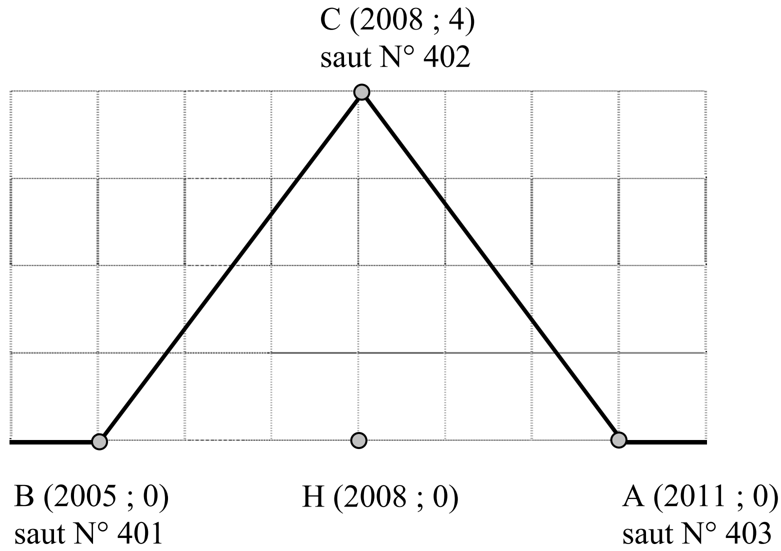
2. PUPUCE

90 % des équipes de seconde l'ont abordé pour un taux de réussite de 27 %.
La grande majorité des équipes a considéré qu'il suffisait de dépasser le point (2011 ; 0) ce qui donnait aussi un total de 403 sauts mais ne répondait pas à la question posée.
Quelques équipes ont pensé à « bifurquer » à l'aide de triangles rectangles de côtés 3, 4 et 5 mais en proposant un plus grand nombre de sauts.

Solution
La distance la plus courte entre deux points étant la ligne droite, il serait raisonnable d'envisager des sauts horizontaux de longueur 5, sur l'axe des abscisses. Malheureusement, 2011 n'étant pas un multiple de 5, la puce passerait directement du point (2010 ; 0) au point (2015 ; 0).

Du point O(0 ; 0) au point B(2005 ; 0), elle effectue $\dfrac{2005}{5} = 401$ sauts.

Il lui suffit de sauter ensuite au point C(2008 ; 4) puis au point A(2011 ; 0) comme schématisé ci-dessous :



Effectivement, le triangle BCH étant rectangle, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, ce qui permet d'en déduire BC = 5.
Les sauts BC et CA sont bien des sauts de longueur 5.

En conclusion, la puce effectuera un total de **403 sauts** : ce nombre est minimal puisque 402 sauts en ligne droite ne suffisent pas…

3. NOMBRES CROISÉS

Tous les nombres de cette grille à compléter, même ceux à un seul chiffre, font l'objet d'une définition. Aucun nombre ne commence par 0, et on ne doit placer qu'un seul chiffre par case.

Horizontalement
V Carré parfait.
VI Carré parfait.
VII Carré parfait. – Carré parfait.
VIII Carré parfait. – Carré parfait.

Verticalement
6. Carré parfait.
7. Carré parfait. – Carré parfait.
8. Carré parfait.
9. Carré parfait.

	1	**2**	**3**	**4**
I		*x*	*t*	■
II		*y*	*z*	*g*
III	*a*	■	*d*	*e*
IV	*b*	*c*	■	*f*

80% des équipes abordent cette grille avec 43% de succès, ce qui n'est pas mal.
Parmi les échecs, il n'y a souvent qu'une seule case fausse…

Solution.
On a intérêt à dresser une fois pour toute la liste des carrés à 2 ou 3 chiffres :

Carrés à deux chiffres	Carrés à trois chiffres		
16	100	324	676
25	121	361	729
36	144	400	784
49	169	441	841
64	196	484	900
81	225	529	961
	256	576	
	289	625	

