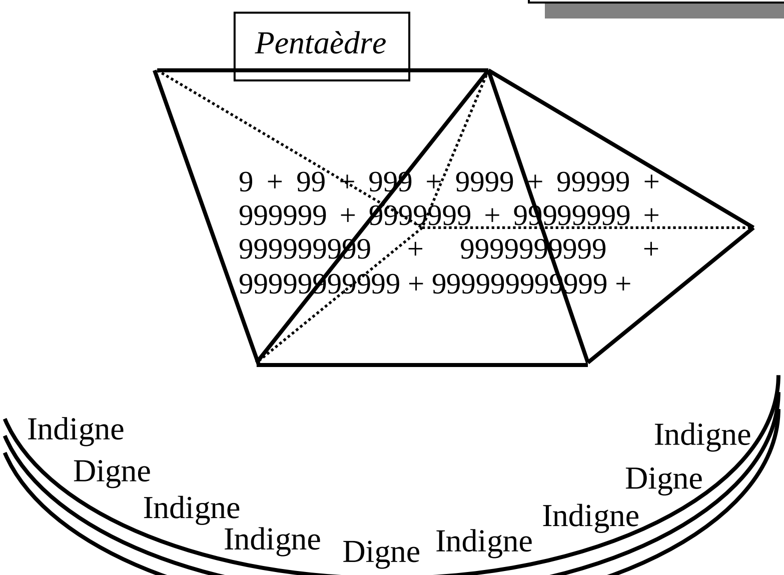
RALLYE MATHEMATIQUE

DE BOURGOGNE

28ème rallye

2010

9 926 315
=
$9^7+9^7+2^7+6^7+3^7+1^7+5^7$



Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://math.u-bourgogne.fr/IREM/

« Le Rallye mathématique des lycées a démontré cette année encore aux quelque 700 participants venus de 32 lycées de toute la Bourgogne, que rigueur scientifique rimait avec réflexion méthodique et travail d'équipe. Car bien au delà des exigences scolaires et du sérieux que l'on peut attendre de cette épreuve, les candidat(e)s ont su exploiter au mieux leur imagination pour résoudre, tous ensemble, les problèmes qui étaient soumis à leur perspicacité.
Une manifestation dont le succès ne se dément pas et qui s'inscrit pleinement dans la politique régionale en faveur de la diffusion de la culture scientifique et technique, encourageant le rapprochement entre les mondes de la recherche et de l'éducation. Rien de telle qu'une compétition ludique pour donner aux jeunes le goût des sciences et des métiers scientifiques.
Bravo aux 228 équipes qui ont concouru pour le titre, et à celles qui ont trouvé les solutions ! »

François PATRIAT,
Sénateur,
Président du conseil régional de Bourgogne

La 28ème édition du Rallye mathématique des lycées de Bourgogne a rencontré cette année encore un franc succès : 228 équipes, soit 712 participants de 32 lycées des 4 départements bourguignons ont participé à ce défi collectif organisé par l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de l'Université de Bourgogne. Avec le concours des enseignants des différents lycées de notre région et le soutien du Conseil Régional de Bourgogne et du Rectorat de l'Académie de Dijon, ce rallye est l'occasion de faire découvrir le plaisir de la résolution de problèmes mathématiques sous un angle nouveau.

Les épreuves de ce rallye ont en effet été envisagées dans le but de faire découvrir les joies de la réussite d'épreuves présentées sous une forme attractive et ludique. Cette discipline, souvent considérée par les plus jeunes comme austère ou difficile, peut alors être considérée par les lycéens, futurs étudiants, comme divertissante mais aussi comme l'une des clés essentielle au développement de toutes les sciences : de la physique-chimie aux sciences de la vie et de la terre, en passant par l'économie…

Je félicite ici l'ensemble des acteurs et partenaires, aux côtés de l'IREM de l'Université de Bourgogne, pour leur enthousiasme et leur investissement dans ce rallye qui est chaque année une réussite et l'une des clés de la dynamique de coopération entre les lycées bourguignons et notre université.

Sophie BÉJEAN,
Présidente de l'Université de Bourgogne

Le 20 janvier dernier, jour de la Saint Sébastien, les lycéens des quatre départements de notre Académie ont une fois de plus été nombreux à aiguiser non pas leurs flèches mais seulement leurs plumes pour tenter de résoudre les neuf énigmes de la vingt huitième édition du Rallye Mathématique de Bourgogne. Comme chaque année, ces problèmes originaux et inspirés mobilisent un large spectre de connaissances mathématiques dans des contextes variés : géométriques, numériques ou algébriques. Leurs mises en scène aux intitulés espiègles distillent les données avec une telle parcimonie qu'elles peuvent sembler lacunaires à la première lecture, instillant d'emblée l'envie d'en savoir davantage.

Dans leur livre « Les Mathématiques : Plaisir et Nécessité » André Warusfel et Albert Ducroc rappellent que les mathématiques « *forcent à expérimenter* », « *obligent à observer tous azimut et à prendre des initiatives* » mais qu'en retour, en termes de récompense, « *impulsent une émotion esthétique incomparable* ». En ce sens, le Rallye est bien au cœur de l'activité mathématique : qu'il s'agisse du collage de Mathusalich, du trésor du capitaine ou des trous de mémoire de Gaston, c'est à la faculté d'expérimenter, d'observer mais aussi de raisonner qu'il est fait appel chez chacun des concurrents. Faire des mathématiques, c'est comprendre un problème, le transformer, le rendre accessible, imaginer des pistes, construire une solution pour enfin atteindre la preuve qui est le terme de toute quête mathématique, en associant par le seul pouvoir de la réflexion et du raisonnement, ces pièces élémentaires qu'on appelle théorèmes.

Depuis plus d'un quart de siècle, le Rallye fait recette en terme de participation. On peut s'interroger sur les raisons de cette fidélité. Participer au Rallye non seulement ne dispense pas de cours mais au contraire impose quatre heures de présence supplémentaire au lycée un mercredi après midi, participer au Rallye n'ouvre aucune perspective lucrative. Alors, gageons qu'en dépit de ce qui se dit parfois des mathématiques, l'« *émotion esthétique incomparable* » liée à la recherche et la découverte des solutions l'emporte sur les habituelles idées reçues.

« *Les sciences mathématiques montrent en particulier l'ordre, la symétrie et la limitation ; ce sont les plus grandes formes du beau* » Aristote.

Daniel DETILLEUX
IA IPR de Mathématiques

La 28$^{\text{ème}}$ édition du Rallye mathématique de Bourgogne a rassemblé plus de 700 lycéens des quatre départements. L'épreuve a eu lieu dans les lycées mercredi 24 janvier 2010.
Au-delà de l'aspect ludique très important bien sûr, je suis convaincue de l'intérêt de ce type d'épreuves pour les élèves, pour les mathématiques, pour les sciences et, pourquoi pas, pour notre société dont ces jeunes sont l'avenir. Ces énigmes mathématiques permettent d'exercer l'intuition, de prendre des initiatives et de travailler en équipe. Le temps de cette épreuve, chacun peut donner son avis, prouver aux coéquipiers qu'ils font fausse route, apporter sa propre brique à la résolution des problèmes. Ce sont des atouts qui auront leur utilité le moment venu pour les élèves quelle que soit la place qu'ils prendront dans la société. Et peut-être, en prime, auront-ils un meilleur souvenir des mathématiques ? C'est ce qui nous motive au sein des IREM à organiser des Rallyes dans divers établissements (écoles primaires, collèges, lycées) en France depuis de nombreuses années.
Je remercie chaleureusement l'équipe de l'IREM de Dijon composée de R. Ferachoglou, M. Lafond et F. Plastre qui organise chaque année le rallye. Conception des sujets, correction des copies, classements des candidats : cette manifestation leur demande beaucoup de travail. Je remercie F. Besse qui s'occupe de sa logistique.
Je remercie également les professeurs qui inscrivent leurs élèves et assurent le déroulement du rallye dans leur lycée et les chefs d'établissement qui autorisent la mise en place de l'épreuve.
Je remercie le Conseil Régional de Bourgogne et l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public qui subventionnent le Rallye.

