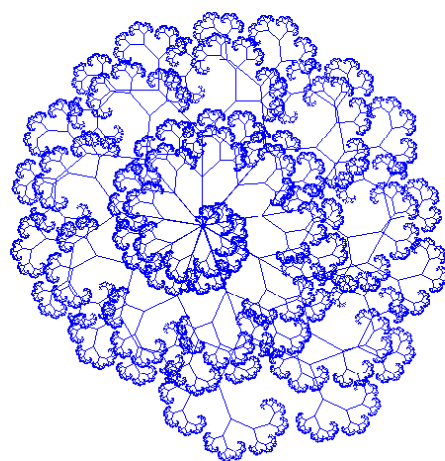


Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ *Les formules de Bretschneider, Coolidge et Bramagupta*
- ✓ *Courbes de Bézier quadratiques et arcs coniques*



Une fractale, réalisée en Xlogo

© *Irem de Dijon – 2009*

Sommaire

- ✓ Agenda 1
- ✓ Jeux et Problèmes 5

Articles

- ✓ Les formules de Bretschneider, Coolidge et Bramagupta 9
Michel LAFOND
- ✓ Courbes de Bézier quadratiques et arcs coniques 17
Lionel GARNIER

Éditorial

Réformette...

Où l'ai-je entendu, déjà ? Je n'arrive plus à me le rappeler, mais je dois avouer que je m'attendais plutôt à la vieille antienne "la montagne a accouché d'une souris" ; comme quoi, les formules toutes faites ne sont plus ce qu'elles étaient (ou alors, je ne lis plus les bons journaux). En tout cas, pour la première fois, le contenu d'une réforme dans l'Education nationale a été annoncé par le Président en personne, cela faisait beaucoup de cérémonial pour finalement peu de choses ! Est-ce par prudence ? Possible, si le gouvernement veut éviter le retour des lycéens dans la rue (mais la grippe A aurait pu s'en charger...)

Ce qui est dommage, c'est que nous passons à côté d'une bonne occasion de changer le lycée ; même si tout le monde ne s'était pas mis d'accord sur les propositions de l'automne 2008, il était généralement admis qu'une réforme est nécessaire, et même urgente, au regard de l'état actuel de cette institution. Je n'évoque même pas le cas du Baccalauréat.

Donc ce que nous avons récolté se résume à peu de choses : un nouveau programme de mathématiques dont la forme porte en elle-même la nouveauté, et la certitude de voir les horaires encore diminuer, c'est-à-dire le nombre de postes (car les heures d'aide généralisées seraient bien sûr effectuées en HSE, sur la base du volontariat et se retrancheraient des heures actuelles des classes). Le nouveau programme de mathématiques n'est donc pas la pire nouveauté de cette année : suffisamment ouvert et interprétable, il nous permet de ne plus être chargés de la mission impossible d'enseigner à tous les élèves des notions qui en dépassent beaucoup (pour lesquels la quantité de travail nécessaire à l'appropriation des notions et des techniques

est de toute façon trop importante, car supérieure à 0 ; j'exagère ?) De plus, les contenus ne sont plus une priorité : on sort de l'hypocrisie, ou bien on s'adapte aux réalités d'aujourd'hui, ce qui finalement revient presque au même !

Mais quelle est cette petite voix ? Elle me dit "Eh ! Dis donc, Métin, on t'a pas demandé une tribune sur tes états d'âme, mais un édito pour la **Feuille de Vigne**, tu sais ? L'IREM de Dijon. Voilà, c'est ça." Me serais-je laissé aller ?

J'en suis désolé, surtout que ce numéro présente des articles qui vont largement dans le sens des contenus nouveaux : Alain Mascret ne montre-t-il pas des constructions de fractales en référant le site du groupe géométrie de l'IREM ? Il y a de l'algorithmique et du Logo là-dessous, alors rendez-vous sur le site en question : de toute façon, on va tous y passer.

Jetez un coup d'œil sur l'article de Lionel Garnier (un jeune homme qui mérite d'être connu, car il travaille dans un domaine qui a le vent en poupe et qui inspirera aussi les futures réformes, la mouvance "math et technologie") et sa présentation (à suivre) des courbes de Bézier.

Je me garderai d'oublier Michel, notre Michel, le Michel (Lafond), et son esprit éveillé, qui, outre les Jeux et Problèmes de ce numéro, nous offre de nouveaux noms/théorèmes sur les quadrilatères convexes. Faites pas les malins : franchement, qui connaissait le nom de Bretschneider¹ ? Bonne lecture !

Frédéric Métin.

¹ Pour ma part, j'avais confondu avec Brett Sinclair.

Agenda

10 décembre 2009 : 1^e journée de formation

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : "*La tradition géométrique arabe : du savoir-faire au savoir savant*" – *Ahmed DJEBBAR*, Professeur à l'Université de Lille.

Objectifs de la formation :

Apports de connaissances sur les mathématiques arabes, avec un regard particulier sur la géométrie dans l'espace, tout spécialement les textes d'architecture d'al Kashi, (dans leur première traduction en français).

Travail épistémologique et mathématique d'analyse des textes pré-cités.

Contenus :

La conférence présentera, en premier lieu, les sources de la géométrie arabe qui se répartissent en deux catégories : celles que l'on pourrait qualifier de « problèmes théoriques » et qui ont été transmis à travers des textes dont les auteurs sont généralement bien identifiés, et celles qui sont du domaine pratiques et dont les origines sont incertaines.

Dans une seconde partie, seront exposés les éléments essentiels des deux grandes orientations de la géométrie arabe : une géométrie savante qui se développe pour elle-même ou pour répondre aux besoins d'autres disciplines comme l'algèbre, la trigonométrie, l'astronomie et la physique. Et une géométrie appliquée constituée d'un ensemble de procédures visant à résoudre des problèmes concrets que posaient les activités quotidiennes des sociétés de l'empire musulman : arpentage pour la détermination de l'assiette de l'impôt, décoration, architecture, découpage pour la répartition des héritages, etc.

Dans une troisième partie, seront présentés les éléments connus de la circulation d'une partie de la géométrie produite en pays d'Islam vers les premiers foyers scientifiques de l'Europe médiévale.

Démarche pédagogique :

Conférence le matin sur les sciences dans la civilisation arabo-musulmane (voir ci-dessus);

Ateliers d'étude de textes l'après-midi (voir documentation fournie).

Référents théoriques :

Travaux d'Ahmed Djebbar sur l'épistémologie et l'histoire des sciences arabes.

Documentation fournie aux personnes en formation:

Abu l-Wafa' (X^e s.) : "Livre sur ce qui est nécessaire aux artisans en constructions géométriques".

al-Kashi (XIV^e s.) : Extraits de son "Livre sur les clefs du calcul".

Si vous souhaitez vous inscrire, prendre contact avec l'IREM
iremsecr@u-bourgogne.fr

13 et 14 janvier 2010 : EXPOSITION «Naviguer au XVIII^e»

Salle du Conseil, Bâtiment Sciences Mirande - Visite commentée de l'exposition le 13 janvier.

Le programme détaillé sera prochainement sur le site de l'IREM

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/>

14 janvier 2010

Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : "Naviguer au 18^e siècle – Utilisation des mathématiques en astronomie et dans la navigation" – Véronique HAUGUEL.

PAF 2009-2010

Stages dont l'IREM est le responsable pédagogique

<i>Les nombres : aspect historique</i>
<i>Lieu</i> : IREM – 07/01/10 et 28/04/10
<i>Animateurs</i> : Patrick GUYOT et Frédéric METIN
<i>Entre arithmétique et algèbre</i>
<i>Lieu</i> : IUFM CHALON - 12/11/09 et 10/03/10
<i>Lieu</i> : IUFM d'AUXERRE : 25/11/09 et 04/03/10
<i>Animateurs</i> : Patrick GUYOT et Frédéric METIN
<i>Éclairages historiques sur les probabilités</i>
<i>Lieu</i> : IREM - 10/11/09 et 19/03/10
<i>Animateur</i> : Philippe REGNARD
<i>Mathématiques et musique</i>
<i>Animateur</i> : Philippe ROLIN
<i>Lieu</i> : IREM : 04/03/10

<p><i>Quelques sujets de recherche en mathématiques aujourd'hui</i> <i>Animateurs</i> : Hervé CARDOT ; Paul MARDESIC, etc. <i>Lieu</i> : IREM : 19/11/09</p>
<p><i>Pour enseigner les statistiques inférentielles en BTS et en terminale</i> <i>Animateurs</i> : Ahmed JEBRANE et Catherine LABRUERE CHAZAL <i>Lieu</i> : IREM : 28/01/10</p>
<p><i>Introduction à la théorie des sondages</i> <i>Animateur</i> : Camélia GOGA <i>Lieu</i> : IREM – 12/11/09</p>
<p><i>Deux postulats de l'antiquité et leurs conséquences</i> <i>Animateur</i> : Rémi LANGEVIN <i>Lieu</i> : IREM 21/01/10</p>
<p><i>LE Q.C.M, un outil de formation et d'évaluation</i> <i>Animateur</i> : Denis GARDES <i>Lieux</i> : Chalon : 15/12/09 Auxerre : 03/12/09</p>
<p><i>Le rôle des mathématiques dans les nouvelles technologies</i> <i>Animateurs</i>: Denis GARDES et Catherine LABRUERE CHAZAL <i>Lieu</i> : IREM 12/01/10 et 1^{er}/04/10</p>

DATES DES 3 RALLYES

Rallye Mathématique des collèges de **CÔTE D'OR** : **vendredi 5 février 2010.**

Rallye Mathématique des collèges **SAÔNE & LOIRE** : **vendredi 22 janvier 2010.**

Rallye Mathématique des lycées de Bourgogne : **mercredi 20 janvier 2010.**

Informez-en vos élèves et inscrivez-les

Les comptes rendus des rallyes 2009 sont sur le site de l'IREM

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/Rallyes.html>

Bloc-notes

GÉOWIKI,

le wiki du groupe « logiciels de géométrie » de l'IREM de Dijon

Comme annoncé au mois de juin, le groupe « logiciels de géométrie » vient de se doter d'un wiki. En effet, ce groupe rassemble des professeurs répartis sur toute l'académie et fonctionne essentiellement par internet. Géowiki va nous permettre d'améliorer nos échanges qui se faisaient jusque maintenant par courriel.