Notons $T = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ les terminaisons possibles des carrés parfaits en base 10 et $C = \{1, 4, 9\}$ l'ensemble des carrés parfaits non nuls à un chiffre.
a doit être dans C. *b* doit être dans T, et *c* dans C, donc le carré parfait [*b c*] ne peut être que 49 ou 64.
Donc *b* est égal à 4 ou à 6.
Désignons par L1 le carré de la ligne 1, L2 celui de la ligne 2, C1 le carré de la colonne 1, C3 celui de la colonne 3 et C4 celui de la colonne 4..
La terminaison [*a b*] du carré C1 ne peut être que 14, 16, 44, 46, 94 ou 96.
14 et 46 et 94 n'étant pas des terminaisons de carrés, il ne reste pour [*a b*] que 16, 44, ou 96.
Il y a 9 possibilités pour C1, celles de l'ensemble $\{36^2 = 1296,\ 38^2 = 1444,\ 46^2 = 2116,\ 54^2 = 2916,\ 62^2 = 3844,\ 64^2 = 4096,\ 86^2 = 7396,\ 88^2 = 7744,\ 96^2 = 9216\}$.
Pour le carré parfait C4 = [*g e f*], *f* est dans C. De plus *e* et *g* doivent appartenir à T.
Cela ne laisse pour C4 que les 4 possibilités : {144, 169, 441, 961}

En combinant les 9 possibilités de C1 et les 4 possibilités de C4, on a 36 cas répertoriés ci-dessous :

Si b est connu, c l'est aussi, car il n'y a pas deux carrés à deux chiffres qui commencent par le même chiffre.
De même le seul carré à deux chiffres qui se termine par 4 est 64, et il y deux carrés à deux chiffres se terminant par 6 : 16 et 36 mais d ne peut être égal à 3. Donc, connaissant e on peut remplir la case d.

1			
2			1
9		6	4
6	4		4

1

1			
2			1
9		1	6
6	4		9

2

1			
2			4
9		6	4
6	4		1

3

1			
2			9
9		1	6
6	4		1

4

1			
4			1
4		6	4
4	9		4

5

1			
4			1
4		1	6
4	9		9

6

1			
4			4
4		6	4
4	9		1

7

1			
4			9
4		1	6
4	9		1

8

2			
1			1
1		6	4
6	4		4

9

2			
1			1
1		1	6
6	4		9

10

2			
1			4
1		6	4
6	4		1

11

2			
1			9
1		1	6
6	4		1

12

2			
9			1
1		6	4
6	4		4

13

2			
9			1
1		1	6
6	4		9

14

2			
9			4
1		6	4
6	4		1

15

2			
9			9
1		1	6
6	4		1

16

3			
8			1
4		6	4
4	9		4

17

3			
8			1
4		1	6
4	9		9

18

3			
8			4
4		6	4
4	9		1

19

3			
8			9
4		1	6
4	9		1

20

4			
0			1
9		6	4
6	4		4

21

4			
0			1
9		1	6
6	4		9

22

4			
0			4
9		6	4
6	4		1

23

4			
0			9
9		1	6
6	4		1

24

7			
3			1
9		6	4
6	4		4

25

7			
3			1
9		1	6
6	4		9

26

7			
3			4
9		6	4
6	4		1

27

7			
3			9
9		1	6
6	4		1

28

7			
7			1
4		6	4
4	9		4

29

7			
7			1
4		1	6
4	9		9

30

7			
7			4
4		6	4
4	9		1

31

7			
7			9
4		1	6
4	9		1

32

9			
2			1
1		6	4
6	4		4

33

9			
2			1
1		1	6
6	4		9

34

9			
2			4
1		6	4
6	4		1

35

9			
2			9
1		1	6
6	4		1

36

Cas de 1 à 4 : L1 $\in\{121, 144, 169, 196\}$ (100 n'est pas possible à cause de x et t).
Donc $[xy] = 25$ ou 49 ou 64 et $y \in \{4, 5, 9\}$.
L2 commence par 2 et se termine par 1, 4 ou 9.
Il n'y a que $47^2 = 2209$, $48^2 = 2304$, $49^2 = 2401$, $51^2 = 2601$,
$52^2 = 2704$ et $53^2 = 2809$. Donc $y \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. La seule possibilité est $y = 4$ donc $[x\,y] = 64$.
On aurait L1 = 169, L2 = 2401 qui entraînerait C3 = 900, mais $d = 0$ est interdit.