A l'an prochain pour la future édition du Rallye !

Catherine LABRUÈRE CHAZAL,
Directrice de l'IREM

1. LES ÉNONCÉS

1 : EMPORTÉS PAR LA POULE.

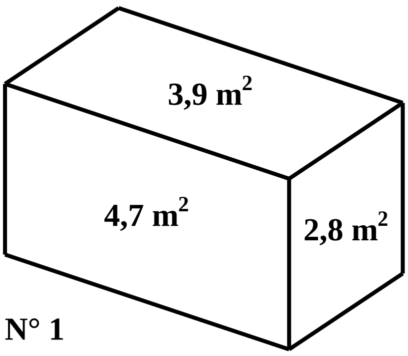
2010 joueurs participent à un tournoi de tennis. À chaque tour un tirage au sort constitue un maximum de poules de trois joueurs, et les joueurs restants (s'il y en a) sont qualifiés d'office pour le tour suivant. Dans chaque poule, chaque joueur affronte les deux autres joueurs de la poule, et les deux premiers sont qualifiés pour le tour suivant. *(On fait en sorte que dans chaque poule il y a un perdant éliminé par les deux autres).* L'élimination se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux joueurs, qui sont départagés au cours d'une unique partie finale.

Combien de parties au total sont jouées dans ce tournoi ?

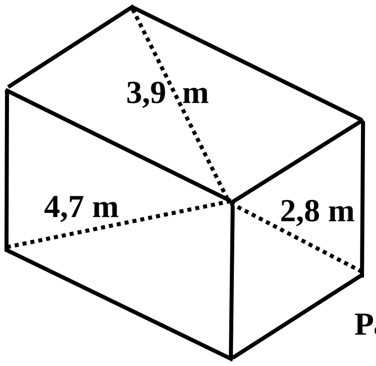
2 : HISTOIRE EN DEUX VOLUMES.

Dans le premier pavé droit ci-dessous, on connaît les aires de 3 faces, et dans le second pavé droit, on connaît les mesures des diagonales de 3 faces.

Quel est le pavé qui a le volume maximal ?



Pavé N° 1



Pavé N° 2

3 : DIGNES ET INDIGNES.

2010 personnages sont assis en rond, leur regard est tourné vers le centre. Il y a des Dignes, qui disent toujours la vérité et des Indignes qui mentent toujours. Chaque personnage affirme que les deux voisins assis à sa droite sont des Indignes.

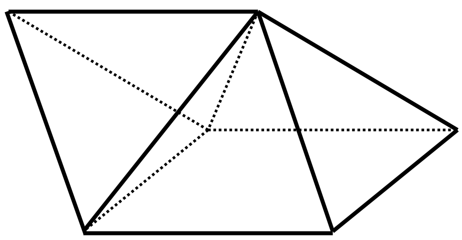
Combien y a-t-il de Dignes dans cette ronde ?

4 : QUOI DE NEUF ?

On ajoute les entiers **9**, **99**, **999**, **9999**, etc. jusqu'à l'entier composé de **999** fois le chiffre **9**. Quelle est la somme des chiffres du résultat ?

5 : LE COLLAGE DE MATHUSALITCH.

Le sculpteur moderne Mathusalitch (1515-2009) a réalisé son œuvre célèbre intitulée "*Pentaèdre*" en collant face contre face une pyramide à base carrée, dont toutes les arêtes ont pour longueur 1 mètre, et un tétraèdre régulier d'arête 1 mètre.



Justifier le titre de l'œuvre.

6 : DURE DURE LA CLÔTURE.

Gaston rédige son testament : il désire léguer à ses deux enfants son champ clos, qui a la forme d'un triangle équilatéral de **2010** mètres de côté.

Peut-il partager ce champ en deux parcelles de même aire à l'aide d'une ligne de séparation mesurant moins de **1360** m ?

7 : LE SURDOUÉ.

Gaston est un surdoué du calcul mental. Aussi tout le monde lui pose des colles. Son voisin a trouvé un moyen de piéger Gaston. Il lui pose le problème suivant :
"Le produit des âges de mes 3 sœurs est 72, et leur somme est égale à ton âge. Quels sont les âges de mes sœurs ? "
Cette fois, Gaston est incapable de répondre.

Quel est l'âge de Gaston ?

8 : LA PUISSANCE DES NOMBRES.

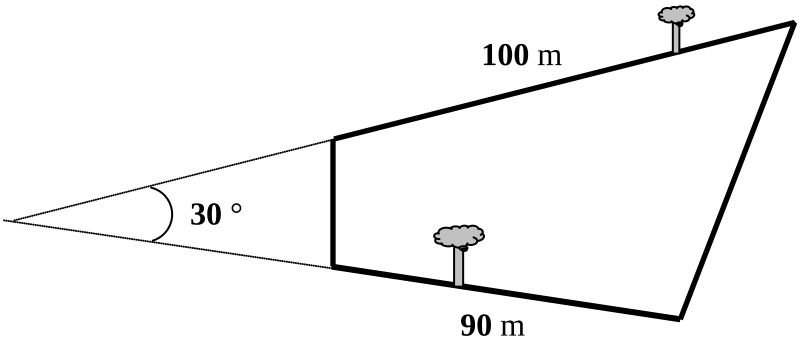
Chacun sait que **4151=** $\mathbf{4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5}$**.**
On dit qu'un nombre entier est puissant, s'il est égal à la somme de tous ses chiffres, chacun d'eux étant élevé à une même puissance. Ainsi le nombre 4151 est puissant.
Gaston est fier : il a trouvé un nombre puissant de 7 chiffres : **9 9 • • • 1 5**.
Hélas, il a oublié de le noter, et ne se souvient plus des trois chiffres du centre.

Quel est ce nombre ?

9 : LE TRÉSOR DU CAPITAINE.

Le capitaine a enterré un trésor juste au milieu de deux arbres, chacun situé sur un des deux côtés opposés d'un champ. Ces côtés mesurent **90** m et **100** m, et font entre eux un angle de **30** degrés. Les arbres ont depuis longtemps disparus.

Quelle surface minimale doit-on creuser pour être sûr de trouver le trésor ? Quelle est l'aire de cette surface minimale ?



Exercice	Solution
1 EMPORTÉS PAR LA POULE.	**6025 parties seront jouées.**
2 HISTOIRE EN DEUX VOLUMES.	**Le pavé numéro 2 a le plus grand volume. 7,21 m^3 contre7,16 m^3.**
3 DIGNES ET INDIGNES.	**Il y a 670 dignes autour de la table.**
4 QUOI DE NEUF ?	**La somme des chiffres est 999.**
5 LE COLLAGE DE MATHUSALITCH.	**La sculpture a exactement 5 faces.**
6 DURE DURE LA CLOTURE.	**Une clôture en arc de cercle (60 °) aura une longueur d'environ 1354 m.**
7 LE SURDOUÉ.	**Gaston a 14 ans**
8 LA PUISSANCE DES NOMBRES.	**Le nombre est 9926315.**
9 LE TRÉSOR DU CAPITAINE.	**La surface à creuser est celle d'un parallélogramme d'aire 1125 m^2.**

2. LA PARTICIPATION.

Le **28**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 20 janvier 2010.
Il a concerné :

32 lycées **228 équipes** **712 participants**.