Mais le principal intérêt du wiki est son ouverture à tous.

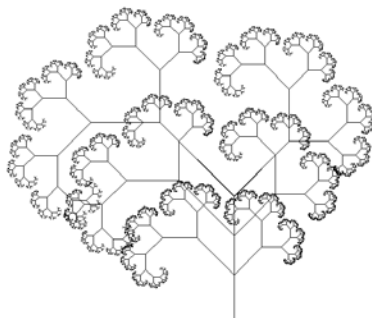
Toute personne connaissant son adresse : <http://mascret.alain.perso.neuf.fr> peut lire les pages du wiki et ainsi prendre connaissance des travaux du groupe. Venez donc visiter Géowiki de temps en temps !

Mieux encore, si vous le souhaitez, vous pouvez même écrire sur Géowiki. Il vous suffit pour cela de vous enregistrer. Vous disposerez alors du droit d'écriture dans la partie « questions » de Géowiki.

Si vous vous posez des questions techniques ou pédagogiques concernant les logiciels de géométrie, n'hésitez pas, venez les poser sur Géowiki ! Nous ferons de notre mieux pour y répondre rapidement.

Géowiki nous permettra également de diffuser les fichiers des figures réalisées. Quelques problèmes techniques dus aux règles de fonctionnement de notre hébergeur actuel restent cependant à régler pour rendre les téléchargements plus commodes. Notre wiki est perfectible et nous espérons bien l'améliorer en fonction des besoins.

A bientôt sur Géowiki !



Une fractale, réalisée en Xlogo

Jeux et Problèmes

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 63

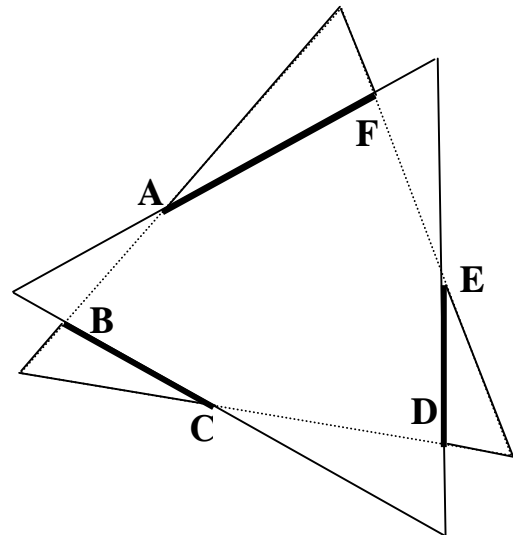
Deux triangles équilatéraux égaux se coupent selon 6 segments.

Démontrer que les longueurs

$AB + CD + EF$ (en pointillé)

et $BC + DE + FA$ (en gras)

sont égales.



PROBLÈME - 63

Si $[x]$ désigne la partie entière de x , on vérifie que

$$2008 = 485 + [485 \pi] \text{ et que } 2009 = 1524 + \left[\frac{1524}{\pi} \right]$$

Démontrer plus généralement que tout entier naturel n s'écrit de manière unique

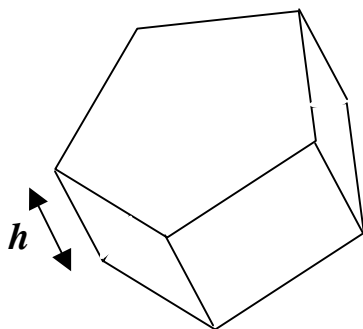
Soit $n = a + [a\pi]$ avec a entier, soit $n = b + \left[\frac{b}{\pi} \right]$ avec b entier.

JEU - 62

Si on lance un dé ordinaire non pipé, de manière "raisonnable", c'est à dire en le faisant pivoter un peu au hasard, puis en le faisant rouler ni trop lentement ni trop vite, on obtient l'un des 6 entiers 1,2,3,4,5,6 de manière équiprobable (à peu de choses près).

Indiquer comment construire un objet permettant en un seul jet "raisonnable" d'obtenir l'un des 7 entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 de manière équiprobable (aussi bien que pour le dé ordinaire).

Solution :



Considérons un prisme droit à base pentagonale régulière.

Il est composé de 7 faces dont deux pentagones qui sont équiprobables lors d'un lancement, et de 5 autres faces rectangulaires également équiprobables, avec une probabilité a priori différente de celle des pentagones.

Faisons varier en pensée la hauteur h .

Il est évident que si h est "petit" les pentagones sont avantagés (Figure 1), et que si h est grand, ce sont les rectangles qui sont avantagés (Figure 2).

Il existe donc une hauteur h optimale qui égalise les 7 probabilités.



Figure 1

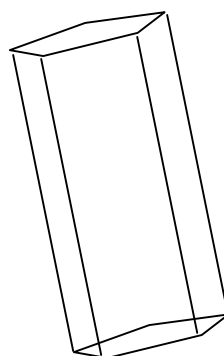


Figure 2

J'ai fait des expérimentations avec des prismes en bois que je rognais progressivement, et J'ai constaté qu'il y avait équiprobabilité pour un rapport entre la hauteur du prisme et le côté du pentagone égal à 1,25 environ.

PROBLÈME - 62

Soient x, y, z trois réels.

Démontrer que si $x + y + z = 0$, alors

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \times \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}$$

(La réciproque est inexacte).

Solution :

Posons $\sigma_1 = x + y + z$ $\sigma_2 = xy + yz + zx$ $p = xyz$ et $S_n = x^n + y^n + z^n$.

On a $S_1 = 0$ par hypothèse. (1)

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2 \sigma_2 = -2 \sigma_2. \quad (2)$$

Puis

$$0 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz.$$

$$\text{donc } x^3 + y^3 + z^3 = -3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) - 6xyz.$$

$$= -3[(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - (x^3 + y^3 + z^3)] - 6xyz.$$

Comme $x + y + z = 0$, on en tire $2(x^3 + y^3 + z^3) = 6xyz$ ou $S_3 = 3p$ (3)

De plus :

$$\begin{aligned} p S_n - \sigma_2 S_{n+1} &= xyz(x^n + y^n + z^n) - (xy + yz + zx)(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) \\ &= x^{n+1}yz + x y^{n+1}z + xyz^{n+1} - (x^{n+2}y + x y^{n+2} + xy z^{n+1} + x^{n+1}yz + \\ &\quad y^{n+2}z + y z^{n+2} + x^{n+2}z + x y^{n+1}z + x z^{n+2}) \\ &= -x^{n+2}(y + z) - y^{n+2}(x + z) - z^{n+2}(x + y) \\ &= -x^{n+2}(-x) - y^{n+2}(-y) - z^{n+2}(-z) = x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} \end{aligned}$$

Ainsi on a la récurrence $S_{n+3} = p S_n - \sigma_2 S_{n+1}$ qui va nous permettre, avec (1), (2) et (3) d'aboutir :

$$S_4 = p S_1 - \sigma_2 S_2 = 2 \sigma_2^2.$$

$$S_5 = p S_2 - \sigma_2 S_3 = p(-2 \sigma_2) - \sigma_2(3p) = -5 p \sigma_2.$$

$$S_7 = p S_4 - \sigma_2 S_5 = p(2 \sigma_2^2) - \sigma_2(-5 p \sigma_2) = 7 p \sigma_2^2.$$

Cela entraîne :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \times \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{S_2}{2} \times \frac{S_5}{5} = (-\sigma_2) \times (-p \sigma_2) = p \sigma_2^2 = \frac{S_7}{7} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}$$

Les formules de Bretschneider, Coolidge et Bramagupta

Michel LAFOND,

Résumé : *Des formules utiles et plus ou moins connues concernant les aires des quadrilatères convexes.*

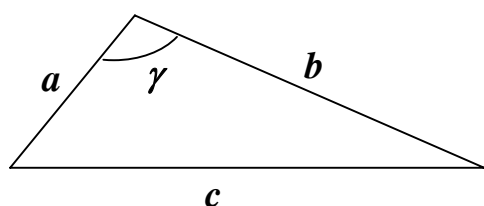
Mots clés : *aire, Al-Kashi, Bramagupta, Bretschneider, Coolidge, Héron, quadrilatère.*

Nous allons voir que plusieurs (belles) formules donnent l'aire d'un quadrilatère convexe connaissant ses 4 côtés et un cinquième paramètre, et que parmi tous les quadrilatères convexes ayant des côtés donnés, ceux qui sont inscriptibles ont des aires remarquables.

1. Rappels : Les formules de HÉRON et d'AL-KASHI.

On suppose connues :

La formule d'Al-Kashi (loi des cosinus) dans un triangle quelconque :



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos (\gamma)$$

et la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle de côtés a, b, c :

$T(a, b, c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.