Cas de 5 à 8 : L1 $\in\{121, 144, 169, 196\}$ (100 n'est pas possible à cause de x et t).
Donc $[x\,y] \in \{25, 49, 64\}$ et $y \in \{4, 5, 9\}$.

L2 commence par 4 et se termine par 1, 4 ou 9. Il n'y a que $67^2 = 4489$, $68^2 = 4624$ et $69^2 = 4761$.
Donc $y \in \{4, 6, 7\}$. Cela ne laisse que la possibilité $y = 4$ donc $[x\,y] = 64$.
On aurait L1 = 169, L2 = 4484 mais C3 = 98* est impossible.

Cas de 9 à 12 : L1 $\in \{225, 256, 289\}$. Donc $[x\,y] = 25$ ou 81 et $y \in \{1, 5\}$.
L2 commence par 1 et se termine par 1, 4 ou 9. Il n'y a que $32^2 = 1024$, $33^2 = 1089$, $37^2 = 1369$, $38^2 = 1444$, $39^2 = 1521$, $41^2 = 1681$, $42^2 = 1764$ et $43^2 = 1849$. Donc $y \in \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
On en déduit $y = 5$ et $[x\,y] = 25$. Donc L1 = 225 et L2 = 1521. Mais cela entraînerait C3 = 529 d'où une impossibilité pour le carré $[d\,e]$.

Cas de 13 à 16 : L1 $\in \{225, 256, 289\}$ donc $[xy] = 25$ ou 81 et $y \in \{1, 5\}$.
L2 commence par 9 et se termine par 1, 4 ou 9. Il n'y a que $97^2 = 9409$, $98^2 = 9604$ et $99^2 = 9801$.
Donc $y \in \{4, 6, 8\}$. Il y a contradiction pour y.

Cas de 17 à 20 : L1 $\in \{324, 361\}$ donc x est égal à 2 ou 6. D'où $[x\,y] = 25$ ou 64 et $y \in \{4, 5\}$.
Le carré L2 commence par 8 et se termine par 1, 4 ou 9.
Il n'y a que $91^2 = 8281$, $92^2 = 8464$ et $93^2 = 8649$. Donc $y \in \{2, 4, 6\}$.
La seule possibilité pour y est 4. Donc L1 = 361 et L2 = 8464, mais alors C3 = 169 (il commence par 16) ce qui est impossible pour le carré $[d\,e]$.

Les cas 21, 22, 23, 24 sont éliminés car C2 commencerait par 0.

Cas de 25 à 28 : L1 $\in \{729, 784\}$ donc $[x\,y] = 25$ ou 81 et $y \in \{1, 5\}$.
L2 commence par 3 et se termine par 1, 4 ou 9.
Il n'y a que $57^2 = 3249$, $58^2 = 3364$, $59^2 = 3481$, $61^2 = 3721$, $62^2 = 3844$ et $63^2 = 3969$.
Donc $y \in \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. Il y a contradiction pour y.
Cas de 29 à 32 : Le carré L2 commence par 7 et se termine par 1, 4 ou 9.
Il n'y a que $87^2 = 7569$, $88^2 = 7744$ et $89^2 = 7921$. Or y est différent de 7. Donc $y \in \{5, 9\}$.
L1 = 729 ou 784. Donc $x = 2$ ou 8. La seule possibilité pour $[x\,y]$ est 25. Donc L1 = 729 et L2 = 7569.
Cela donne la solution <u>unique</u> ci-dessous :

7	**2**	**9**	
7	**5**	**6**	**9**
4		**1**	**6**
4	**9**		**1**

Cas de 33 à 36 : L1 = 961 (900 ne convient pas). Donc $[x\,y] = 64$. Le carré L2 commence par 24 et se termine par 1, 4 ou 9, c'est nécessairement $49^2 = 2401$, mais alors $z = 0$ et il y a impossibilité pour C3.

4. BIDOUILLAGE À LA GOMME

86 % des équipes abordent l'exercice, seulement 6 % d'entre elles le résolvent et trouvent la bonne réponse. La solution demandait seulement un peu de réflexion, de raisonnement et d'imagination, mais aucune connaissance mathématique, si ce n'est quelques notions de proportionnalité.