Voici l'évolution de la participation ces dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**total des participants**
2005	292	163	186	173	**814**
2006	270	143	177	142	**732**
2007	239	61	96	65	**461**
2008	266	139	255	108	**768**
2009	371	74	181	97	**723**
2010	303	82	226	101	**712**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.

Participation

	Lycée	Equipes				Participants			
		2nde	1e	Tale	**Total**	2nde	1ère	Tale	**Total**
Côte d'Or 11 lycées	Clos Maire - BEAUNE	1	1	0	**2**	4	3	0	**7**
	Marey - BEAUNE	4	1	0	**5**	9	4	0	**13**
	Saint Cœur - BEAUNE	1	0	1	**2**	2	0	2	**4**
	Stephen Liégeard - BROCHON	2	0	2	**4**	7	0	6	**13**
	Jean-Marc Boivin - CHEVIGNY SAINT SAUVEUR	1	1	2	**4**	4	3	4	**11**
	Carnot - DIJON	3	12	4	**19**	10	39	13	**62**
	Eiffel - DIJON	11	7	3	**21**	39	24	13	**76**
	Charles de Gaulle - DIJON	6	2	3	**11**	15	8	10	**33**
	Hippolyte Fontaine - DIJON	8	2	4	**14**	29	6	12	**47**
	Le Castel - DIJON	1	2	0	**3**	2	5	0	**7**
	Anna Judic - SEMUR EN AUXOIS	7	2	0	**9**	25	5	0	**30**
Nièvre 5 lycées	Romain Rolland - CLAMECY	4	2	1	**7**	12	5	1	**18**
	Maurice Genevoix - DECIZE	0	1	2	**3**	0	4	7	**11**
	Alain Colas - NEVERS	1	1	3	**5**	2	3	12	**17**
	Jules Renard - NEVERS	2	3	3	**8**	6	11	8	**25**
	Saint Cyr - NEVERS	2	1	1	**4**	4	4	3	**11**
Saône et Loire 11 lycées	Militaire - AUTUN	0	1	1	**2**	0	1	2	**3**
	Emiland Gauthey - CHALON SUR SAÔNE	1	1	2	**4**	4	3	5	**12**
	Mathias - CHALON SUR SAÔNE	5	1	2	**8**	18	1	8	**27**
	Niepce - CHALON SUR SAÔNE	5	2	1	**8**	21	10	2	**33**
	Pontus de Tyard - CHALON SUR SAÔNE	6	0	2	**8**	16	0	3	**19**
	Julien Wittmer - CHAROLLES	3	0	0	**3**	9	0	0	**9**
	La Prat's - CLUNY	3	0	3	**6**	7	0	8	**15**
	Léon Blum - LE CREUSOT	3	2	0	**5**	11	5	0	**16**
	Lamartine - MÂCON	14	9	2	**25**	40	31	10	**81**
	Henri Parriat - MONTCEAU LES MINES	3	0	0	**3**	5	0	0	**5**
	Gabriel Voisin - TOURNUS	1	1	0	**2**	4	2	0	**6**
Yonne 5 lycées	Jacques Amyot - AUXERRE	2	0	0	**2**	8	0	0	**8**
	Parc des Chaumes - AVALLON	1	0	0	**1**	2	0	0	**2**
	Louis Davier - JOIGNY	2	5	0	**7**	4	16	0	**20**
	Chevalier d'Eon - TONNERRE	9	3	1	**13**	26	8	3	**37**
	Catherine et Raymond Janot - SENS	8	1	1	**10**	27	4	3	**34**
32 lycées	**TOTAL**	114	62	43	**228**	357	198	133	**712**

3. L'ORGANISATION.

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.
Le financement est assuré par le Conseil Régional de Bourgogne, le Rectorat de l'Académie de Dijon, l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), et l'IREM lui-même.
L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Robert FERACHOGLOU, Michel LAFOND et Florian PLASTRE. Trois professeurs ont participé au choix définitif des sujets : Gérard BOUILLOT, Maurice NUSSBAUM, Daniel REISZ.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame le Recteur de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM.
Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.
Françoise BESSE, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.
Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.
Enfin les 712 participants qui ont, pendant 4 heures d'un après-midi, proposé leurs solutions.

4. LA RÉUSSITE.

Exercice	Nombre d'équipes	Pourcentage d'équipes ayant abordé le problème	Pourcentage d'équipes ayant donné la bonne réponse
1 EMPORTÉS PAR LA POULE.	119	96%	36%
2 HISTOIRE EN DEUX VOLUMES.	119	67%	45%
3 DIGNES ET INDIGNES.	119	86%	51%
4 QUOI DE NEUF ?	228	79%	19%
5 LE COLLAGE DE MATHUSALITCH.	228	79%	57%
6 DURE DURE LA CLOTURE.	228	71%	4%
7 LE SURDOUÉ.	109	96%	60%
8 LA PUISSANCE DES NOMBRES.	109	87%	83%
9 LE TRÉSOR DU CAPITAINE.	109	67%	17%

Sur les 228 équipes :

3 ont trouvé les 6 bonnes réponses ; [Elles sont citées juste après]
6 ont trouvé 5 bonnes réponses sur 6 ;
30 ont trouvé 4 bonnes réponses sur 6 ;
55 ont trouvé 3 bonnes réponses sur 6 ;
70 ont trouvé 2 bonnes réponses sur 6 ;
44 ont trouvé une seule bonne réponse ;
20 feront mieux la prochaine fois.

Les meilleures équipes de chaque niveau sont :

En seconde

L'équipe : [VOZNICA Jakub – LEVY Jan – VAREJKOVA Tereza – YI Yan]
de Seconde 2-8 du lycée Carnot de Dijon avec **57** points sur 60.

En première

L'équipe : [GIROUD Paul – JAUROU Lucas – DURANTE Samuel – SITARZ Wojciech]
de 1° S10 au lycée Charles de Gaulle de Dijon avec **58** points sur 60.

En terminale

L'équipe : [BARRY Fatima – LI Yuhua –LETOUZ Nicolas]
de Terminale 3-4 au lycée Carnot de Dijon avec **59** points sur 60..

Nous déclarons meilleure équipe du rallye 2010
L'équipe : [VOZNICA Jakub – LEVY Jan – VAREJKOVA Tereza – YI Yan]
de Seconde 2-8 du lycée Carnot de Dijon avec **57** points sur 60.

5. LE PALMARÈS.

Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées
Seconde

1	VOZNICA Jakub, LEVY Jan, VAREJKOVA Tereza, YI Yan	2nde 2 8	Carnot - Dijon
2	QIAN Chen, YANG Dongchen, ORGERET Diane	2nde 8	Carnot - Dijon
3	BOUDSOCQ Laurie, TOUILLON Parvine, RENAUD Estelle, WAVRE Raphaël	2nde 5	Lamartine - Macon
4	ALVES Corentin, GERMAIN Jean, LAVAUD Nicolas, ROULINAT Victor	2nde 10	J. Amyot - Auxerre
5	DIAS SILVA Mélissa, DIAS SILVA Marine, STURTON Jake	2nde 5	Lamartine - Macon
6	JEANNIN Roxane, TUBARO Marianne, MOUREAU Kévin, DEGEORGES Sylvain	2nde 1	Niepce - Chalon
7	FINELLE Elise, LENGLOIS Bastien, BAROZET Marie	2nde 6	Carnot - Dijon
8	BARJOLIN Mélanie, DUBECQ Léa, SANCHEZ Megan	2nde 2 10	Janot – Sens
9	BALLIGAN Rémi, BALZER Louis	2nde 2	Charolles
10	LELANDAIS Hugo, PERDEREAU Jade, PUJOL Nassim	2nde 1 2	Charles de Gaulle - Dijon
11	GASPARD Léo, COUDERT Philippe	2nde 2	Saint Cyr - Nevers
12	PAUTRAT Rémy, BOISSEAU Pierre, JALLET Hugo, JUSSIAU William	2nde 1	Brochon
13	BOULARDOT Luc, PARRIAUX Alexandre, BRÜTT Cécile, GERACI Laure	2nde 3	Eiffel – Dijon
14	LEFORT Nadège, DAVANTURE Laura, LEPAGNOLE Juliette	2nde D	Marey - Beaune
15	HERMAND Pauline, MALYSZKO Justyna, PICOCHE Guillaume	2nde 12	Charles de Gaulle - Dijon
16	BUSSIERE Florian, MARTIN Théo	2nde 1 MPI	R. Rolland - Clamecy
17	JAMBON Lucille, MARONNAT Pauline, SABBE Clémentine	2nde 3	Pontus de Thiard – Chalon
18	DEMOUTE Franck, DUCOUX Thomas, VIAULT Simon, SAUDRAIS Florent	2nde 10	J. Amyot - Auxerre
19	ZACCHI Anthony – BUSSY Florian – RIEHL Emilie	2nde 4	Tonnerre
20	BEGEY Romain, BOUCHE Léopold, CHAMBON Maxime, MOURRAL Victor	2nde 2 3	Cluny