Et on se demande ce qui se passe pour les aires des quadrilatères.

2. Considérons le problème suivant qui servira de fil conducteur :
(J'ai posé ce problème dans le numéro 482 du bulletin de l'APMEP)

Un quadrilatère convexe a pour côtés 6, 7, 8, 11 et une aire de 60.

Démontrer qu'il est inscriptible.

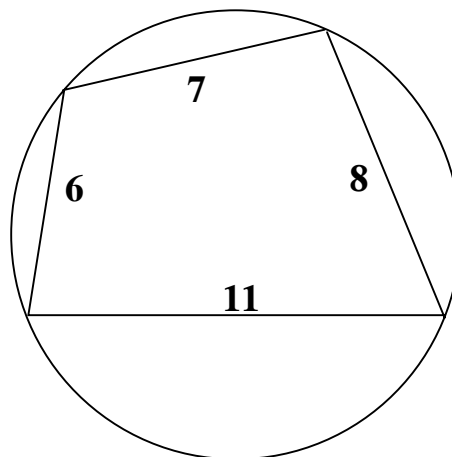


Figure 1

- Si l'on connaît le théorème et la formule de BRAHMAGUPTA disant qu'un quadrilatère convexe de côtés a, b, c, d a une aire maximale si et seulement si il est inscriptible, et que cette aire vaut alors $M = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ où s est le demi-périmètre, alors, pour résoudre notre problème, il suffirait de démontrer que 60 est l'aire maximale d'un quadrilatère convexe de côtés 6, 7, 8, 11.

On ne précise pas l'ordre des côtés. Est-ce important ?

Pas du tout, car si un quadrilatère de côtés a, b, c, d a une aire maximale M disons pour l'ordre $\Omega_1 = (a, b, c, d)$ de ses côtés, alors pour tout ordre Ω' des mêmes côtés, on peut obtenir un quadrilatère de même aire ou d'aire supérieure.

En effet, compte tenu de la circularité et des symétries on n'a que 3 ordres vraiment distincts :

$\Omega_1 = (a, b, c, d)$, $\Omega_2 = (a, b, d, c)$ et $\Omega_3 = (a, c, b, d)$.

On passe sans changer l'aire, de l'ordre Ω_1 à l'ordre Ω_2 par la transformation ci-dessous (Figure 2) consistant à symétriser le triangle supérieur :

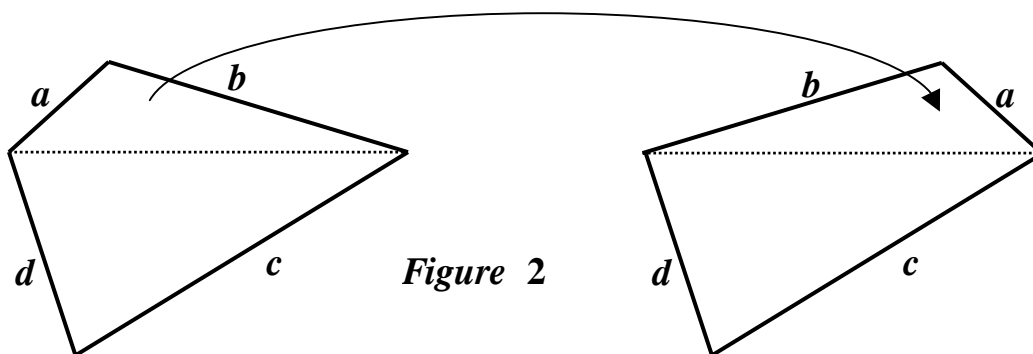


Figure 2

Puisqu'on peut permuter deux côtés on peut en itérant obtenir n'importe quelle permutation des côtés.

- Attention, la convexité n'est pas nécessairement préservée par la transformation ci-dessus, mais si le quadrilatère obtenu n'est pas convexe, une seconde symétrie le rend convexe tout en augmentant son aire. La figure 3 ci-dessous montre ce cas.

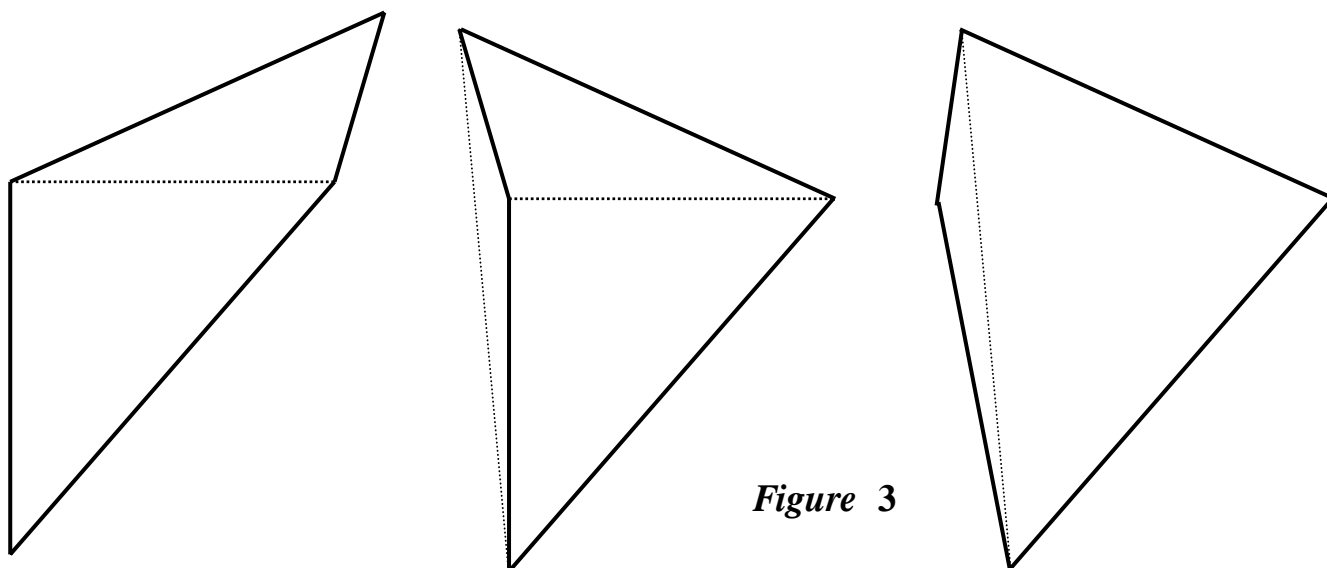


Figure 3

En résumé, si on s'intéresse à l'aire MAXIMALE d'un quadrilatère convexe de côtés imposés a, b, c, d peu importe l'ordre de ces côtés.

3. Comment prouver que 60 est l'aire maximale d'un quadrilatère convexe de côtés 6, 7, 8, 11 ?

On a ou on n'a pas connaissance du théorème de BRAHMAGUPTA cité plus haut.

- Si on ne connaît pas ce théorème, on peut procéder ainsi :

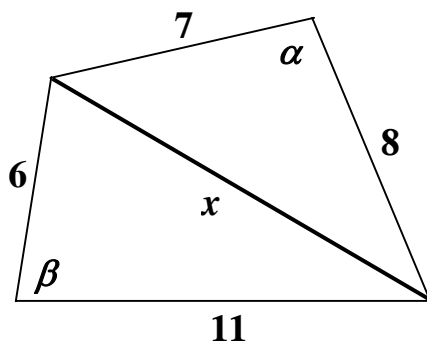


Figure 4

D'après la formule de HERON, l'aire $Q(x)$ du quadrilatère [Figure 4] vaut :

$T(7, 8, x) + T(6, 11, x)$ soit :

$$Q(x) = \sqrt{\frac{x+15}{2} \times \frac{-x+15}{2} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+17}{2} \times \frac{-x+17}{2} \times \frac{x-5}{2} \times \frac{x+5}{2}}$$

Le domaine de variation de x est l'intervalle $[5 ; 15]$ à cause de l'inégalité triangulaire.

On obtient facilement en développant :

$$4 Q(x) = f(x) = \sqrt{-x^4 + 226 x^2 - 225} + \sqrt{-x^4 + 314 x^2 - 7225}$$

Notons pour simplifier :

$$R_1 = -x^4 + 226 x^2 - 225 \quad \text{et} \quad R_2 = -x^4 + 314 x^2 - 7225.$$

La dérivée de f est donnée par $f'(x) = 2 x \left(\frac{-x^2 + 113}{\sqrt{R_1}} + \frac{-x^2 + 157}{\sqrt{R_2}} \right)$

$f'(x)$ est du signe de $A + B$ où $A = (-x^2 + 113) \sqrt{R_2}$ et $B = (-x^2 + 157) \sqrt{R_1}$

Si f' s'annule en x_0 , nécessairement $A + B$, donc $A^2 - B^2$ s'annule aussi en x_0 .

Le calcul donne $A^2 - B^2 = 4880 x^4 + 992 x^2 - 86710000$ qui se factorise en :

$$A^2 - B^2 = 16 (305 x^2 + 367) (61 x^2 - 8125).$$

$A^2 - B^2$ est donc du signe de $61 x^2 - 8125$ qui dans le domaine ne s'annule que pour

$$x_0 = 25 \sqrt{\frac{13}{61}} \approx 11,5$$

Attention, le signe de $f'(x)$ est celui de $A + B$, mais pas celui de :

$$A^2 - B^2 = (A + B) (A - B).$$

En fait $f'(x)$ est du signe de $A + B = (A^2 - B^2) / (A - B)$ et il faut distinguer 4 cas car dans l'intervalle $[5 ; 15]$ se trouvent dans l'ordre $\sqrt{113} \approx 10,5$ qui annule A , $x_0 \approx 11,5$ qui annule $A^2 - B^2$ et $\sqrt{157} \approx 12,5$ qui annule B .