Solution

Une voiture qui parcourt 120 000 km use complètement trois jeux de pneus à l'avant, soit 6 pneus, et deux jeux de pneus à l'arrière, soit 4 pneus. Elle use donc au total 10 pneus.
Puisque la distance maximale parcourue avec 10 pneus est 120 000 km, il en résulte que la distance maximale parcourue avec 7 pneus est : $\frac{7}{10} \times 120000$, soit 84 000 km.

Il reste à établir que cette distance maximale peut être atteinte, en combinant bien les changements de pneus. On peut d'abord remarquer que chaque pneu peut parcourir 24 000 km à l'avant et 24 000 km à l'arrière. En effet :

- en parcourant 24 000 km à l'avant : il consomme $\frac{24000}{40000}$, soit $\frac{3}{5}$ de sa durée de vie ;
- en parcourant 24 000 km à l'arrière : il consomme $\frac{24000}{60000}$, soit $\frac{2}{5}$ de sa durée de vie.

Nommons A, B, C, D, E, F, G les sept pneus. Le tableau suivant indique les pneus qui roulent sur chaque tranche de 12 000 km.

Distance	Avant	Arrière
1ère tranche de 12 000 km	A, B	C, D
2e tranche de 12 000 km	A, B	E, F
3e tranche de 12 000 km	C, G	A, D
4e tranche de 12 000 km	D, G	A, E
5e tranche de 12 000 km	C, E	B, F
6e tranche de 12 000 km	D, F	B, G
7e tranche de 12 000 km	E, F	C, G

On vérifie bien que chacun des sept pneus roule 24 000 km à l'avant et 24 000 km à l'arrière, et que le véhicule parcourt sept tranches de 12 000 km chacune, soit au total 84 000 km.

Conclusion : la distance maximale que l'on peut parcourir avec sept pneus est 84 000 km.

Prolongement

On peut se préoccuper également de changer les pneus le moins souvent possible, ce qui ajoute une contrainte. Voici une solution où on ne change que 13 fois un pneu de place à partir du montage initial (chaque flèche indique un changement de pneu) :

Distance parcourue	Pneus utilisés à l'avant :		Pneus utilisés à l'arrière :	
12000	A	B	C	**D →**
12000	**A →**	**B →**	**C →**	G
12000	**C →**	D	F	**G →**
12000	G	**D →**	**F →**	**E →**
12000	**G →**	E	A	B
12000	F	**E →**	**A →**	**B →**
12000	F	C	D	E

Il existe une solution avec seulement 8 changements de pneu. Qui saura la trouver ?

5. LE PRÉNOM MYSTÉRIEUX

Il s'agit de trouver le prénom usuel d'un célèbre mathématicien qui ne vivait pas en France.

Ce prénom comporte huit lettres.
On a indiqué à droite des onze mots ci-contre, le <u>nombre de lettres bien placées</u> qui coïncident avec celles du prénom.

Quel est ce prénom ?

DEFROQUE	2	TABLEAUX	1
PRESENTS	2	NOISETTE	1
APPLAUDI	2	GRIMOIRE	1
MAINTENU	2	CHOCOLAT	1
		FRANCHIR	1
		POSITION	1
		REFERMER	1

Deux équipes sur trois sont attirées par ce prénom exotique, avec succès puisque 38% le trouvent.

Solution
Peu d'équipes ont bien vu l'astuce (ci-dessous) qui éliminait totalement les essais hasardeux.
Le prénom à trouver était **PAFNOUTI** (Tchebychev célèbre mathématicien russe, connu pour ses travaux en probabilité et statistique).
Pafnouti Lvovitch Tchebychev (Пафнутий Львович Чебышёв) 1821-1894.

De nombreuses équipes trouvent quelques lettres seulement, et le résultat est souvent étonnant.
Parmi les prénoms fantaisistes erronés, citons :
PAFLEUNE, NEPSONNI, PAILOUTE, PAFSEUTI, DOILOIVE, PRINOUTE, PEILEUTE, PRALOITE, PRILEUTE, PRILOUNE etc. et pour ceux qui ont tenté leur chance en désespoir de cause : GERONIMO, GRACCHUS et même FABIENNE !