Première

1	GIROUD Paul, JAUROU Lucas, DURANTE Samuel, SITARZ Wojciech	1eS 10	Charles de Gaulle - Dijon
2	VOISSIER Benjamin, ZHAO Dongjian, BELLEVILLE Isadora	1eS 6	Carnot – Dijon
3	AUBERT Kévin, JARLAUD Quentin, LAISSUS Pierrick, LESNIEWSKA Charles	1eS 1	Eiffel – Dijon
4	BAILLY Corentin, DUPONT Maxime, MARTEL Guillaume, MOREAU Valentin	1eS 1	Sens
5	BACKSCHEIDER Emilie, DIDIER Benoît, PONCET Maxime	1eS	Chevigny St Sauveur
6	BAILLOU Renaud, PAGAND Thibault, VALENTIN Antoine	1eS 3 4	Eiffel – Dijon
7	METSCH Ivo, MARCHER Maxime, JAGOURY Rodolphe	1eS	R. Rolland – Clamecy
8	MOUGEOT Caroline, MORET-TESSIER Sophie, GAUTREAU Clément, HOSSAIN SAIB Ruby	1eS 1 3 4	Eiffel – Dijon
9	GLIKOU Vincent, AMMARI Najib, KACHIN Samir	1eS A B	Le Castel - Dijon
10	COURSOLLE René-Yves, JEANNOT Sylvain, BROCHET Laurent, DE CHATELPERRON Marie	1eS 1 2	St Cyr - Nevers
11	GAUTHIER Anne-Sophie, JANDOT Camille, ROYER Cindy, ROPERT Sylvain	1eS 1	J. Renard - Nevers
12	HAMMEL Clément, DUMARET Nicolas, BLOT Guillaume	1eS SI	Le Creusot
13	SCHALLER Alexis, DOVEZE Yohan, MAILLOT Jérémy, RENAUDET Damien	1eS 1	Tonnerre
14	FROMENTOT Damien, LEMAISTRE Julien, GRGURIC Pierric, PAUL Marvin	1eS 1 2	Joigny
15	SULTAN Charla, GERMAN Nicolas	1eS	Semur

Terminale

1	BARRY Fatima, LI Yuhua, LETOUZ Nicolas	TS 3 4	Carnot – Dijon
2	Equipe DUCLOS Valérian… (6 élèves)	TS 2	Lamartine - Macon
3	MORIN-MARTIN Kévin, VINCENT Fanny, BUSSO Marianne, TASSAEST Maxime	T 10 S	Charles de Gaulle - Dijon
4	TAINTURIER Benjamin, MOURTADA Ismaïl, KOHLI Mathieu, LACOUTURE Etienne	TS 1	Carnot – Dijon
5	ROPITEAUX Théo, GOICHOT Antoine	TS 2	H. Fontaine - Dijon
6	ROSIAK Valentin, CORRADINI Sébastien, JESUDASAN Christine	TS 4	Sens
7	FOIADELLI Benoît, PEILLARD Etienne	TS 1	H. Fontaine - Dijon
8	DESCHAMPS Benjamin, BAFLAST Hadrien	TS 3	Militaire - Autun
9	LE François, FISCHER Kilian, LUCAT Antoine, SIRUGUE Jérémy	TS 5	Brochon
10	Equipe PIRODDI Simon (5 élèves)	TS 1 2	Mathias - Chalon
11	RIBEIRO Jimmy, SALVANT Bastien, RAVOT Charlotte, LEROY Jonathan	TS 2 3	A. Colas - Nevers

Élèves cités, non récompensés

Seconde

1	GUIMARD Charlène, HERARDOT Elise, CADOR Jimmy, CATHELIN Elise	2nde 1	Clamecy
2	TARDIVON Audrey, DE SOUZA Moro	2nde 1	Clamecy
3	LEPLAT Eric, SPERANZA Douide, GOUACHE Corentin, BUSSEREAU Guillaume	2nde 1	Clamecy
4	SIMONNET Romain, MILLERAND Gaëtan	2nde 2	Charles de Gaulle - Dijon
5	BOULLEY Isabelle, LECOMTE Antonin, RENOUARD A.	2nde 6	Sens

6	Equipe FEDELE Alison (5 élèves)	2nde 5 6	Le Creusot
7	CREUSVAUX Paul, BOLLOTTE Florian, HAZHAZ Ihssan, LAGRANGE Maxime	2nde 6	Eiffel - Dijon
8	JANNECE Maxime, VIMONT Thomas, TAYLOR Adrian, LAURENT Alexis	2nde 6	Eiffel - Dijon
9	NADISIC Nicolas, RAVRY Bastien, PLIMMER Benjamin, LE MOUILLOUR Rémy	2nde 6	Eiffel – Dijon
10	LIODENOT Manon, BOUTELOUP Julien, LAUPRÊTRE Nathan	2nde 2 6	Charolles
11	GROTELLIER Alex, MIJIEUX Thomas	2nde 2	Cluny
12	BRIGAND Paul, BEDNARCZYK Maciej	2nde 5	Charles de Gaulle - Dijon
13	MONTISESCI Giulo, VERNUSSE Paul, CREACH Adrien	2nde 5	Lamartine - Macon
14	MICHON Lucie, COSTA Pauline, VECHAMBRE Solène	2nde 5	Lamartine - Macon
15	KALKAN Sebil, DUMAS Marine	2nde 9	Lamartine - Macon
16	BIZOT C., BORNIER L., MAZUIR N., LE DISCORD O.	2nde 6	Sens
17	MARTIN Raphaël, CHABEUF Julien	2nde E	Le Castel - Dijon
18	BATISTA Cécilia, LAFOI Maxime, MARTIN Florian	2nde 4 5	Tonnerre
19	FILLOD M., DELACROIX B., BOUILLER M., REMIOT C	2nde 6	H. Fontaine - Dijon
20	PELLOUX Thomas, VELON Alexandre, GENTIL Paul, PILLOT Adrien	2nde 5	Clos Maire - Beaune
21	RAVERY Anne-Sophie, CABARAT Anne-Lou, AVALLONE Laurine, BLEMUS Marie	2nde7	J. Renard – Nevers
22	BERDAD Nassima, GOIN Jean-Baptiste	2nde3	Parriat - Nevers
23	SOUVRE Valentin, VINCENT Pierre-Louis, MIGNOT Eva, VUILLEMOT Cassandre	2nde 4	Tournus
24	DEPUIS Alexis, AVELINE Moranne	2nde 1	Parc des Chaumes - Avallon