➤ Dans $[5, \sqrt{113}[$ on a $A > 0, B > 0$ donc $(A + B) > 0$ et $f'(x) > 0$

➤ Dans $]\sqrt{113} ; x_0 [$ on a $A < 0, B > 0$ donc $(A - B) < 0$

de plus $A^2 - B^2$ est du signe de $x^2 - x_0^2$ donc négatif. on a encore $f'(x) > 0$

➤ Dans $]x_0 ; \sqrt{157}[$ on a $A < 0, B > 0$ donc $(A - B) < 0$

de plus $A^2 - B^2$ est du signe de $x^2 - x_0^2$ donc positif. d'où $f'(x) < 0$

➤ Dans $]\sqrt{157} ; 15[$ on a $A < 0, B < 0$ donc $(A + B) < 0$ et encore $f'(x) < 0$

f est donc croissante jusqu'à x_0 puis décroissante, et compte tenu du fait que $x_0^2 = 8125 / 61$, l'aire maximale du quadrilatère est

$$Q(x_0) = \frac{1}{4} f(x_0) = \frac{1}{4} (\sqrt{-x_0^4 + 226 x_0^2 - 225} + \sqrt{-x_0^4 + 314 x_0^2 - 7225})$$

$$Q(x_0) = \frac{1}{4} \left(\frac{6720}{61} + \frac{7920}{61} \right) = 60. \quad \text{Exactement !}$$

Puisque par hypothèse l'aire vaut 60, elle est donc maximale, et d'après ce qui précède, ceci a lieu pour la valeur $x = x_0$ de la diagonale.

Pour démontrer que le quadrilatère est inscriptible, il suffit de démontrer que les angles α et β de la figure 4 sont complémentaires, ce qui est le cas, car connaissant maintenant $x_0^2 = 8125 / 61$, on peut utiliser la formule d'AL-KASHI dans les deux triangles de la figure 4 pour obtenir :

$$\cos(\alpha) = \frac{113 - x_0^2}{112} = -\frac{1232}{6832} = -\frac{11}{61} \quad \text{et} \quad \cos(\beta) = \frac{157 - x_0^2}{132} = \frac{1452}{8052} = \frac{11}{61} \quad \text{CQFD.}$$

- Si on connaît le théorème de BRAHMAGUPTA, on peut procéder ainsi :
L'aire maximale d'un quadrilatère de côtés 6, 7, 8 et 11 est

$$M = \sqrt{(s-6)(s-7)(s-8)(s-11)}$$

où s est le demi périmètre. Ici $s = 16$ donc $M = \sqrt{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5} = 60$.
L'aire étant maximale, le quadrilatère est inscriptible.

4. Amélioration du théorème de BRAHMAGUPTA.

- On va démontrer la très belle formule suivante (de BRETSCHNEIDER) :

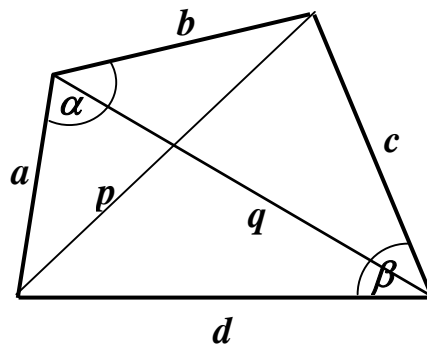


Figure 5

[a, b, c, d sont les côtés ; p, q sont les diagonales et α, β les mesures de deux angles opposés] :

Formule de BRETSCHNEIDER :

L'aire d'un quadrilatère convexe de côtés a, b, c, d est

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

où s est le demi-périmètre : $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ et α, β les mesures de deux angles opposés.

Remarquons que peu importe les deux angles opposés choisis, puisque avec les deux autres mesures γ, δ on a $\gamma + \delta = 2\pi - (\alpha + \beta)$ donc $\cos^2\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

Cette formule dont on voit bien qu'elle est "meilleure" que celle de BRAHMAGUPTA, permet de résoudre de manière élégante notre problème initial, en effet :

$a = 6, b = 7, c = 8, d = 11, s = 16$ donc l'aire d'un quadrilatère de côtés 6, 7,

8, 11 est $\sqrt{3600 - 3696 \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$ donc toujours strictement inférieure à

$\sqrt{3600} = 60$ sauf si $\alpha + \beta = \pi$ cas où le quadrilatère est inscriptible.

Avant la démonstration, disons un petit mot sur l'auteur de la formule.

Le site <http://mathworld.wolfram.com/> conteste la paternité de cette formule, précisant que BRETSCHNEIDER en 1842 n'avait donné qu'une formule moins intéressante pour l'aire d'un quadrilatère, à savoir.

$$\frac{1}{4} \sqrt{4 p^2 q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$
 avec les notations de la figure 5.

C'est COOLIDGE qui aurait en 1939 donné l'aire sous la forme encadrée plus haut.

- Démonstration de la formule de BRETSCHNEIDER :

Dans la figure 5 d'après Al-Kashi utilisé deux fois :

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2 c d \cos \beta$$

d'où :

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 (a b \cos \alpha - c d \cos \beta)^2.$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 a^2 b^2 \cos^2 \alpha + 4 c^2 d^2 \cos^2 \beta - 8 a b c d \cos \alpha \cos \beta. \quad (1)$$

L'aire Q du quadrilatère vaut $\frac{1}{2} (a b \sin \alpha + c d \sin \beta)$ donc :

$4 Q^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha + c^2 d^2 \sin^2 \beta + 2 a b c d \sin \alpha \sin \beta$ qui multiplié par 4 donne :

$$16 Q^2 = 4 a^2 b^2 \sin^2 \alpha + 4 c^2 d^2 \sin^2 \beta + 8 abcd \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

On ajoute (1) et (2) pour obtenir :

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16 Q^2 = 4 (a^2 b^2 + c^2 d^2) - 8 abcd \cos (\alpha + \beta) \quad (3)$$

On ajoute et on retranche à droite $8 abcd$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16 Q^2 &= 4 (ab + cd)^2 - 8 abcd (1 + \cos (\alpha + \beta)) \\ &= 4 (ab + cd)^2 - 16 abcd \cos^2 (\alpha + \beta) / 2 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$16 Q^2 = 4 (ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16 abcd \cos^2 (\alpha + \beta) / 2 \quad (4)$$

Comme par ailleurs :

$$\begin{aligned} 4 (ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= [2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2] [2ab \\ &+ 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] \\ &= [(a + b)^2 - (c - d)^2] [(c + d)^2 - (a - b)^2] \\ &= [a + b + c - d] [a + b - c + d] [c + d + a - b] [c + d - a + b] \\ &= 16 (s - a) (s - b) (s - c) (s - d) \quad (5) \end{aligned}$$

(4) et (5) donnent après division par 16 :

$$Q^2 = (s - a) (s - b) (s - c) (s - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

5. Plusieurs formules pour l'aire d'un quadrilatère.

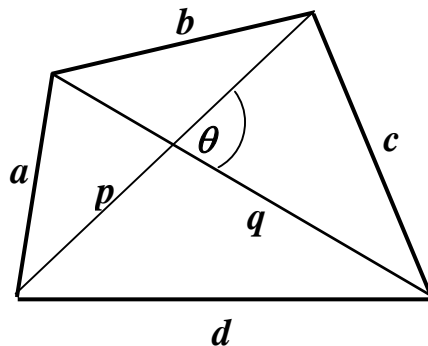


Figure 6

Si dans la figure 6, on désigne par θ la mesure de l'angle aigu des deux diagonales, alors l'aire du quadrilatère vaut selon ses goûts :

$$\frac{1}{2} p q \sin (\theta)$$

$$\frac{1}{4} (b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \tan (\theta)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{4 p^2 q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2} \quad \text{l'authentique formule de BRETSCHNEIDER}$$

$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$ la formule de COOLIDGE.

Ce sont de bons exercices, voici des indications pour les résoudre :

- Le premier se démontre facilement en sommant les aires des 4 triangles de la figure 6.
- Le deuxième utilise Al-Kashi 4 fois (dans les 4 triangles de la figure 6) et permet d'obtenir $b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2 \cos(\theta) pq$ d'où l'on tire pq qu'on remplace dans la première formule.
- Le troisième est une transformation du deuxième.
- Le quatrième a été démontré au paragraphe 4.

Et mon tout est VIVE les MATHS !

6. Bibliographie

Le site <http://mathworld.wolfram.com/>

L'encyclopédie : CRC Concise Encyclopédia of MATHEMATICS d'Eric W. Weisstein. CHAPMAN & HALL/CRC

Le site http://en.wikipedia.org/wiki/Bretschneider's_formula

Courbes de Bézier quadratiques et arcs de coniques

Lionel GARNIER, *lgarnier@u-bourgogne.fr*

Résumé

Cet article consiste à définir les différentes courbes de Bézier de degré 2. Dans un premier temps, nous traitons des courbes polynômiales qui permettent de représenter des arcs de paraboles dans l'espace affine euclidien usuel en utilisant l'algorithme de De Casteljaou puis le théorème de la droite des milieux. Dans un deuxième temps, nous définissons les coordonnées homogènes d'un point de l'espace affine en considérant la fermeture projective de l'espace affine. Dans un troisième temps, nous en déduisons le modèle des courbes de Bézier rationnelles dans le plan affine et montrons qu'elles représentent des arcs de coniques.