Éxaminons les 4 premiers mots de gauche (2 lettres bien placées).
Pour chacune des 8 colonnes, il n'y a jamais 2 fois la même lettre. Donc il y a au plus une bonne lettre par colonne. Les 8 indices correspondent donc à 8 colonnes distinctes.
Bref, <u>chaque colonne contient exactement une lettre du prénom</u>.
Passons aux 7 mots de droite. (Une lettre et une seule bien placée par mot)

D'après ce qu'on vient de dire,
on peut éliminer de la colonne 1 tout ce qui n'est pas D, P, A, M
on peut éliminer de la colonne 2 tout ce qui n'est pas E, R, P, A etc.
on peut éliminer de la colonne 8 tout ce qui n'est pas E, S, I, U.
Il reste à droite les possibilités ci-contre :
On en déduit immédiatement le O en colonne 5 ce qui élimine le E et le T de cette même colonne d'où le P nécessaire de la ligne 7.
De plus en ligne 3 on peut éliminer R, I, E car la bonne lettre est O.

	A		**L**	**E**		**U**	
		I	**S**	**E**		**T**	**E**
	R	**I**		**O**			**E**
				O			
	R		**N**				
P				**T**			
	E	**F**					

Le R étant éliminé de la colonne 2, le I étant éliminé de la colonne 3 et le E étant éliminé de la colonne 8, il reste à droite les possibilités ci-contre :
On en déduit immédiatement le N en ligne 6 ce qui élimine le L et le S de la colonne 4 d'où le T nécessaire de la ligne 2.
De plus, en colonne 7 on peut éliminer U puisque la bonne lettre est le T.

	A		**L**			**U**	
			S			**T**	
				O			
				O			
			N				
P							
	E	**F**					

Il reste les possibilités ci-contre :
Le A est la bonne lettre de la ligne 1 ce qui élimine le E de la colonne 2 d'où le F nécessaire de la ligne 8.
On a le prénom PAFNO*T* et si on revient aux 4 premiers mots, DEFROQUE a F,O PRESENTS a P,T MAINTENU a A,N.
Les deux bonnes lettres de APPLAUDI sont donc le U et le I.
D'où le prénom **PAFNOUTI**.

	A						
						T	
				O			
				O			
			N				
P							
	E	**F**					

6. ESPADRILLES

67% des équipes ouvrent le tiroir, mais seules 14% arrivent à compter les espadrilles.

Soit $4n$ le nombre total d'espadrilles. C'est un multiple de 4 car Gaston une chance sur quatre d'obtenir un pied gauche sans trou en choisissant une espadrille au hasard.
On peut dresser le tableau d'effectifs ci-dessous avec à droite et en bas les effectifs marginaux :

	Pied gauche	Pied droit	
Espadrille trouée	n (4)	n (4)	$2n$ (1)
Espadrille non trouée	n (1)	n (2)	$2n$ (1)
	$2n$ (3)	$2n$ (3)	$4n$

(1) Il y a par hypothèse autant d'espadrilles trouées que de non trouées (soit $2n$) et un quart de pieds gauches non troués (soit n).
(2) Il y a donc par différence n pieds droits non troués.

(3) Par ailleurs il y a la moitié de pieds gauches soit $2n$ et autant de pieds droits.
(4) Par différence, il y a donc n pieds gauches troués et n pieds droits troués.
Lorsqu'il prend deux espadrilles au hasard, s'il les prend successivement, il a $4n\,(4n-1)$ choix.
[$4\,n$ choix pour la première et $4\,n-1$ choix pour la seconde].
Parmi ceux-ci, il a $2\,n \times n$ choix pour lesquels il y a un pied droit et un pied gauche tous deux sans trous. [(n pieds gauches et n pieds droits) ou (n pieds droits et n pieds gauches)]

Par hypothèse on a : $\dfrac{2n^2}{4n(4n-1)} = \dfrac{2}{15}$ d'où $15\,n = 4\,(4n-1)$ soit $n = 4$.