Première

1	BEDERT Valentin, EL YAAKOUBI Serge, CHOUILLER Quentin	1eS 6	Carnot – Dijon
2	CAILLATE Rémy, OUIN-LAGARDE Thomas, SAGOT François, REYMOND Matthieu	1eS 2	Carnot – Dijon
3	VANIER Valère, MALY Daniel, DEKEYSER Sébastien	1eS 4	Carnot – Dijon
4	DÔ Clara, POINTECOUTEAU Marie, BIARD Mathilde, BOUCHER Héléna	1eS 3 1	J. Renard - Nevers
5	CLEMENT Adrien, GAILLARD Corentin	1eS 2	Le Creusot
6	ACOCA Fédora, COLAS Clément, COURVOISIER Antoine, MALOT Loïc	1eS 10	Charles de Gaulle - Dijon
7	LEGRAND Yann, SUINOT Audrey	1eS 1 2	Tonnerre
8	ROUZEAU Marie-Charlotte, JULIEN Geoffroy	1eS 2	Clamecy
9	LEGRAND Laëtitia, PILATO Mathieu, EBEL Florian	1eS 3	Eiffel - Dijon
10	BROYOT Lauriane, LEBLANC Anaïs, CHARLOT Tifanny, LAURENT Adeline	1eS 4	Eiffel - Dijon
11	BREUIL Julien, AUGER Benjamin, JANVIER Sébastien	1eS	Eiffel - Dijon
12	MAUGUIERE Julie, MONCHY Léa, PLAIS Louise	1eS	A. Colas - Nevers
13	MESNY Emmanuel, MORISSON Julien, RICHARDOT N.	1eS 3	Joigny
14	SCHOUMAKER Florane, FEVRIER Valentin	1eS A B	Le Castel - Dijon
15	PICARD Valentin, HUARD Alexis, CHEVROT Antoine, FOUQUET Kévin	1eS 2	Niepce - Chalon
16	BARBIER Jean-Félix, BARTOLI Marc, FERNOUX Dimitri	1eS 1	Lamartine - Macon

Terminale

1	EL BARAKA Tarik, LAJUGIE Laurent, TISLER Jiry, ADELINE Jonathan	T S 6	Carnot – Dijon
2	DE CAMARET Guillaume, TOURNIER Laurence	TS 1	Carnot - Dijon

3	BADEY Ludivine, PIOT Marina, GIRARD Audrey, MARTIN Jimmy	TS 3 4	Lamartine - Macon
4	BOBIN Marine, BUTEAU Antoine, LAUDE Wendy, MOREL Fanny	TS 3	J. Renard - Nevers
5	MONTEL Alexandre, LEBAS Charlène	TS 3	J. Renard - Nevers
6	GAUGY Grégory, CHARRON Etienne, POTTIER J.-Bapt.	TS	Tonnerre
7	PETIT Benjamin, BALLET Antoine	TS 4	Brochon
8	CLERGUE Virginie, GIRAUDET Marie-Charlotte, MATHEUX Alice, SEREIN Delphine	TS	Charles de Gaulle - Dijon
9	Equipe PARNASO Antoine … (5 élèves)	TS 4	Eiffel - Dijon
10	CHAMUSSY Thibaud, COLOMBAT Sébastien, MARIC Zacharie, GIRARDET Arthur	TS	Eiffel - Dijon
11	COLIN Piere-Paul	TS	Clamecy
12	CHALENDARD Valentin, CODRON Marie, SCOTT Benjamin, DEVEUVE Quentin	TS 3	A. Colas - Nevers
13	HERMERY Laëtitia, MULLER Quentin, VIDAL Thomas, RAZAFINIMANANA Jonathan	TS	A. Colas - Nevers
14	JACQUEL Pierre	TES 5	Pontus de Thiard - Chalon
15	ROBINOT Maxime, IWA Thommy, BETTINGER Quentin, MEUNIER Olivier	TS 1	H. Fontaine - Dijon
16	WAEBER Nicolas, DELPEUCH Antonin, PROST Quentin, CHARVET Quentin	TS SI	Cluny
17	CHAUVET Antoine, PEROUX Gaëtan	TS 2	Niepce - Chalon
18	BUSSEUIL Quentin, DE CARLI Cyril	TS 2	E. Gauthey - Chalon
19	SCHULTHEISS Marc-E., MUNIER Clément	TS 2	Chevigny St Sauveur
20	LASSUS Alexis, BONNET Mélanie, JEAN Céline, MONTNENFAR Adrien	TS 1 2 T STG 2	Decize
21	SIXT Thibault, DUBOIS Tristan	TS	Saint Cœur - Beaune

6. LE CORRIGÉ.

1. EMPORTÉS PAR LA POULE.

2010 joueurs participent à un tournoi de tennis. À chaque tour un tirage au sort constitue un maximum de poules de trois joueurs, et les joueurs restants (s'il y en a) sont qualifiés d'office pour le tour suivant. Dans chaque poule, chaque joueur affronte les deux autres joueurs de la poule, et les deux premiers sont qualifiés pour le tour suivant. *(On fait en sorte que dans chaque poule il y a un perdant éliminé par les deux autres).* L'élimination se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux joueurs, qui sont départagés au cours d'une unique partie finale.

Combien de parties au total sont jouées dans ce tournoi ?

<u>Commentaire</u>

96% des équipes de seconde, à qui était proposé cet exercice simple, se lancent dans la poule. Avec une réussite correcte, puisque 36% des équipes concernées trouvent la bonne réponse. Un simple décompte scrupuleux des équipes restantes à chaque tour permettait d'arriver à la solution 6025 (voir solution laborieuse). Quelques rares équipes plus futées pensent à la solution rapide.

<u>Solution rapide.</u>

Chaque poule de 3 joueurs élimine un joueur et un seul, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que 2.
Pour déterminer le vainqueur, il faut donc organiser 2008 poules de 3 joueurs, et ajouter une partie supplémentaire : la finale.
Le nombre total de parties est donc $2008\times3+1$. Il y a donc **6025** parties au total.

<u>Solution plus laborieuse</u>

On peut compter en détail pour chaque tour les nombres voulus jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 joueurs. Voici les résultats, qui peuvent être facilement obtenus avec un tableur.

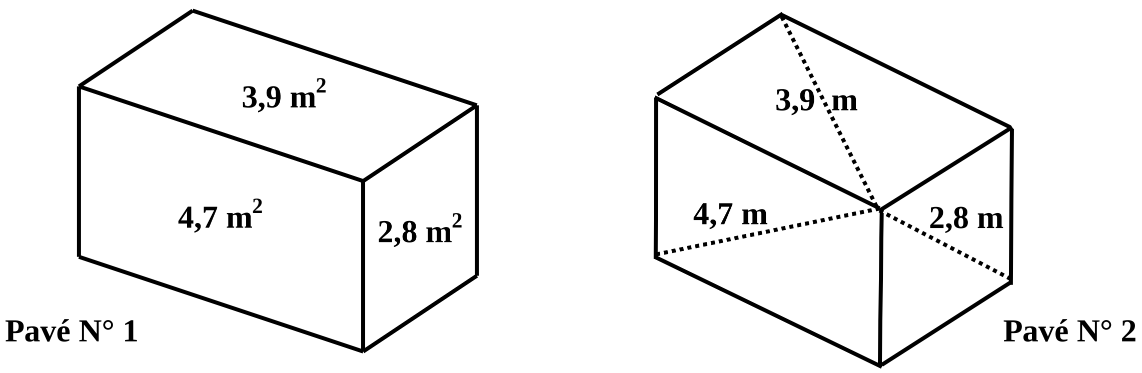
Nombre de joueurs restants	**Rang du tour**	**Nombre de poules**	**Joueurs qualifiés d'office pour le tour suivant**	**Nombre d'éliminés**	**Joueurs restants après le tour**	**Nombre de parties**
2010	1er	670	0	670	1340	2010
1340	2e	446	2	446	894	1338
894	3e	298	0	298	596	894
596	4e	198	2	198	398	594
398	5e	132	2	132	266	396
266	6e	88	2	88	178	264
178	7e	59	1	59	119	177
119	8e	39	2	39	80	117
80	9e	26	2	26	54	78
54	10e	18	0	18	36	54
36	11e	12	0	12	24	36
24	12e	8	0	8	16	24
16	13e	5	1	5	11	15
11	14e	3	2	3	8	9
8	15e	2	2	2	6	6
6	16e	2	0	2	4	6
4	17e	1	1	1	3	3
3	18e	1	0	1	2	3
					Total	**6024**

Si l'on rajoute la finale (une partie), il y a donc **6025** parties.