Dans le numéro 114 de la *la feuille de vigne* de décembre 2009, nous montrerons comment il est possible de modéliser un arc de cercle en utilisant une courbe de Bézier rationnelle quadratique.

Mots clés : courbe de Bézier quadratique, géométrie projective.

1 Un peu d'histoire

Deux personnes ont défini les mêmes outils afin de résoudre leurs problèmes de modélisation en CFAO dans leurs industries respectives : Pierre Bézier chez Renault et Paul De Casteljaou chez Citroën. L'idée est de réaliser une construction virtuelle de l'objet (en l'occurrence des voitures) en utilisant des ordinateurs plutôt que des moules. Ce procédé permet alors de diminuer les coûts de productions et un gain de temps devient possible si la modélisation a été bien pensée. Les courbes et les surfaces de Bézier permettent de construire des courbes et des surfaces "épéda¹" en utilisant des points de contrôle sur diverses parties qui sont jointes selon les conditions voulues [Béz86, Gar07]. Ainsi, il est possible d'effectuer des déformations locales : en déplaçant un point de contrôle, seule une petite partie de l'objet est modifiée.

Dans ce sujet, nous allons nous restreindre à une seule portion de courbe de Bézier de degré 2 et montrer comment il est possible de modéliser un arc de conique du plan affine euclidien en utilisant une telle courbe [Gar07, DP98, Far99, FJ89, FJ92]. En particulier, nous allons étudier la méthode de De Casteljaou permettant de construire une courbe de Bézier de degré 2 modélisant un arc de parabole puis nous nous focaliserons sur la modélisation d'arcs de cercles.

¹Il est possible de modifier un morceau de courbe sans modifier les autres morceaux de courbes.

Dans la suite, \mathcal{P} désigne le plan affine euclidien réel muni du produit scalaire usuel. L'espace vectoriel associé au plan affine euclidien réel est le \mathbb{R} -espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

2 Polynômes de Bernstein

Définition 1 : *Polynômes de Bernstein de degré 2*

Pour t appartenant à $[0; 1]$, les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$B_0(t) = (1 - t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1 - t), \quad B_2(t) = t^2 \quad (1)$$

Nous avons :

$$B_0(0) = 1, \quad B_2(1) = 1 \quad (2)$$

et pour $i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, nous avons :

$$B_i(0) = 0 \quad B_{2-i}(1) = 0 \quad (3)$$

et pour $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, nous avons :

$$B_i(t) = B_{2-i}(1 - t) \quad (4)$$

En appliquant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^2 B_i(t) = 1 \quad (5)$$

3 Courbes de Bézier polynomiales quadratiques

3.1 Courbe de Bézier quadrique et arc de parabole

Définition 2 : *courbes de Bézier de degré 2*

Soit $(M_i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ et O , 4 points de \mathcal{P} . La courbe de Bézier de degré 2 de points de contrôle $(M_i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ est l'ensemble des points $M(t)$ vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i(t) \overrightarrow{OM}_i \quad (6)$$

et les points $(M_i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ définissent un polyèdre appelé **polyèdre de contrôle** de la courbe de Bézier.

Géométriquement, pour t_0 fixé dans l'intervalle $[0; 1]$, $M(t_0)$ est le barycentre des points pondérés $(M_i; B_i(t_0))_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$. **D'après la formule (5), la définition d'une courbe de Bézier de degré 2, formule (6), ne dépend pas du point O choisi.** De plus, la courbe de Bézier est incluse dans son polyèdre de contrôle.

D'après les formules (2) et (3), nous avons $M(0) = M_0$ et $M(1) = M_2$. Il est possible de montrer que la tangente à la courbe au point M_0 (resp. M_2) est la droite (M_0M_1) (resp. (M_2M_1)) c'est-à-dire que le point M_1 permet de contrôler la tangente à la courbe en M_0 et en M_2 .

3.2 Algorithme de De Casteljau

Soit M_0, M_1 et M_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . A partir de la formule (6), nous avons, en particulier, pour tout t de $[0; 1]$:

$$\overrightarrow{M_1M(t)} = (1-t)^2 \overrightarrow{M_1M_0} + t^2 \overrightarrow{M_1M_2} \quad (7)$$

et dans le repère $(M_1; \overrightarrow{M_1M_0}; \overrightarrow{M_1M_2})$, l'équation paramétrique de la courbe est :

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)^2 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad (8)$$

et une équation implicite de la courbe est :

$$(x-y)^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad (9)$$

et, en posant $X = x - y$, $Y = 2(x + y) - 1$, nous obtenons l'équation d'une parabole affine : $Y = X^2$.

L'algorithme 1 permet de construire, point par point, un arc d'une parabole \mathcal{C}_P , défini par une courbe de Bézier de points de contrôle M_0, M_1 et M_2 . Pour s'en convaincre, il suffit de remplacer, dans la formule (12), les expressions des deux vecteurs données dans les formules (10) et (11) pour obtenir la formule (6).

La figure 1 illustre la méthode de De Casteljau pour construire un arc de parabole. Les extrémités de l'arc sont M_0 et M_2 et le point M_1 définit les tangentes à la courbe en ces points. La figure montre aussi la construction de deux points de la parabole $N_3(\frac{1}{4})$ et $N_3(\frac{1}{2})$.

3.3 Modélisation fractale d'un arc de parabole en utilisant des triangles

Pour terminer ce paragraphe sur la parabole, nous allons montrer, comment à partir de l'algorithme 1, il est possible de réaliser une modélisation fractale² d'un arc de parabole en utilisant seulement des triangles et le théorème de la droite des milieux.

²En modélisation géométrique, le terme "par subdivision" serait plus approprié que le terme "fractale".

Algorithme 1 : Méthode de De Casteljaou

Entrée : Soit M_0 , M_1 et M_2 trois points non alignés de \mathcal{P} .

1. Soit la famille de points $(N_1(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{OM_0} + t\overrightarrow{OM_1} \quad (10)$$

2. Soit la famille de points $(N_2(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{OM_1} + t\overrightarrow{OM_2} \quad (11)$$

3. Soit la famille de points $(N_3(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_3(t)} = (1-t)\overrightarrow{ON_1(t)} + t\overrightarrow{ON_2(t)} \quad (12)$$

Sortie : un arc de parabole défini par une courbe de Bézier de points de contrôle M_0 , M_1 et M_2 .

En prenant la valeur de $\frac{1}{2}$ dans l'algorithme 1, les points $N_1\left(\frac{1}{2}\right)$ et $N_2\left(\frac{1}{2}\right)$ sont les milieux respectifs des segments $[M_0M_1]$ et $[M_1M_2]$ tandis que le point $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $[N_1\left(\frac{1}{2}\right)N_2\left(\frac{1}{2}\right)]$ et, d'après le théorème de la droite des milieux appliqué dans le triangle $M_0M_1M_2$, **la droite $(N_1\left(\frac{1}{2}\right)N_2\left(\frac{1}{2}\right))$ est parallèle à la droite (M_0M_2)** . Si nous voulons ré-itérer ce processus, nous devons montrer que les conditions initiales sont vérifiées pour les deux arcs de parabole d'extrémités M_0 et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ d'une part et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ et M_2 d'autre part. Pour cela, calculons la tangente à l'arc de parabole initiale γ au point $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$. Nous savons que l'arc de parabole est l'ensemble des points vérifiant :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \overrightarrow{OM_0} + 2(t-t^2) \overrightarrow{OM_1} + t^2 \overrightarrow{OM_2} \quad (13)$$

ce qui permet de calculer le vecteur tangent $\overrightarrow{v}(t)$ à la parabole γ au point $M(t)$:

$$\overrightarrow{v}(t) = -2(1-t) \overrightarrow{OM_0} + 2(1-2t) \overrightarrow{OM_1} + 2t \overrightarrow{OM_2}$$

ce qui donne au point $M\left(\frac{1}{2}\right) = N_3\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\overrightarrow{v}\left(\frac{1}{2}\right) = -\overrightarrow{OM_0} + 2 \times 0 \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_0M_2}$$

et la tangente à la parabole γ au point $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ est la droite $(N_1\left(\frac{1}{2}\right)N_2\left(\frac{1}{2}\right))$ et **notre arc de parabole de points de contrôle M_0 , M_1 et M_2 est découpé en deux arcs de parabole de points de contrôle respectifs M_0 , $N_1\left(\frac{1}{2}\right)$ et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ d'une part, et M_2 , $N_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ d'autre part.**

En ré-itérant ce processus sur les points M_0 , $N_1\left(\frac{1}{2}\right)$ et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ d'une part, $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$, $N_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et M_2 d'autre part, il est aussi possible de construire deux nouveaux points

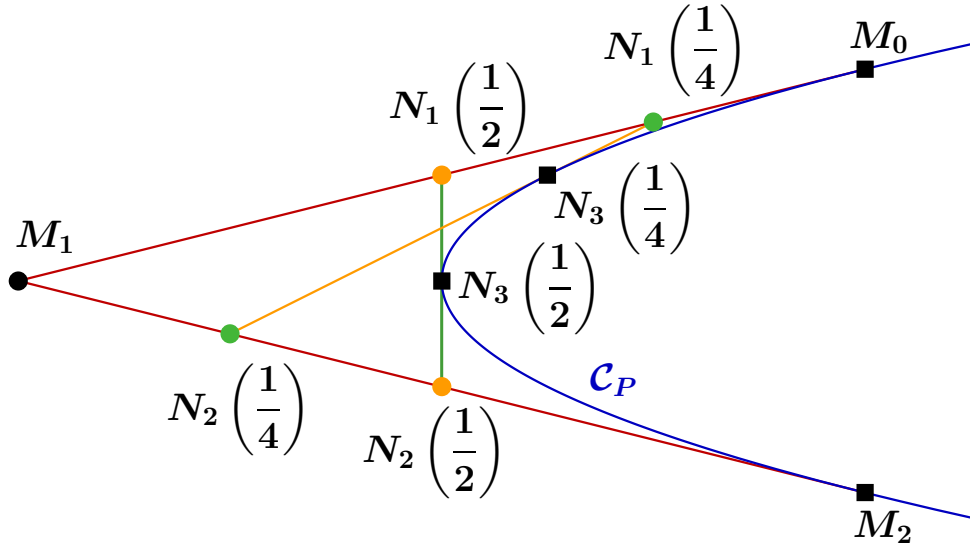


FIG. 1 – Arc de parabole construit en utilisant l’algorithme 1.

de la parabole, un point appartenant à l’arc d’extrémités M_0 et $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$, l’autre appartenant à l’arc d’extrémités $N_3\left(\frac{1}{2}\right)$ et M_2 . Ainsi, il est possible d’obtenir une construction fractale d’un arc de parabole, algorithme 2.