Gaston a donc $4\,n =$ **16 espadrilles** dans son tiroir.

7. TROIS PETITS TOURS

Deux tiers des équipes sont tentées par ces trois petits tours, mais la bonne réponse (évidemment égale à 2011) n'est trouvée que par 10 d'entre elles.

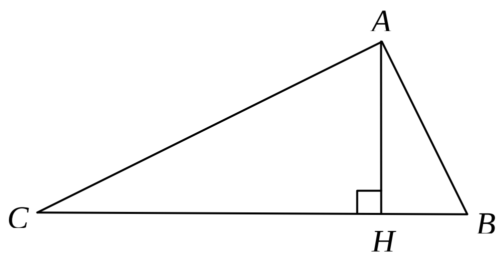
Solution

Notons ABC le triangle, A étant le sommet de l'angle droit, H le pied de la hauteur issue de A.
L'aire du triangle peut s'exprimer de deux manières :

$$\text{aire} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}.$$

On en déduit l'égalité bien connue dans le triangle rectangle :

$$AB \times AC = BC \times AH \quad (1).$$



Notons :

- V_1 le volume du cône engendré par révolution autour de la tige $[AB]$;
- V_2 le volume du cône engendré par révolution autour de la tige $[AC]$;
- V le volume du solide engendré par révolution autour de la tige $[BC]$;

On a immédiatement : $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\, AC^2 \times AB$ et $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi\, AB^2 \times AC$.

Le troisième solide est la juxtaposition de deux cônes ayant même base, de rayon AH, l'un ayant pour hauteur CH et l'autre BH.

Donc $V = \dfrac{1}{3}\pi\, AH^2 \times BH + \dfrac{1}{3}\pi\, AH^2 \times HC = \dfrac{1}{3}\pi\, AH^2 \times (BH + HC) = \dfrac{1}{3}\pi\, AH^2 \times BC$.

Des relations précédentes, on déduit $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{AH^2 \times BC}{AC^2 \times AB} = \dfrac{AH}{AC}$, en tenant compte de l'égalité (1).

De même : $\dfrac{V}{V_2} = \dfrac{AH^2 \times BC}{AB^2 \times AC} = \dfrac{AH}{AB}$.

On en déduit : $\left(\dfrac{V}{V_1}\right)^2 + \left(\dfrac{V}{V_2}\right)^2 = AH^2\left(\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}\right) = AH^2 \times \dfrac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \times AC^2}$.

En utilisant le théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, on en tire :

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)^2+\left(\frac{V}{V_2}\right)^2=\frac{AH^2\times BC^2}{AB^2\times AC^2}=1,$$

en utilisant encore l'égalité (1).

Cette dernière égalité peut s'écrire aussi : $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}$, ce qui est une très belle égalité reliant les trois volumes. Elle montre en particulier que si V_1 et V_2 sont donnés, on peut en tirer V par la relation :

$$V=\frac{V_1V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}.$$

Avec $V_1=4960$ et $V_2=2200$, on en tire : $V\approx 2011{,}053$ cm³.

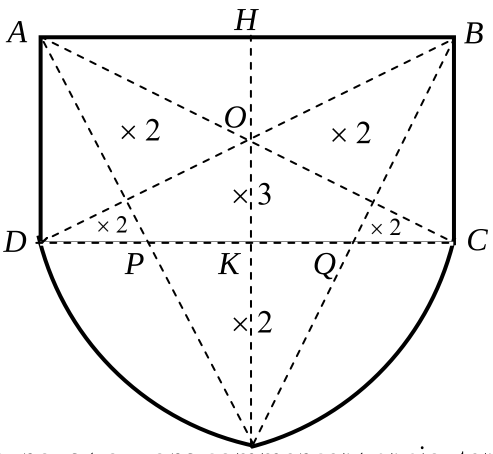
Conclusion : arrondi au cm³, le troisième solide a pour volume 2011 cm³.

8. LE FANION

72 % des équipes de première et terminale l'ont abordé pour un taux de réussite de 6 % seulement. Très peu d'équipes vont au bout de l'exercice. Cette figure regorge de triangles semblables, mais cette notion n'est plus enseignée au lycée.