2. HISTOIRE EN DEUX VOLUMES.

Dans le premier pavé droit ci-dessous, on connaît les aires de 3 faces, et dans le second pavé droit, on connaît les mesures des diagonales de 3 faces.

Quel est le pavé qui a le volume maximal ?



Commentaire

67% des équipes de seconde abordent cet exercice, avec une bonne réussite puisque 45% des équipes concernées trouvent la bonne réponse.

Si beaucoup d'équipes ont précisé que le pavé n° 2 a le plus grand volume, les justifications n'ont pas toujours été correctes. Ainsi, nous avons souvent lu le pseudo-argument suivant : un rectangle de diagonale d a une aire supérieure à d m²…

Solution

Notons a, b et c les dimensions des pavés, V_1 et V_2 leurs volumes.

Pavé n° 1

L'énoncé nous conduit au système $\begin{cases} ab = 4{,}7 \\ ac = 2{,}8 \\ bc = 3{,}9 \end{cases}$ d'où par produit

$$a^2b^2c^2 = V_1{}^2 = 51{,}324 \Leftrightarrow \boldsymbol{V_1 = \sqrt{51{,}324}}.$$

Pavé n ° 2

Par application du théorème de Pythagore, l'énoncé nous conduit au système $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4{,}7^2 \\ a^2 + c^2 = 2{,}8^2 \\ b^2 + c^2 = 3{,}9^2 \end{cases}$.

Par soustraction des deux premières équations, on obtient $b^2 - c^2 = 14{,}25$ d'où $\begin{cases} b^2 - c^2 = 14{,}25 \\ b^2 + c^2 = 15{,}21 \end{cases}$.

Par addition, on récupère $b^2 = \dfrac{14{,}25 + 15{,}21}{2} = 14{,}73$.

En suivant des raisonnements analogues, on obtient $a^2 = 7{,}36$ et $c^2 = 0{,}48$.

On en déduit $a^2b^2c^2 = V_2{}^2 = 52{,}038144 \Leftrightarrow \boldsymbol{V_2 = \sqrt{52{,}038144}}$.

Finalement, on a prouvé que le volume du pavé n° 2 est supérieur à celui du pavé n° 1.

3. DIGNES ET INDIGNES.

2010 personnages sont assis en rond, leur regard est tourné vers le centre. Il y a des Dignes, qui disent toujours la vérité et des Indignes qui mentent toujours. Chaque personnage affirme que les deux voisins assis à sa droite sont des Indignes.

Combien y a-t-il de Dignes dans cette ronde ?

Commentaire

86 % abordent cet exercice, 51% trouvent la bonne réponse avec des arguments…
Curieusement, quelques équipes ont fait intervenir des personnages qui disaient PARFOIS la vérité. Dans ces conditions, on ne peut évidemment rien tirer d'une affirmation d'un tel personnage.

Solution

Il ne peut pas y avoir que des Indignes autour de la table, sinon ils diraient tous la vérité !
Il y a donc au moins un Digne qui dit avoir (et c'est vrai) deux Indignes à sa droite selon le schéma D I I X --- avec D pour Digne et I pour Indigne.
Qui est X ? Pas un Indigne, sinon l'Indigne juste à droite de D dirait la vérité. Donc X est Digne.
On a donc le schéma périodique D I I D I I D I I D ---
Mais attention, la table est ronde et il faut que cela se referme !
Heureusement 2010 est multiple de 3 et on se retrouve avec le personnage numéro 2008 qui est Digne avec
Deux Indignes à sa droite et la boucle est bouclée.
Un tiers exactement des personnages soit 2010 / 3 = **670 sont Dignes**.
Insistons bien sur le fait qu'il y aurait une contradiction avec un nombre de personnages non multiple de 3.

4. QUOI DE NEUF ?

On ajoute les entiers **9**, **99**, **999**, **9999**, etc. jusqu'à l'entier composé de **999** fois le chiffre **9**. Quelle est la somme des chiffres du résultat ?

<u>Commentaire</u>

Ce problème a été abordé par environ quatre équipes sur cinq, avec une réussite décevante, puisque seulement une équipe sur cinq parvient à la bonne solution 999. Beaucoup d'équipes se contentent de montrer que le nombre cherché est multiple de 9, d'autres en concluent (à tort) que ce nombre est égal à 9. La solution demandait simplement de remarquer que chaque terme de la somme est égal à une puissance de dix diminuée d'une unité.

<u>Solution</u>

Il faut penser à écrire chaque terme de la somme à l'aide des puissances de dix :

$9=10-1$; $99=10^2-1$; $999=10^3-1$; etc.

Ainsi la somme s'écrit

$$S = 9 + 99 + \cdots + \underbrace{9\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9}_{999\text{ chiffres }9} = (10-1) + (10^2-1) + \cdots + (10^{999}-1),$$

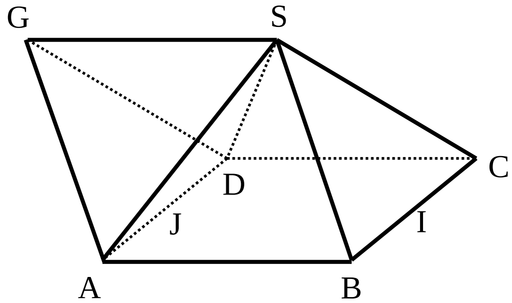
soit $S = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots 1}_{999\text{ chiffres }1}0 - 1000 + 1 = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots 1}_{996\text{ chiffres }1}0111$.

La somme S s'écrit avec 999 chiffres 1 et un chiffre 0.
La somme des chiffres est donc **999**.

5. LE COLLAGE DE MATHUSALITCH.

Le sculpteur moderne Mathusalitch (1515-2009) a réalisé son œuvre célèbre intitulée "***Pentaèdre***" en collant face contre face une pyramide à base carrée, dont toutes les arêtes ont pour longueur 1 mètre, et un tétraèdre régulier d'arête 1 mètre.

Justifier le titre de l'œuvre.



<u>Commentaire</u>

79% des équipes examinent la sculpture avec une bonne réussite, puisque 57 % des équipes concernées
trouvent la bonne réponse.

Si beaucoup d'équipes ont donné une explication correcte du titre de l'œuvre, seulement trois ont réussi à justifier qu'elle ne comporte que cinq faces. L'erreur courante a été d'utiliser – inconsciemment – que les arêtes [GS] et [AB] sont parallèles (voir figure ci-dessous) pour prouver que les points G, S, A et B sont coplanaires !