Algorithme 2 : Construction fractale d’un arc de parabole.

Entrée : Soit M_0 , M_1 et M_2 trois points non alignés de \mathcal{P} .

Procédure $\text{FractPara}(M_0, M_1, M_2)$

1. Soit N_1 le milieu du segment $[M_0M_1]$.
2. Soit N_2 le milieu du segment $[M_2M_1]$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. $\text{FractPara}(M_0, N_1, N_3)$.
5. $\text{FractPara}(N_3, N_2, M_2)$.

Sortie : un arc de parabole défini par une courbe de Bézier polynômiale de points de contrôle M_0 , M_1 et M_2 .

La figure 2 déroule l’algorithme 2 dans une profondeur³ de 2. En entrée, nous avons les extrémités M_0 et M_2 de l’arc de parabole γ et le point de contrôle des tangentes M_1 . La première étape consiste à construire le point N_1 (resp. N_2), milieu du segment $[M_0M_1]$ (resp. $[M_2M_1]$). Le point N_3 , milieu du segment $[N_1N_2]$ est ensuite construit. La première partie de la seconde étape est de construire les points N_4^a et N_5^a , milieux respectifs des segments $[M_0N_1]$ et $[N_3N_1]$ puis de construire le point N_6^a , milieu du segment $[N_4^aN_5^a]$. La seconde partie de la seconde étape est de construire les points N_4^b et N_5^b , milieux respectifs des segments $[N_3N_2]$ et $[M_2N_2]$

³L’algorithme est récursif et l’exécution se déroule sous la forme d’un arbre.

puis de construire le point N_6^b , milieu du segment $[N_4^b N_5^b]$. Les deux points N_6^a et N_6^b sont deux autres points de l'arc de parabole γ .

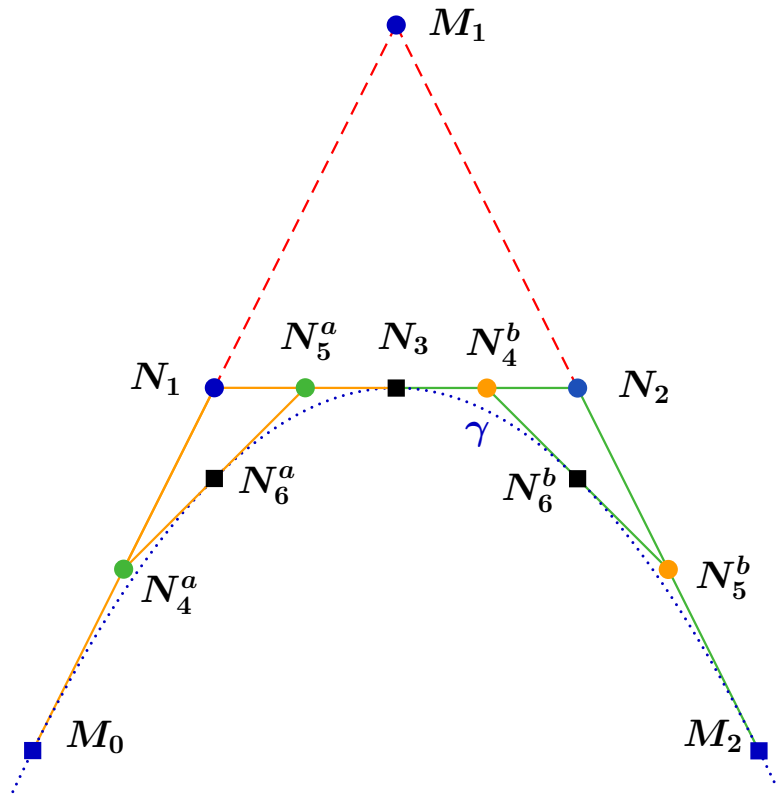


FIG. 2 – Construction fractale d'un arc de parabole s'extrémités M_0 et M_2 et ayant pour tangentes les droites (M_0M_1) et (M_1M_2) .

Pour terminer ce paragraphe, notons que l'algorithme 2 ne nécessite que la construction du milieu d'un segment, il est ainsi possible de construire les points⁴ d'un arc de parabole à la règle et au compas.

4 Coordonnées homogènes

4.1 Définition

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan affine \mathcal{P} . L'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{P}}$ à l'espace affine \mathcal{P} est muni de la base $(\vec{i}; \vec{j})$. Considérons la relation d'équivalence \sim (définie à l'annexe A) dans l'espace $\vec{\mathcal{P}} \times \mathbb{R}$, que nous identifions à \mathbb{R}^3 , définie par :

$$(x_1; y_1; \omega_1) \sim (x_2; y_2; \omega_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ \omega_1 = \lambda \omega_2 \end{cases} \quad (14)$$

⁴d'un point de vue fractal.

L'espace quotient $\widehat{\mathcal{P}} = \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} \times \mathbb{R} \right) / \sim$ (défini à l'annexe A) est la fermeture projective du plan affine euclidien \mathcal{P} . Nous pouvons alors définir les coordonnées homogènes des points du plan affine \mathcal{P} .

Définition 3 : *coordonnées homogènes*

Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{P} . Les coordonnées homogènes du point M sont les coordonnées de $(\omega \overrightarrow{OM}; \omega)$ dans $\widehat{\mathcal{P}}$ avec la condition $\omega \neq 0$ c'est-à-dire que les coordonnées homogènes du point M sont définies par tout triplet de la forme :

$$(\omega x; \omega y; \omega) \quad \text{où} \quad \omega \neq 0 \tag{15}$$

Réciproquement, si nous considérons un point M de $\widehat{\mathcal{P}}$ de coordonnées $(x; y; \omega)$ telles que ω soit non nul, coordonnées que nous pouvons écrire $(\frac{x}{\omega}; \frac{y}{\omega}; 1)$, nous identifions le point M de $\widehat{\mathcal{P}}$ avec le point du plan affine, de coordonnées $(\frac{x}{\omega}; \frac{y}{\omega})$. Notons qu'au point de $\widehat{\mathcal{P}}$ de coordonnées $(x; y; \omega)$, $\omega \neq 0$, correspond, dans le plan affine \mathcal{P} , le point pondéré $M_\omega \left(\left(\frac{x}{\omega}; \frac{y}{\omega} \right); \omega \right)$.

Pour conclure, remarquons qu'à un point M de l'espace affine \mathcal{P} , nous faisons correspondre une classe d'équivalence de $\widehat{\mathcal{P}}$. Nous verrons, dans le paragraphe 5.3, quel est l'effet, d'un point de vue affine, du choix de tel ou tel représentant sur une courbe de Bézier rationnelle quadratique.

Des compléments de géométrie projective sont disponibles dans [Aud06, Lad02, Lad03, Leh03].

4.2 Plan affine et points à l'infini

Notons $\mathbb{IP} \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} \right)$ l'espace défini comme l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ suivante :

$$\forall (\vec{u}; \vec{v}) \in \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} - \{ \vec{0} \} \right)^2, \quad \vec{u} \sim_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \vec{u} = \lambda \vec{v} \tag{16}$$

Il est possible de montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{P} \cup \mathbb{IP} \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} \right)$, c'est-à-dire que l'ensemble \mathcal{H}_∞ des points de $\widehat{\mathcal{P}}$ de la forme $(x; y; 0)$, appelé hyperplan de l'infini, est isomorphe à $\mathbb{IP} \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} \right)$ qui est l'ensemble des directions du plan affine \mathcal{P} .

Lorsque un ensemble E est défini dans le plan affine \mathcal{P} par une équation implicite polynômiale de la forme $F(x; y) = 0$, étant donné la définition des coordonnées homogènes (formule (15)), l'équation implicite de E dans $\widehat{\mathcal{P}}$ est de la forme $\widetilde{F}(x; y; \omega) = 0$ où \widetilde{F} est un polynôme homogène :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall (x; y; \omega), \quad \widetilde{F}(\lambda x; \lambda y; \lambda \omega) = \lambda^n \widetilde{F}(x; y; \omega)$$

et les points à l'infini de E sont donnés par la formule :

$$\widetilde{F}(x; y; 0) = 0$$

Finissons ce paragraphe en déterminant les points à l'infini des coniques usuelles. La parabole affine définie par l'équation implicite :

$$y = x^2 \quad (17)$$

a pour équation projective :

$$y\omega = x^2 \quad (18)$$

et le point à l'infini, donné en posant $\omega = 0$ dans la formule (18), est réel et donné par $x = 0$, c'est-à-dire que le point à l'infini de cette parabole est $(0; 1; 0)$. Ainsi, le point à l'infini de la parabole, donnée par l'équation (17), est la direction verticale de la parabole c'est-à-dire sa direction asymptotique.