Solution

Considérons le fanion d'axe de symétrie (HE) et ajoutons-y quelques points comme sur la figure ci-dessous :



Pour obtenir l'aire totale du fanion, nous pouvons commencer par ajouter celle du rectangle *ABCD* et celles des secteurs angulaires *ACE* et *BDE*. Par cette somme d'aires, quelques portions sont comptées plusieurs fois comme notées sur la figure : il suffira de retrancher ce qui est compté en double ou triple.

- Aire du rectangle ABCD : 50 × 25 = **1250** cm².

- Aire du secteur *ACE* : les triangles *ABC*, *ADC*, *AHE* et *BHE* sont rectangles et ont les mêmes longueurs de côtés (on dit qu'ils sont isométriques). L'angle *HAE* a même mesure que l'angle *BCA*, soit 90 – *BAC*.
  On en déduit : *DAE* = 90 – *HAE* = 90 – (90 – *BAC*) = *BAC*.
  D'autre part, tan *BAC* = *BC* / *BA* = 0,5 (trigonométrie dans *ABC*), d'où
  BAC = $\tan^{-1}(0{,}5)\approx 26{,}6°$. Finalement, *CAE* = 90 – 2 $\tan^{-1}(0{,}5)$.

Le secteur ACE ayant pour rayon $AC = 25\sqrt{5}$ d'après le théorème de Pythagore dans ABC, on en déduit son aire : $\dfrac{90 - 2\tan^{-1}(0{,}5)}{360} \times \pi \times (25\sqrt{5})^2 \approx$ **1005,47** cm².

- Aire de APC : comme AHE et ABC ont les mêmes dimensions, on en déduit KE = 25 cm. Les triangles ADP et PKE sont donc en configuration de Thalès avec $AD = KE$.
  On en déduit alors $DP = PK$, donc PK = 12,5 cm.
  Finalement, APC a pour aire : $\frac{1}{2}(PC \times AD) = \frac{1}{2}(37{,}5 \times 25) =$ **468,75** cm².
- Aire de PQE : $\frac{1}{2}(PQ \times KE) = \frac{1}{2}(25 \times 25) =$ **312,5** cm².

L'aire totale du fanion est donc :

$$1250 + 2 \times \frac{90 - 2 \times \tan^{-1}(0{,}5)}{360} \times \pi \times (25\sqrt{5})^2 - 2 \times 468{,}75 - 312{,}5 \approx 2010{,}94 \text{ cm}^2$$

soit une aire arrondie au cm² d'environ **2011**.

Remarque : Comme dans le dernier calcul, 1250 – 2 × 468,75 – 312,5 = 0 on constate que l'aire du fanion est exactement le double de celle d'un secteur (ACE) par exemple. On peut justifier cela géométriquement.