<u>Solution 1</u> (avec plan médiateur)

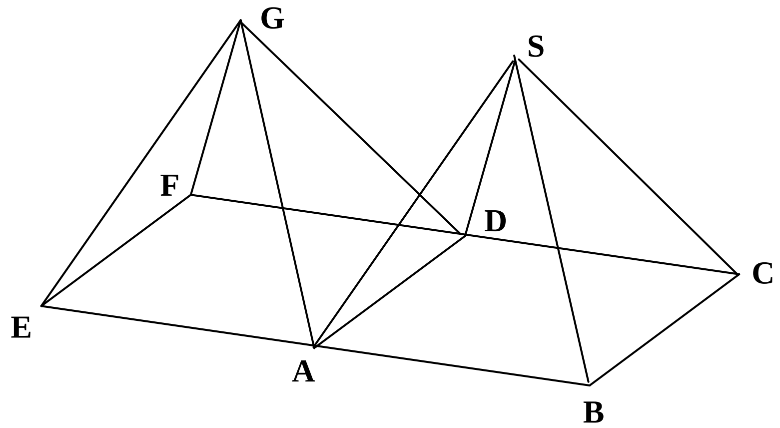
A première vue, ce polyèdre semble posséder 7 faces et devrait s'appeler "*Heptaèdre*"…

En fait, il s'agit bien d'un solide à 5 faces. Pour le prouver, montrons que les points G, S, A et B sont coplanaires.

Considérons le plan médiateur de [BC], qui est aussi celui de [AD]. Il est clair que S et G sont dans ce plan médiateur (car équidistants de A et D). Si on note I et J les milieux respectifs de [BC] et [AD], alors I, J, G et S sont coplanaires ce qui implique que GSIJ est un parallélogramme (côtés opposés de même longueur), donc (GS) parallèle à (IJ).

On en déduit que (GS) est parallèle à (AB), donc G, S, A et B sont coplanaires : GSBA est une face du polyèdre. GSDC aussi.

Solution 2 (sans plan médiateur)
Juxtaposons deux pyramides régulières à base carrée identiques, comme dans la figure ci-dessous :



L'image de la pyramide SABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est la pyramide GEADF. En particulier, l'image du sommet S est le sommet G ce qui implique que SBAG est un parallélogramme. A, B, S, G sont donc coplanaires.
Il suffit maintenant de prouver que le tétraèdre ADSG est régulier !
AS = AG = GD = DS = 1 m. car ce sont des arêtes des pyramides.
D'autre part, GS = AB = 1 m grâce à la translation précédente, ce qui prouve que ADSG est régulier.

6. DURE DURE LA CLÔTURE.

Gaston rédige son testament : il désire léguer à ses deux enfants son champ clos, qui a la forme d'un triangle équilatéral de **2010** mètres de côté.

Peut-il partager ce champ en deux parcelles de même aire à l'aide d'une ligne de séparation mesurant moins de **1360** m ?

Commentaire
71 % des équipes étudient le partage, mais faute d'une bonne compréhension du texte, seules 4 % des équipes trouvent une bonne réponse.

Hélas, 1360 fois hélas, la plupart des candidats ont considéré que LIGNE signifiait ligne DROITE.
Dans ces conditions, tout essai est voué à l'échec comme peu de candidats l'ont prouvé.
Une démonstration est faite à la fin.

Solution
En fait la bonne idée est de considérer un arc de cercle centré en un sommet comme sur la figure 1.
Choisissons le rayon R pour avoir deux domaines de même aire.
L'aire du triangle (ABC) vaut $2010^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc celle du secteur (AED) vaut la moitié soit $2010^2\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ainsi, $\pi\frac{R^2}{6} = 2010^2\frac{\sqrt{3}}{8}$ d'où l'on tire $R^2 = \frac{3\times 2010^2\sqrt{3}}{4\pi}$ (1)

Donc la longueur L vaut $L = \frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3}$ ou encore pour utiliser (1) :

$L^2 = \dfrac{\pi^2 R^2}{9} = \dfrac{2010^2\sqrt{3}}{12}\pi \approx 1831982{,}7$ soit $L \approx 1353{,}5$ qui est bien <u>plus petite que 1360</u>.

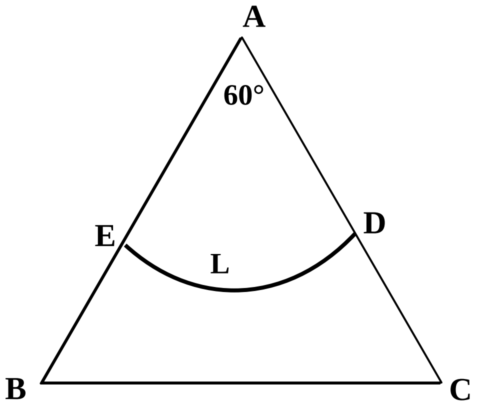


Figure **1**

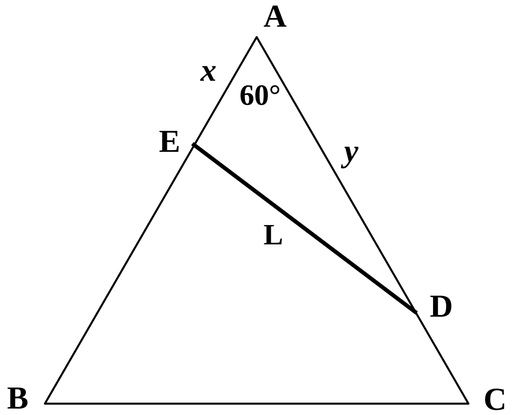


Figure **2**

Dans la situation de la figure 2, on aurait
$L^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy\cos(60°) = x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2 - 2xy + xy = (x-y)^2 + xy \geq xy$.

Le produit xy doit donc être inférieur ou égal à $1360^2 = 1849600$ (1)

Mais l'aire du triangle (ABC) vaut $2010^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ donc celle du triangle (AED) vaut la moitié soit $2010^2\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. À partir de aire (ADE) = $\dfrac{1}{2}x\,y\sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}xy$, on tire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy = 2010^2\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
soit $xy = 2020050$ ce qui est en contradiction avec (1).

On peut dire aussi que tout segment partageant le triangle en deux domaines de même aire mesure au moins $\sqrt{2020050} \approx 1421{,}28$ m.

7. LE SURDOUÉ.

Gaston est un surdoué du calcul mental. Aussi tout le monde lui pose des colles. Son voisin a trouvé un moyen de piéger Gaston. Il lui pose le problème suivant :
"Le produit des âges de mes **3** sœurs est **72**, et leur somme est égale à ton âge. Quels sont les âges de mes sœurs ? "
Cette fois, Gaston est incapable de répondre.

Quel est l'âge de Gaston ?

Commentaire

Ce problème simple a bien inspiré les compétiteurs, puisque 96 % des équipes l'abordent. La bonne solution (14 ans) est d'ailleurs bien trouvée (par trois équipes sur cinq), mais avec parfois une erreur de raisonnement, ou simplement des oublis dans les âges possibles des trois sœurs. En particulier, on oublie parfois que deux des sœurs peuvent avoir le même âge, ou que certaines d'entre elles peuvent avoir 1 an.

Solution

Notons *a*, *b*, *c* les âges des trois sœurs, avec $a \leq b \leq c$ et $n = a + b + c$ l'âge de Gaston.
D'après la décomposition de 72 en facteurs premiers $72 = 2^3 \times 9$, on peut récapituler toutes les possibilités pour *a*, *b*, *c* dans le tableau suivant :

a	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
b	1	2	3	4	6	8	2	3	4	6	3	4
c	72	36	24	18	12	9	18	12	9	6	8	6
n	74	39	28	23	19	18	22	17	15	14	14	13

Gaston connaît son propre âge, et il est surdoué. Il a donc pu constituer un tableau analogue.
Dans presque tous les cas, l'âge de Gaston induit de façon unique les âges des trois sœurs. (Exemple : si Gaston a 19 ans, il est sûr que les âges des trois sœurs sont respectivement 1, 6 et 12 ans.)
Comme Gaston est incapable de répondre, c'est qu'il se trouve dans le seul cas où il y a deux possibilités.