Concernant les points à l'infini de l'hyperbole affine définie par l'équation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

nous obtenons, après homogénéisation de l'équation (19), :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \omega^2 \quad (20)$$

et les points à l'infini, donnés en posant $\omega = 0$ dans la formule (20), sont réels et donnés par $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$, $x \neq 0$, c'est-à-dire que les points à l'infini de cette hyperbole sont $(a; b; 0)$ et $(a; -b; 0)$ et sont les directions de ces asymptotes.

Concernant les points à l'infini de l'ellipse affine définie par l'équation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (21)$$

nous obtenons, après homogénéisation de l'équation (21), :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \omega^2 \quad (22)$$

et les points à l'infini, donnés en posant $\omega = 0$ dans la formule (22), sont complexes. De plus, si $a = b = R > 0$, les points à l'infini sont $(1; i; 0)$ et $(1; -i; 0)$ et sont appelés **points cycliques**. Notons que tout cercle de centre $O_0(x_0; y_0)$ passe par ces points. En effet, l'équation projective du cercle de centre O_0 , quelconque, est de rayon R quelconque étant :

$$(x - \omega x_0)^2 + (y - \omega y_0)^2 - \omega^2 R^2 = 0 \quad (23)$$

les points à l'infini sont donnés en posant $w = 0$ dans l'équation (23), ce qui conduit à :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Finalement, il est possible de généraliser ces trois exemples :

★ une ellipse est une conique qui ne coupe pas la **droite de l'infini** ;

- ★ une hyperbole est une conique qui coupe la **droite de l'infini** exactement deux fois ;
- ★ une parabole est une conique qui coupe la **droite de l'infini** exactement une fois.

Notons qu'il est aussi possible de dire que la parabole est tangente à la droite de l'infini [Aud06].

5 Courbes de Bézier : du modèle polynomial au modèle rationnel

Considérons $M(t)$ un point d'une courbe de Bézier de degré 2 de points de contrôle $(M_i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ dans l'espace affine \mathcal{P} . Pour $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, (\mathfrak{M}_i) sont les coordonnées du point M_i dans \mathcal{P} et donc les coordonnées homogènes de M_i sont $(\mathfrak{M}_i; 1)$ mais aussi $(\omega_i \mathfrak{M}_i; \omega_i)$ où ω_i est un scalaire non nul.

Soit $(\mathfrak{M}(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans \mathcal{P} et $(\widehat{\mathfrak{M}}(t); \omega(t))$ ses coordonnées homogènes c'est-à-dire que, pour les valeurs de t qui n'annulent pas $\omega(t)$, nous avons $\mathfrak{M}(t) = \frac{\widehat{\mathfrak{M}}(t)}{\omega(t)}$ et la formule (6), écrite en utilisant les coordonnées homogènes, devient :

$$\forall t \in [0; 1], \begin{cases} \widehat{\mathfrak{M}}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i(t) \omega_i \mathfrak{M}_i \\ \omega(t) = \sum_{i=0}^2 B_i(t) \omega_i \end{cases} \quad (25)$$

En revenant dans l'espace affine \mathcal{P} , c'est-à-dire en divisant membre à membre chaque coordonnée par la seconde équation, nous pouvons définir les courbes rationnelles de degré 2.

5.1 Définition

Définition 4 : *courbe de Bézier rationnelle quadratique (CBRQ)*

Un point $M(t)$, $t \in [0; 1]$, appartient à la CBRQ définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et les poids, non nuls, $(\omega_i)_{0 \leq i \leq 2}$, si, pour un point O de \mathcal{P} , $M(t)$ vérifie :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (26)$$

Notons que la CBRQ n'est pas forcément une courbe du plan affine \mathcal{P} puisque, pour tout t de $[0; 1]$, nous n'avons pas forcément $\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \neq 0$. Les valeurs de t qui ne vérifient pas cette dernière condition définissent donc des points de la droite

de l'infini de l'espace projectif $\widehat{\mathcal{P}}$ et sont donc représentés par des vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. **Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où :**

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \neq 0 \quad (27)$$

Géométriquement, pour t fixé dans $[0; 1]$, $M(t)$ est le barycentre des points pondérés :

$$\left(M_i; \frac{\omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} \right)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket} \quad (28)$$

Comme nous avons :

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} = \frac{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} = 1$$

la définition d'une CBRQ, formule (26), ne dépend pas du point O choisi. D'après les formules (2) et (3), nous avons $M(0) = P_0$ et $M(1) = P_2$. Il est possible de montrer que la droite (P_0P_1) (resp. (P_2P_1)) est la tangente à la CBRQ au point P_0 (resp. P_2).

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . A partir de la formule (26), en posant :

$$D(t) = \omega_0(1-t)^2 + 2\omega_1(1-t)t + \omega_2 t^2$$

nous avons, en particulier, pour tout t de $[0; 1]$, :

$$\overrightarrow{P_1M(t)} = \frac{\omega_0(1-t)^2}{D(t)} \overrightarrow{P_1P_0} + \frac{\omega_2 t^2}{D(t)} \overrightarrow{P_1P_2}$$

et dans le repère $(P_1; \overrightarrow{P_1P_0}; \overrightarrow{P_1P_2})$, l'équation paramétrique de la courbe est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\omega_0(1-t)^2}{D(t)} \\ y(t) = \frac{\omega_2 t^2}{D(t)} \end{cases}$$

et nous avons :

$$\begin{cases} x(t)y(t) = \omega_0\omega_2 \left(\frac{(1-t)t}{D(t)} \right)^2 \\ x(t) + y(t) = \frac{\omega_0(1-t)^2 + \omega_2 t^2}{D(t)} = \frac{D(t) - 2\omega_1(1-t)t}{D(t)} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x(t)y(t) = \omega_0\omega_2 \left(\frac{(1-t)t}{D(t)} \right)^2 \\ x(t) + y(t) = 1 - 2\omega_1 \frac{(1-t)t}{D(t)} \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation implicite suivante :

$$xy = \omega_0\omega_2 \frac{(1-x-y)^2}{4\omega_1^2} \quad (29)$$

et nous obtenons bien l'équation d'une conique affine.

5.2 CBRQ sous forme quasi standard

Il est possible de définir un type particulier de courbe de Bézier rationnelle quadratique en prenant $\omega_0 = \omega_2 = 1$.

Définition 5 : CBRQ sous forme (quasi) standard

Un point $M(t)$ appartient à la CBRQ sous forme quasi standard, définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et le poids ω , avec $\omega \neq 0$, si et seulement si pour un point O de \mathcal{P} , pour tout t de $[0; 1]$, $M(t)$ vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{den(t)} \left(B_0(t) \overrightarrow{OP_0} + \omega B_1(t) \overrightarrow{OP_1} + B_2(t) \overrightarrow{OP_2} \right) \quad (30)$$

où :

$$den(t) = B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t)$$

Lorsque nous avons $\omega > 0$, la CBRQ est dite sous **forme standard**.

Naturellement, nous nous plaçons dans le cas de la formule (27). La valeur de ω détermine alors la nature de la conique obtenue car en développant le dénominateur :

$$den(t) = (1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2$$

nous avons :

$$1 - 2t + t^2 + 2\omega t - 2\omega t^2 + t^2 = 2(1-\omega)t^2 - 2(1-\omega)t + 1$$

et le discriminant réduit est :

$$\Delta' = (1-\omega)^2 - 2(1-\omega) = \omega^2 - 2\omega + 1 - 2 + 2\omega = \omega^2 - 1$$

et nous pouvons en conclure que :

- ★ si $|\omega| = 1$ alors le dénominateur s'annule une fois et la conique coupe la **droite de l'infini** une fois, la CBRQ est une parabole,
- ★ si $|\omega| > 1$ alors le dénominateur s'annule deux fois et la conique coupe la **droite de l'infini** deux fois, la CBRQ est une hyperbole,
- ★ si $0 < |\omega| < 1$ alors le dénominateur ne s'annule pas et la conique ne coupe pas la **droite de l'infini**, la CBRQ est une ellipse.

Notons que w n'est pas l'excentricité de la conique puisque l'excentricité d'un cercle est nulle.

Les courbes de Bézier rationnelles de degré 2 sont conservées par application affine c'est-à-dire que pour déterminer l'image d'une telle courbe, il suffit de déterminer l'image des points de contrôle.

5.3 Changement de représentant d'un point de contrôle

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1 qu'à un point $M(x; y)$ du plan affine \mathcal{P} correspond une classe d'équivalence de $\widehat{\mathcal{P}}$, cette classe étant l'ensemble des points ayant pour coordonnées homogènes le triplet :

$$(\omega x; \omega y; \omega) \text{ avec } \omega \neq 0$$

c'est-à-dire que le plan affine \mathcal{P} , ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ s'identifie naturellement avec l'ensemble des points de coordonnées homogènes $(x; y; 1)$ de $\widehat{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire que le plan affine \mathcal{P} peut être vu comme l'hyperplan de $\widehat{\mathcal{P}}$ d'équation $\omega = 1$.