9. ÉGYPTOLOGIE

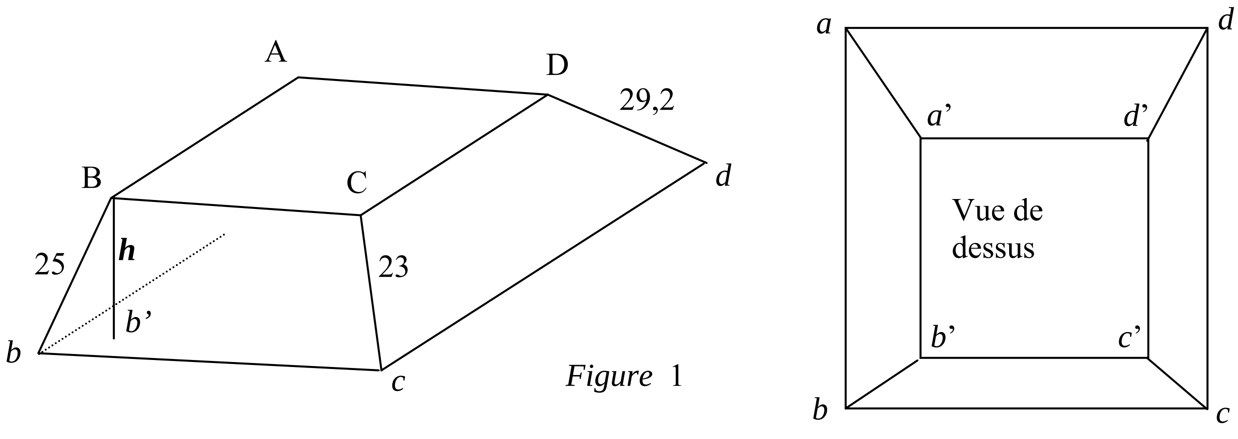


Figure 1

34% des équipes explorent la pyramide, mais la malédiction des pharaons a encore frappé : seules 3 équipes sur 111 arrivent à calculer la longueur de l'oblique invisible.

Solution.
D'abord attention, car rien ne dit dans l'énoncé que la base est carrée ou que les quatre arêtes obliques se rejoignent au sommet. La figure 2 ci-dessous montre une pyramide (à deux sommets !) avec une base rectangulaire alors qu'au niveau intermédiaire on a un carré.

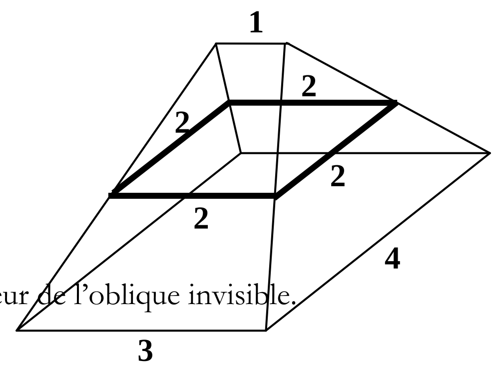


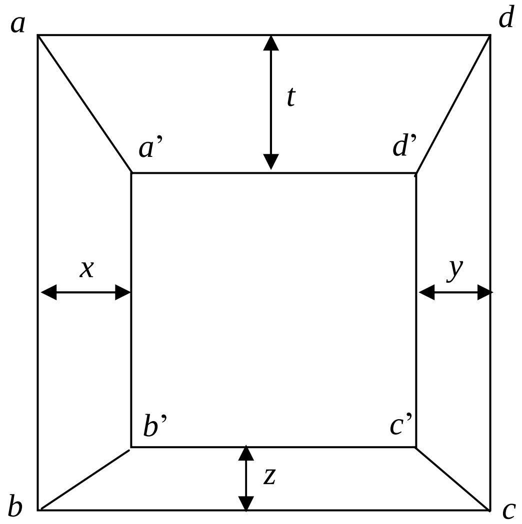
Figure 2

Soit L la longueur de l'oblique invisible.

Soit h la distance entre le plan du carré ABCD de la figure 1 et la base. Le parallélisme des plans est en effet garanti par les hypothèses.
Notons a', b', c', d' les projections orthogonales de A, B, C, D sur la base.
D'après le théorème de Pythagore :

$$25^2 = (bb')^2 + h^2, \qquad 23^2 = (cc')^2 + h^2, \qquad 29{,}2^2 = (dd')^2 + h^2, \qquad L^2 = (aa')^2 + h^2. \tag{1}$$

Figure 3



Dans la figure 3 (vue de dessus), notons x, y, z, t les distances matérialisées par les doubles flèches.
Toujours d'après le théorème de Pythagore :

$$(bb')^2 = x^2 + z^2, \qquad (cc')^2 = z^2 + y^2, \qquad (dd')^2 = y^2 + t^2, \qquad (aa')^2 = x^2 + t^2. \tag{2}$$

On constate que $\quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (bb')^2 + (dd')^2 = (cc')^2 + (aa')^2 \quad$ (3)

Il suffit maintenant de remplacer dans (3) $(bb')^2, (dd')^2, (cc')^2, (aa')^2$ par leurs valeurs tirées de (1) :

On obtient : $\quad 25^2 - h^2 + 29{,}2^2 - h^2 = 23^2 - h^2 + L^2 - h^2.$

D'où on tire $\quad L^2 = 25^2 + 29{,}2^2 - 23^2 = 948{,}64$ soit $\mathbf{L = 30{,}8\ m}$.

FIN

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://math.u-bourgogne.fr/IREM/