Conclusion : **Gaston a 14 ans**.
On ne connaît pas avec certitude les âges des sœurs, elles peuvent avoir 2, 6, et 6 ans, ou bien 3, 3, et 8 ans.

8. LA PUISSANCE DES NOMBRES.

Chacun sait que **$4151 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5$.**
On dit qu'un nombre entier est puissant, s'il est égal à la somme de tous ses chiffres, chacun d'eux étant élevé à une même puissance. Ainsi le nombre 4151 est puissant.
Gaston est fier : il a trouvé un nombre puissant de 7 chiffres : **9 9 • • • 1 5**.
Hélas, il a oublié de le noter, et ne se souvient plus des trois chiffres du centre.

Quel est ce nombre ?

Commentaires

Cet exercice est le mieux réussi : 87 % des équipes de Première ou Terminale (seules concernées) l'abordent, et 83 % apportent la bonne réponse. Notons que beaucoup d'entre elles n'ont fait que préciser quel était le nombre puissant cherché sans aucune explication sur leur copie…

Solution

1ère étape : trouvons la puissance
$9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 9^6 + 1^6 + 5^6 = 2\,672\,831 = 9\,900\,015$, donc la puissance est supérieure à 6.
$9^8 + 9^8 + 0^8 + 0^8 + 0^8 + 1^8 + 5^8 = 86\,874\,694 = 9\,999\,915$, donc la puissance est inférieure à 8.

Finalement **la puissance est nécessairement 7**…

<u>2nde étape</u> : trouvons les chiffres manquants notés x, y et z (dans un ordre quelconque).
$9^7 + 9^7 + 1^7 + 5^7 = 9\,644\,064$, donc $x^7 + y^7 + z^7 < 9\,999\,915 - 9\,644\,064$, ou encore :
$\boldsymbol{x^7 + y^7 + z^7 < 355\,851}$.
$7^7 = 823\,543$, donc aucun des chiffres n'est égal à 7, 8 ou 9.

$9^7 + 9^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 1^7 + 5^7 = 9\,878\,439 < 9\,900\,015$, donc l'un au moins des trois chiffres est égal à 6.

Cependant, $2 \times 6^7 > 355\,851$ donc il ne peut y avoir deux chiffres égaux à 6.
Posons par exemple $\boldsymbol{x = 6}$.

On a donc $9^7 + 9^7 + 1^7 + 5^7 + 6^7 = 9\,924\,000$ d'où $y^7 + z^7 < 75\,915$.

Comme la somme de tous les chiffres du nombre, élevés à la puissance 7, se termine par 15 et que d'autre part, $9^7 + 9^7 + 1^7 + 5^7 + 6^7 = 9\,924\,000$ alors la somme $y^7 + z^7$ se termine nécessairement par 15.
Le tableau suivant (obtenu à l'aide d'un tableur) donne, en fonction des valeurs possibles pour y et z (compris entre 0 et 5) la somme $y^7 + z^7$:

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	128	2187	16384	78125
1	1	2	129	2188	16385	78126
2	128	129	256	**2315**	16512	78253
3	2187	2188	**2315**	4374	18571	80312
4	16384	16385	16512	18571	32768	94509
5	78125	78126	78253	80312	94509	156250

On a obligatoirement $\boldsymbol{y = 2}$ **et** $\boldsymbol{z = 3}$.

Finalement, comme $9^7 + 9^7 + 1^7 + 5^7 + 6^7 + 2^7 + 3^7 = 9\,926\,315$, les chiffres manquants sont, dans l'ordre : 2, 6 et 3. Le nombre puissant qu'a trouvé Gaston est **9 926 315**.

9. LE TRÉSOR DU CAPITAINE.

Le capitaine a enterré un trésor juste au milieu de deux arbres, chacun situé sur un des deux côtés opposés d'un champ. Ces côtés mesurent **90** m et **100** m, et font entre eux un angle de **30** degrés.
Les arbres ont depuis longtemps disparus.

Quelle surface minimale doit-on creuser pour être sûr de trouver le trésor ? Quelle est l'aire de cette surface minimale ?

<u>Commentaire</u>
Si deux tiers des équipes abordent cet exercice, seules 17 % trouvent la bonne réponse avec une bonne explication…

Solution

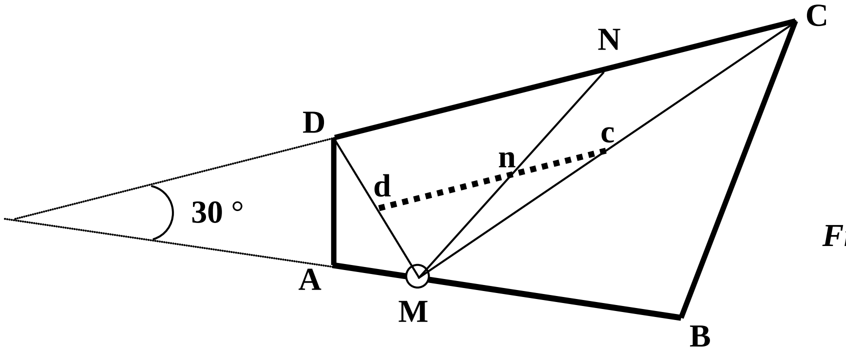


Figure 1

Si l'arbre sur le segment [AB] est disons en M, et l'autre arbre variable sur le segment [CD], le trésor peut être n'importe où sur le segment [cd], parallèle à [CD] et moitié moins long (en pointillé sur la figure 1).

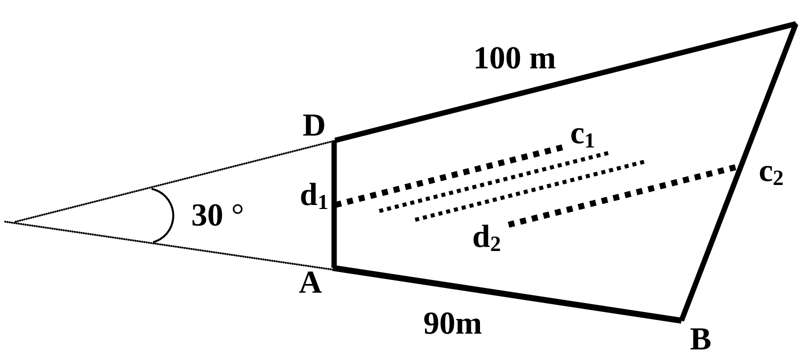


Figure 2

Lorsque M varie de A à B, le segment [cd] des emplacements possibles du trésor varie lui aussi de $[c_1d_1]$ à $[c_2d_2]$ [Figure 2] où d_1 est milieu de [AD] et c_2 est milieu de [BC].
Or $[c_1d_1]$ est parallèle à $[c_2d_2]$ car ils sont tous deux parallèles à [CD], de plus ils ont même mesure (la moitié de CD).
Donc le trésor est quelque part **dans le parallélogramme** $[c_1d_1c_2d_2]$.
$[c_1d_1]$ mesure 50 m (la moitié de 100 m) et $[d_1d_2]$ mesure 45 m (la moitié de 90 m) puisque d_1 est milieu de [AD] et d_2 est milieu de [BD].

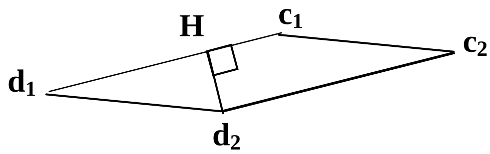


Figure 3

Dans le parallélogramme, l'angle en d_1 mesure 30° par hypothèse, donc la hauteur d_2H (Figure 3) mesure d_1d_2 sin(30°) et l'aire du parallélogramme est donc de $50 \times 45 \sin(30°)$ = **1125 m^2**.

FIN

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

REGION DE BOURGOGNE

TEXAS INSTRUMENTS

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public