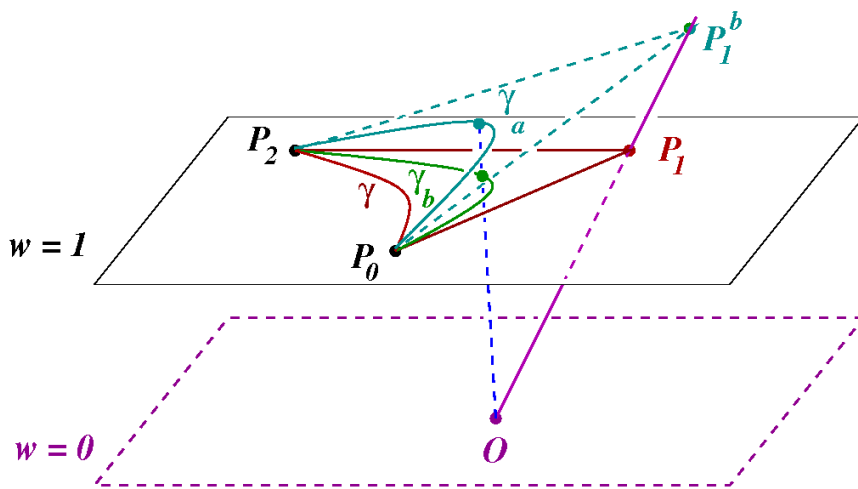


FIG. 3 – Modification du point de contrôle intermédiaire d'une CBRQ : l'arc de parabole devient un arc d'hyperbole.

Dans \mathcal{P} , considérons γ un arc de parabole modélisé par une courbe de Bézier polynômiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 . Cette courbe est aussi une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle $(P_0; 1), (P_1; 1)$ et $(P_2; 1)$. Pour $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, $(x_i; y_i)$ désigne les coordonnées affines du point P_i .

Dans $\widehat{\mathcal{P}}$, pour tout réel non nul ω_1 , les coordonnées homogènes du point P_1^b sont $(\omega_1 x_1; \omega_1 y_1; \omega_1)$. Dans la figure 3 (resp. figure 4), nous prenons $\omega_1 > 1$ (resp. $0 < \omega_1 < 1$). Dans ces deux figures, la courbe γ devient la courbe γ_a . La question est de savoir quel rôle, sur le plan affine, joue le fait de remplacer le point P_1 par le point P_1^b comme représentant de la classe définie par le point P_1 . Ce changement est transparent du point de vue projectif, mais pour déterminer la nouvelle courbe dans le plan affine \mathcal{P} , pour tout t dans l'intervalle $[0; 1]$, le point $\gamma_a(t)$ va définir le point $\gamma_b(t)$ défini comme projection du point $\gamma_a(t)$, sur l'hyperplan de $\widehat{\mathcal{P}}$ d'équation $\omega = 1$, selon la direction de la droite $(O\gamma_a(t))$. Ainsi, d'après le paragraphe 5.2, si nous avons $\omega_1 > 1$ (resp. $0 < \omega_1 < 1$), l'arc de parabole est transformé en arc d'hyperbole (resp. d'ellipse), figure 3 (resp. figure 4). Ainsi, **dans $\widehat{\mathcal{P}}$, changer de représentant projectif pour la classe engendrée par P_1 revient à modifier la nature de la conique dans le plan affine \mathcal{P} .**

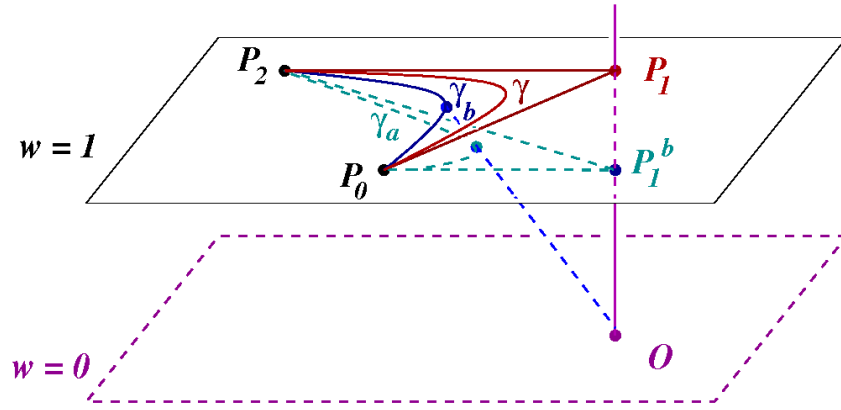


FIG. 4 – Modification du point de contrôle intermédiaire d’une CBRQ : l’arc de parabole devient un arc d’ellipse.

Une CBRQ de points de contrôle peut aussi être interprétée comme un ensemble de barycentres, formule (28). Ainsi, pour t appartenant à l’intervalle $[0; 1]$, le point $\gamma(t)$ est le barycentre des points pondérés $(P_i; B_i(t))$, $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, tandis que le point $\gamma_b(t)$ est le barycentre des points pondérés :

$$\left(P_0; \frac{B_0(t)}{\text{den}_1(t)} \right), \quad \left(P_1; \frac{\omega_1 B_1(t)}{\text{den}_1(t)} \right) \quad \text{et} \quad \left(P_2; \frac{B_2(t)}{\text{den}_1(t)} \right)$$

avec :

$$\text{den}_1(t) = B_0(t) + \omega_1 B_1(t) + B_2(t)$$

Ainsi, **changer de représentant projectif pour la classe engendrée par P_1 dans $\widehat{\mathcal{P}}$ revient à modifier les poids des points pondérées définissant l’arc de conique.**

6 Dans le prochain numéro

Dans l’édition numéro 114 de *la feuille de vigne* de décembre 2009, nous verrons comment il est possible de modéliser un arc de cercle par une courbe de Bézier rationnelle quadratique. Dans un premier temps, nous montrerons comment calculer les points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 , puis dans un second temps, nous calculerons le poids ω_1 , en fonction des poids ω_0 et ω_2 .

Annexe A : Relation d'équivalence et classe d'équivalence

Relation d'équivalence

Définition 6 : *Relation d'équivalence*

Soit E un ensemble non vide.

Une relation d'équivalence \sim sur E est une relation dans E qui est :

- ★ réflexive : $\forall x \in E, \quad x \sim x$
- ★ symétrique : $\forall (x; y) \in E^2, \quad x \sim y \implies y \sim x$
- ★ transitive : $\forall (x; y; z) \in E^3, \quad x \sim y \text{ et } y \sim z \implies x \sim z$

La relation d'équivalence la plus illustre est la relation d'égalité $=$. Nous allons en donner un autre exemple. Dans le plan affine \mathcal{P} , considérons l'ensemble \mathcal{P}_1 défini par :

$$\mathcal{P}_1 = \{(A; B) \mid A \in \mathcal{P} \text{ et } B \in \mathcal{P}\}$$

c'est-à-dire que \mathcal{P}_1 est l'ensemble des bipoints de \mathcal{P} .

Définissons sur \mathcal{P}_1 , la correspondance \sim suivante :

$$(A; B) \sim (C; D) \iff ABDC \text{ est un parallélogramme} \quad (31)$$

appelée relation d'équipollence.

Il est aisé de remarquer que \sim est bien une relation d'équivalence sur \mathcal{P}_1 .

Classe d'équivalence

Définition 7 : *Classe d'équivalence*

Soit E un ensemble non vide et \sim une relation d'équivalence sur E . Soit x un élément de E . La classe de x , notée $\text{cl}(x)$, est :

$$\text{cl}(x) = \{y \in E \mid x \sim y\} \quad (32)$$

En reprenant la relation d'équivalence de la formule (31), la classe d'équivalence d'un bipoint $(A; B)$ est l'ensemble des bipoints de \mathcal{P}_1 qui lui sont équipollents et la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$ est le vecteur \overrightarrow{AB} .

Espace quotient

Comme l'indique leur nom, les relations d'équivalence mettent en relation des éléments de E qui, d'un certain point de vue, peuvent être considérés comme équivalents. Il est alors souvent utile, pour mieux comprendre la structure de l'ensemble

E , de ne pas distinguer des éléments qui sont équivalents entre eux. Pour cela, nous introduisons la notion d'espace quotient :

$$E / \sim = \{\text{cl}(x), \quad x \in E\}$$

Dans notre exemple, l'espace quotient \mathcal{P}_1 / \sim peut être identifié au plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ associé au plan affine \mathcal{P} .

Références

- [Aud06] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006. ISBN 2-86883-883-9.
- [Béz86] P. Bézier. *Courbe et surface*, volume 4. Hermès, Paris, 2ème edition, Octobre 1986.
- [DP98] G. Demengel and J. P. Pouget. *Mathématiques des Courbes et des Surfaces. Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS*. Ellipse, 1998.
- [Far99] G. Farin. *NURBS from Projective Geometry to Pratical Use*. A K Peters, Ltd, 2 edition, 1999. ISBN 1-56881-084-9.
- [FJ89] J.C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] J.C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, volume RMA 24. Masson, 1992.
- [Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [Lad02] Y. Ladegaillerie. *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [Lad03] Y. Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [Leh03] D. Lehmann. *Une introduction à la géométrie projective*. Mathématiques 2ème cycle. Ellipse, 2003. ISBN 2-72978-1529-5.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Alain MASCRET
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUIERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUIERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 190 – 2^e semestre 2009

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE

Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques

IREM

9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex

☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39

@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM>