Jeu 81

Cas général (solution inspirée de `http://mathafou.free.fr/themes/parabole2.html`).

1. On place trois points A, B et C sur la parabole et on trace la droite (AB).

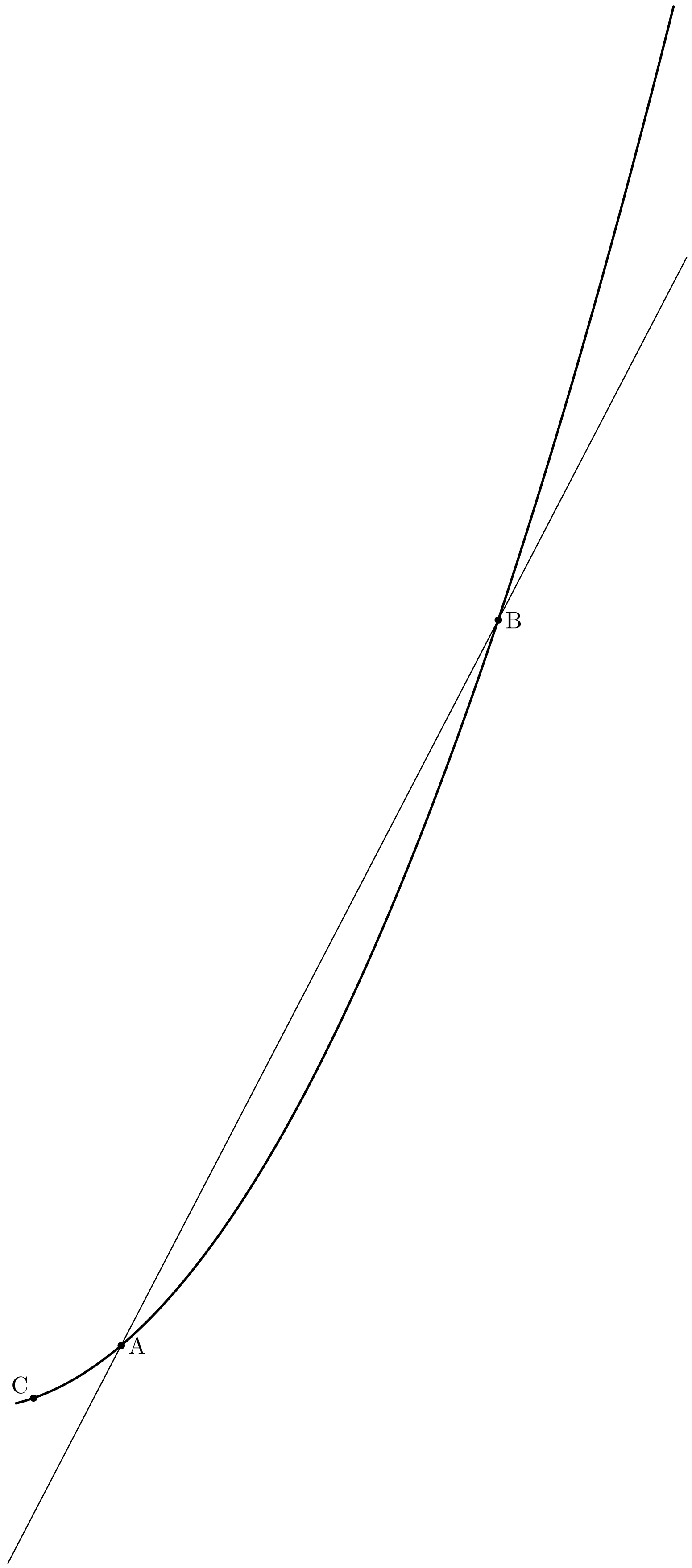

FIGURE 1 – *Étape 1*

2. On construit la parallèle à (AB) passant par C qui coupe la parabole en D.

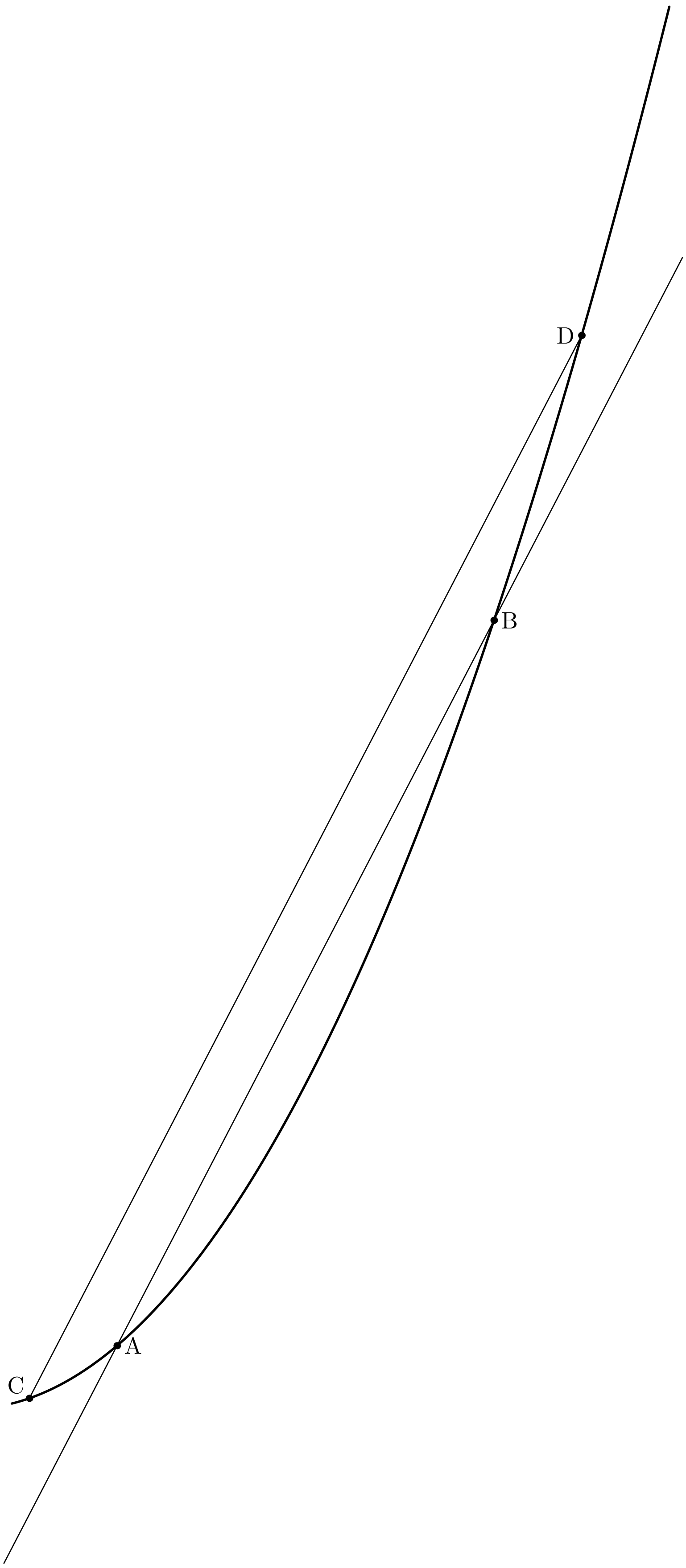

FIGURE 2 – *Étape 2*

3. On construit le milieu I de [AB] et le milieu [J] de [CD] et on trace la droite (IJ) ; cette droite est parallèle à l'axe de la parabole.

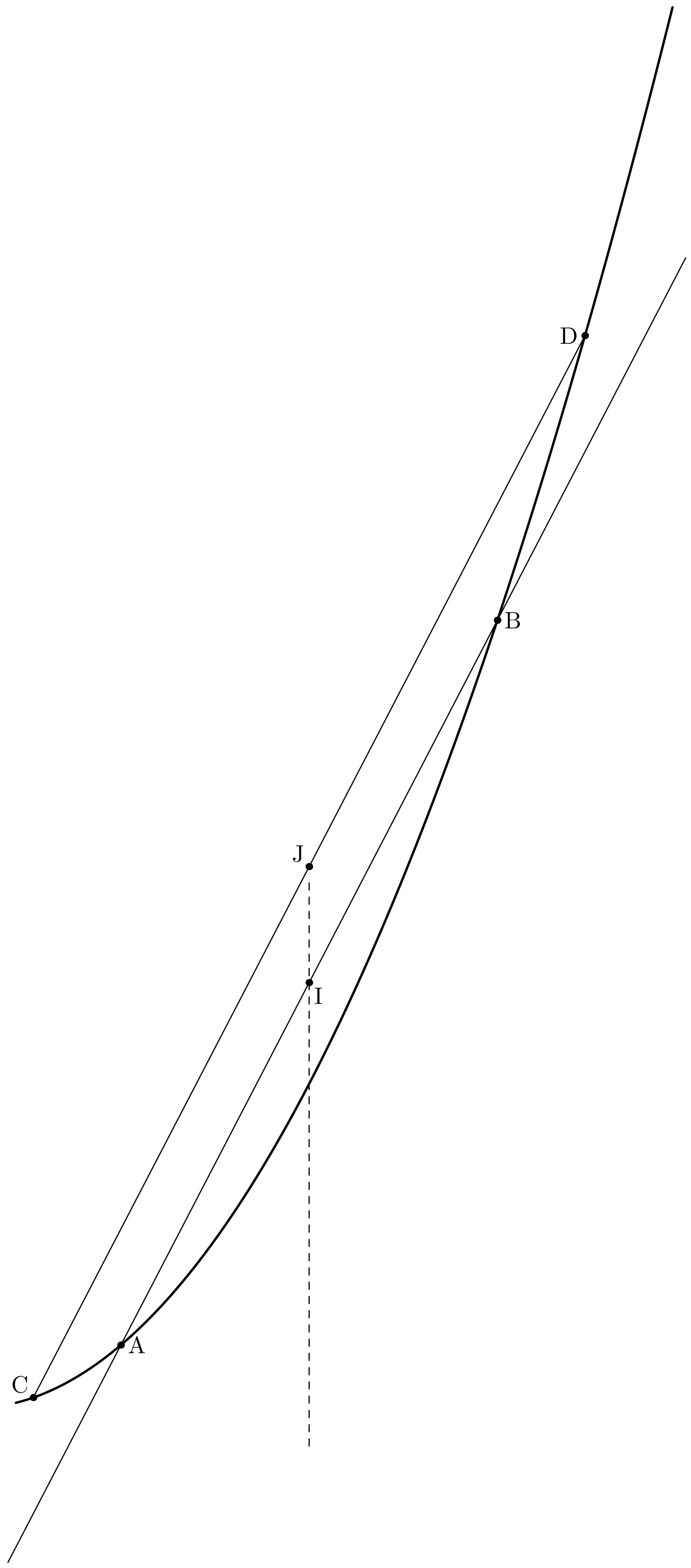

FIGURE 3 – *Étape 3*

4. On trace la droite parallèle à (IJ) passant par D qui coupe la droite (AB) en V.

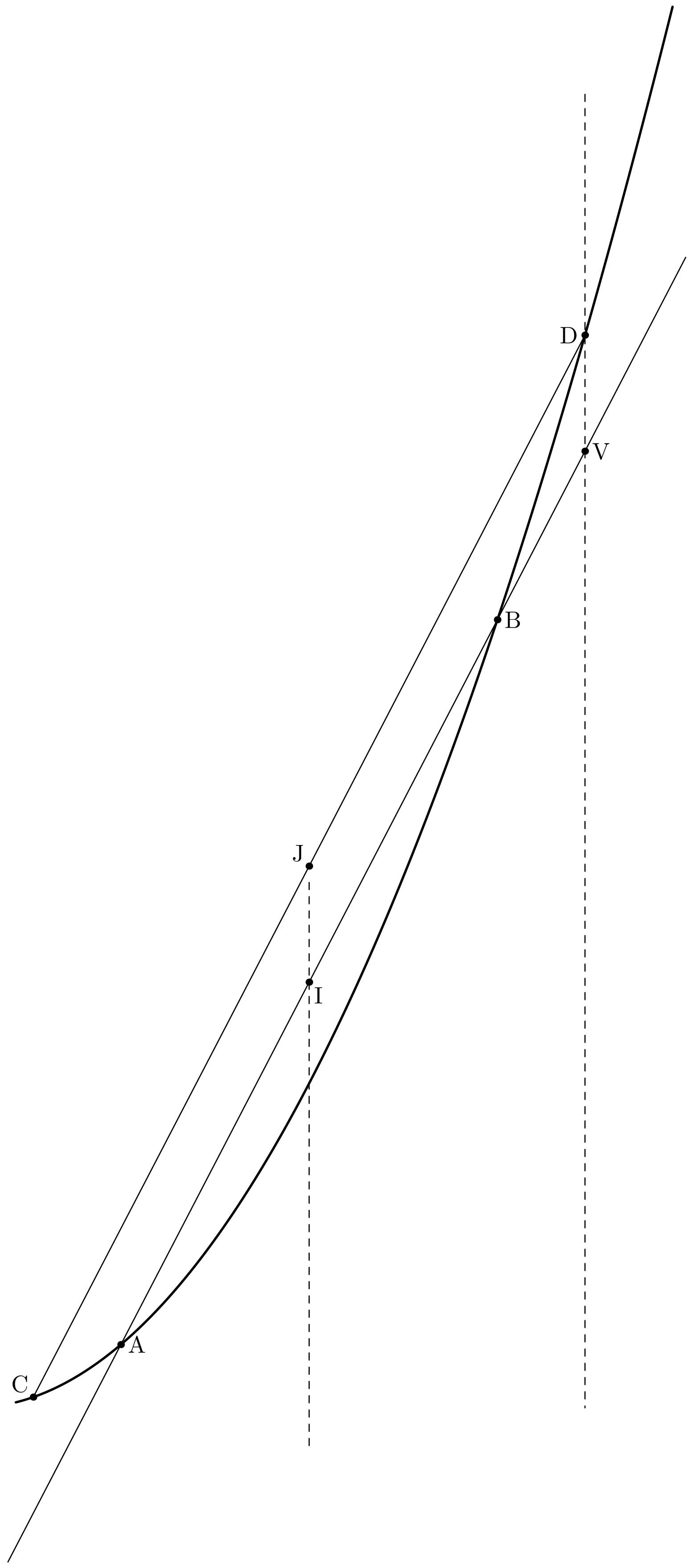

Figure 4 – *Étape 4*

5. On trace (AD) et (BC) qui se coupent en U.

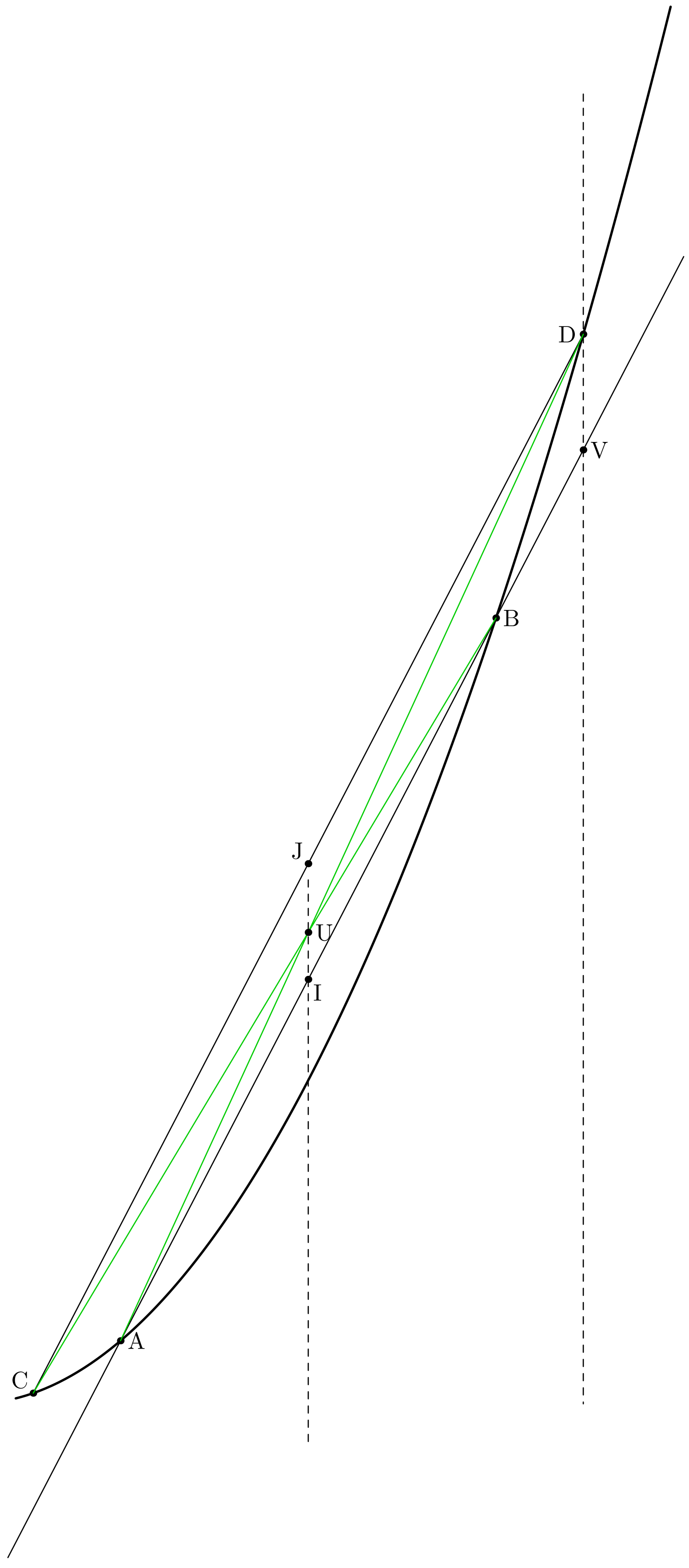

FIGURE 5 – *Étape 5*

6. On construit la parallèle à (IJ) passant par C qui coupe la droite (UV) en W. La droite (AW) est la tangente à la parabole en A.

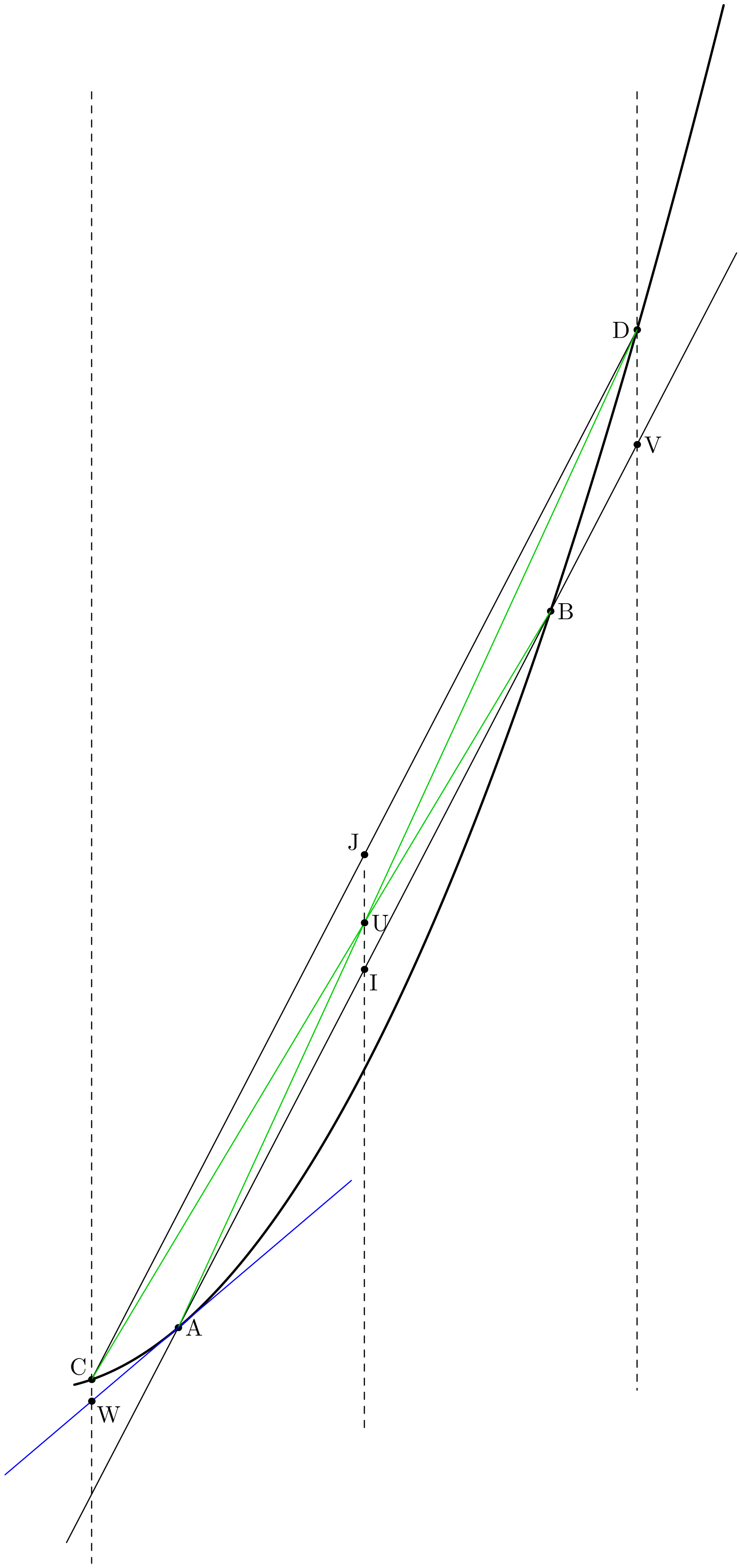

FIGURE 6 – *Étape 6*

7. On trace la droite parallèle à (IJ) passant par C qui coupe la droite (AB) en X.

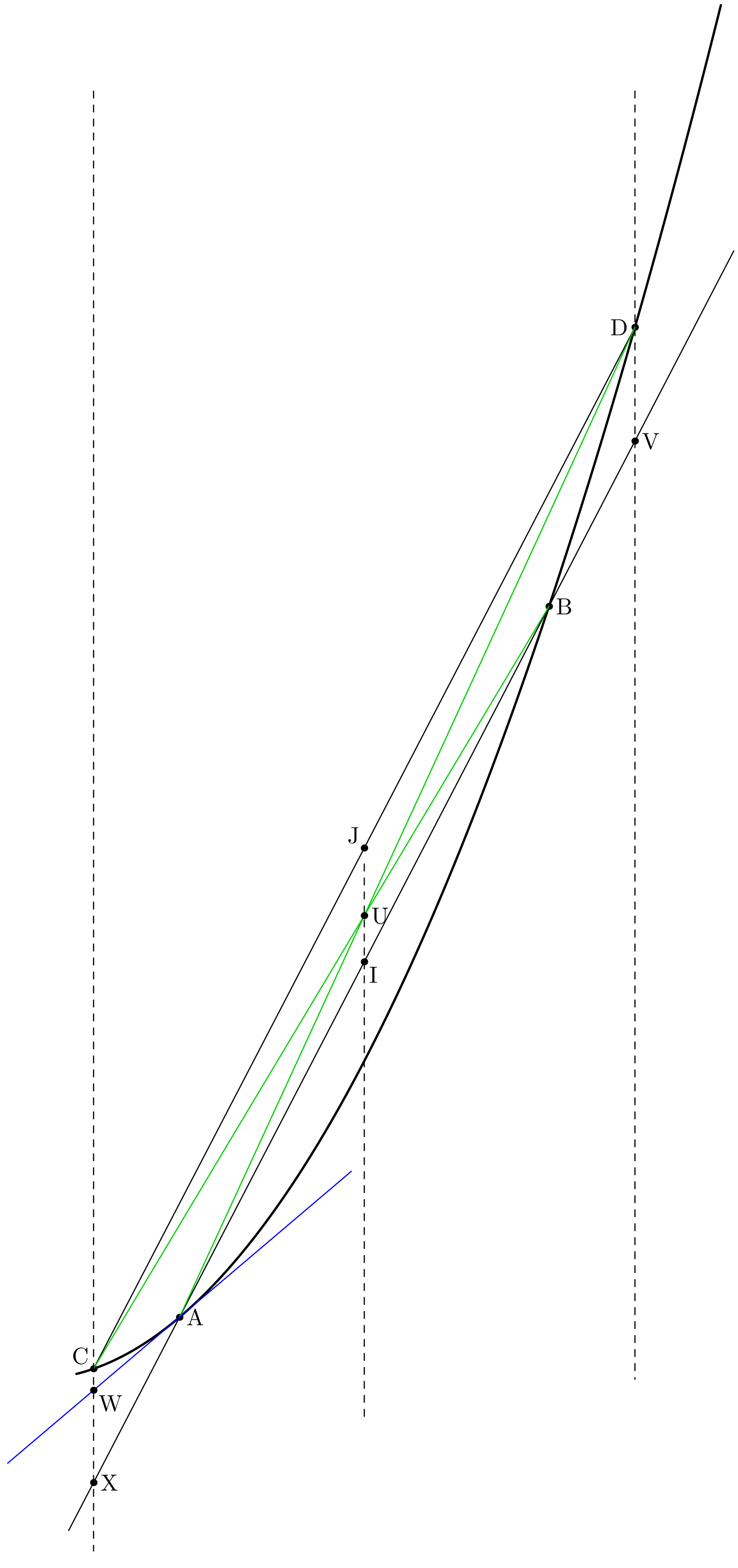

Figure 7 – *Étape 7*

8. On construit la parallèle à (IJ) passant par D qui coupe la droite (UV) en Y. La droite (BY) est la tangente à la parabole en B.

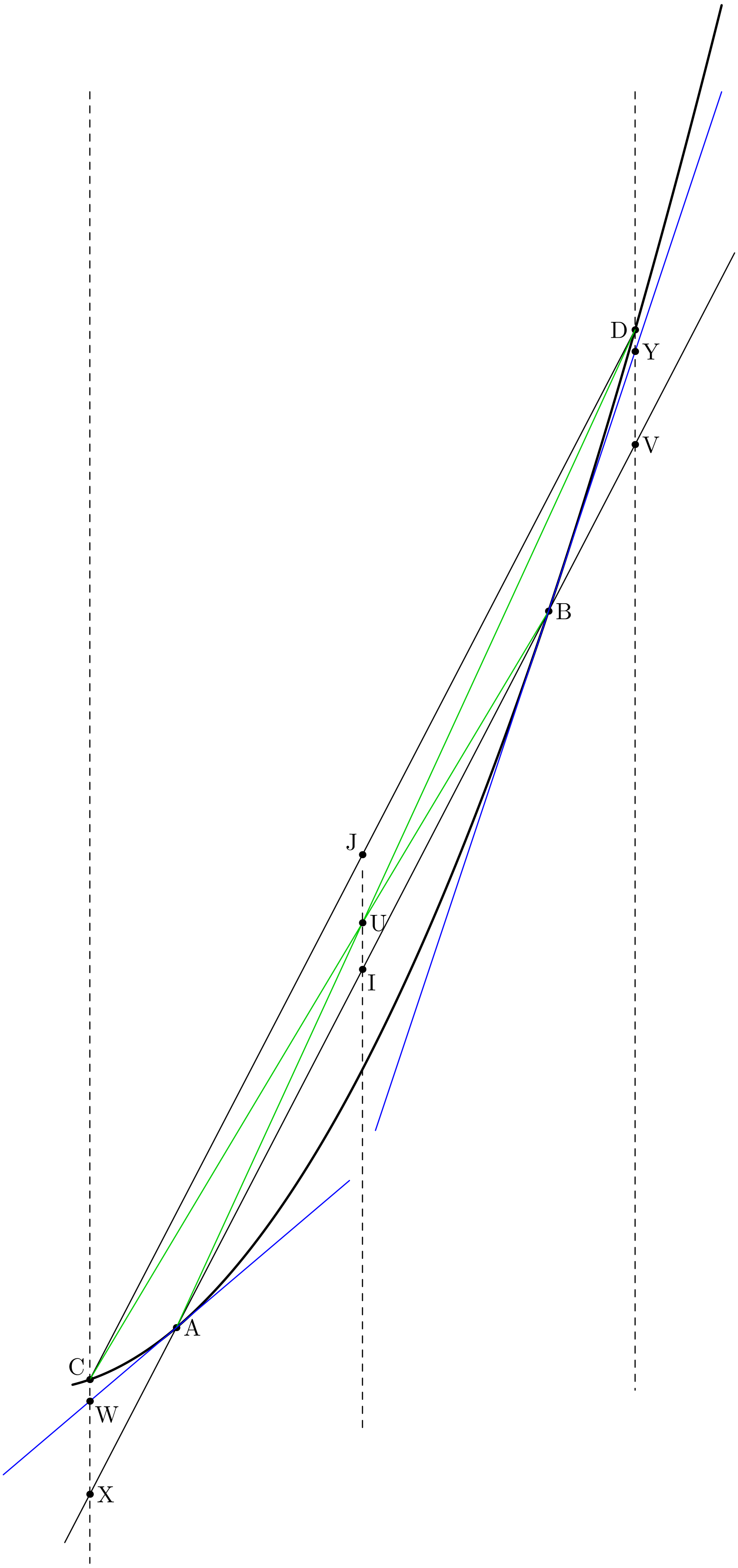

FIGURE 8 – *Étape 8*

9. On construit la demi-droite issue de A, réflexion de la demi-droite issue de A et de direction parallèle à (IJ) ; puis on construit la demi-droite issue de B, réflexion de la demi-droite issue de B et de direction parallèle à (IJ) ; ces deux demi-droites se coupent en F qui est le foyer de la parabole.

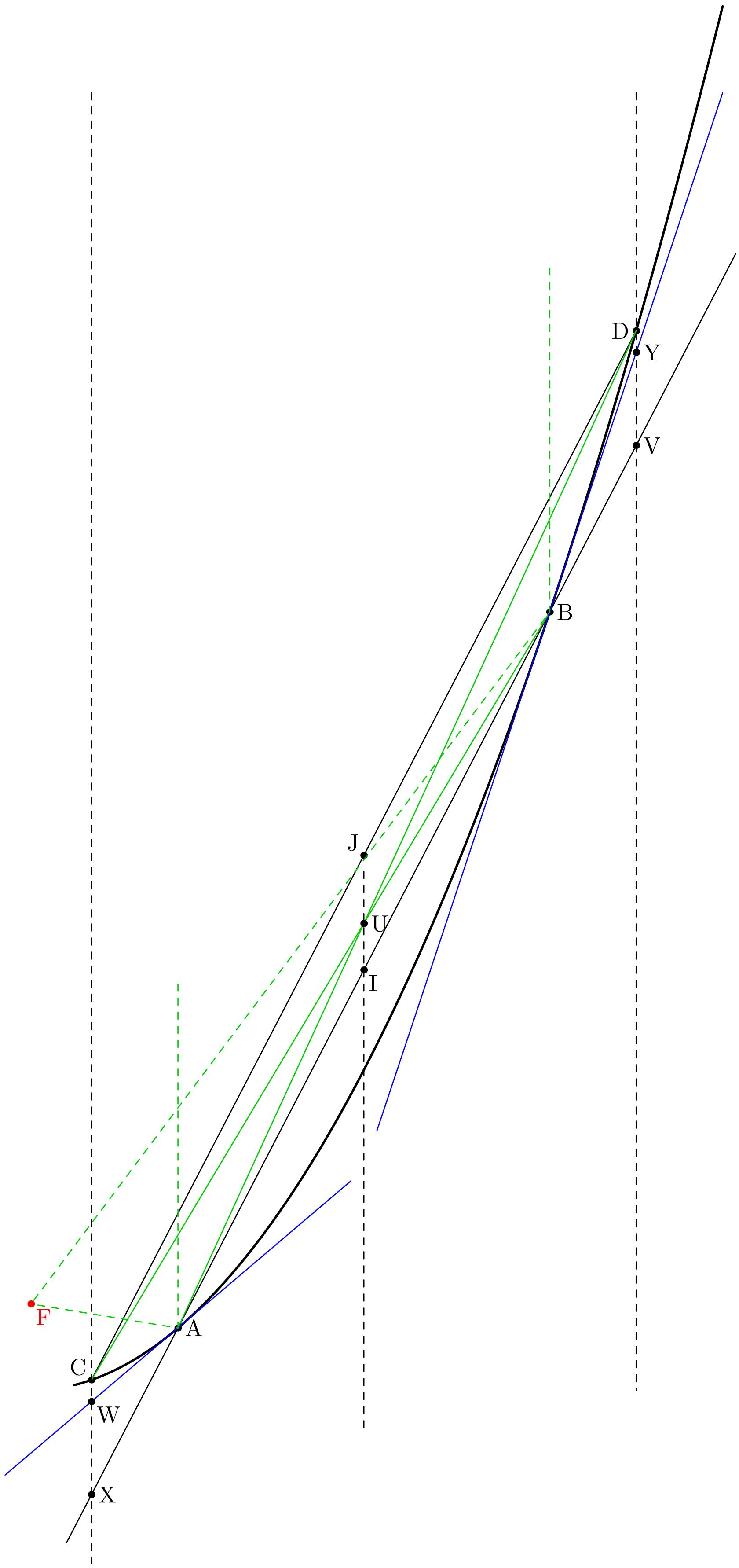

FIGURE 9 – *Étape 9*

10. On construit la parallèle à (IJ) passant par F : on obtient ainsi $\mathscr{F}$ qui est l'axe de la parabole.

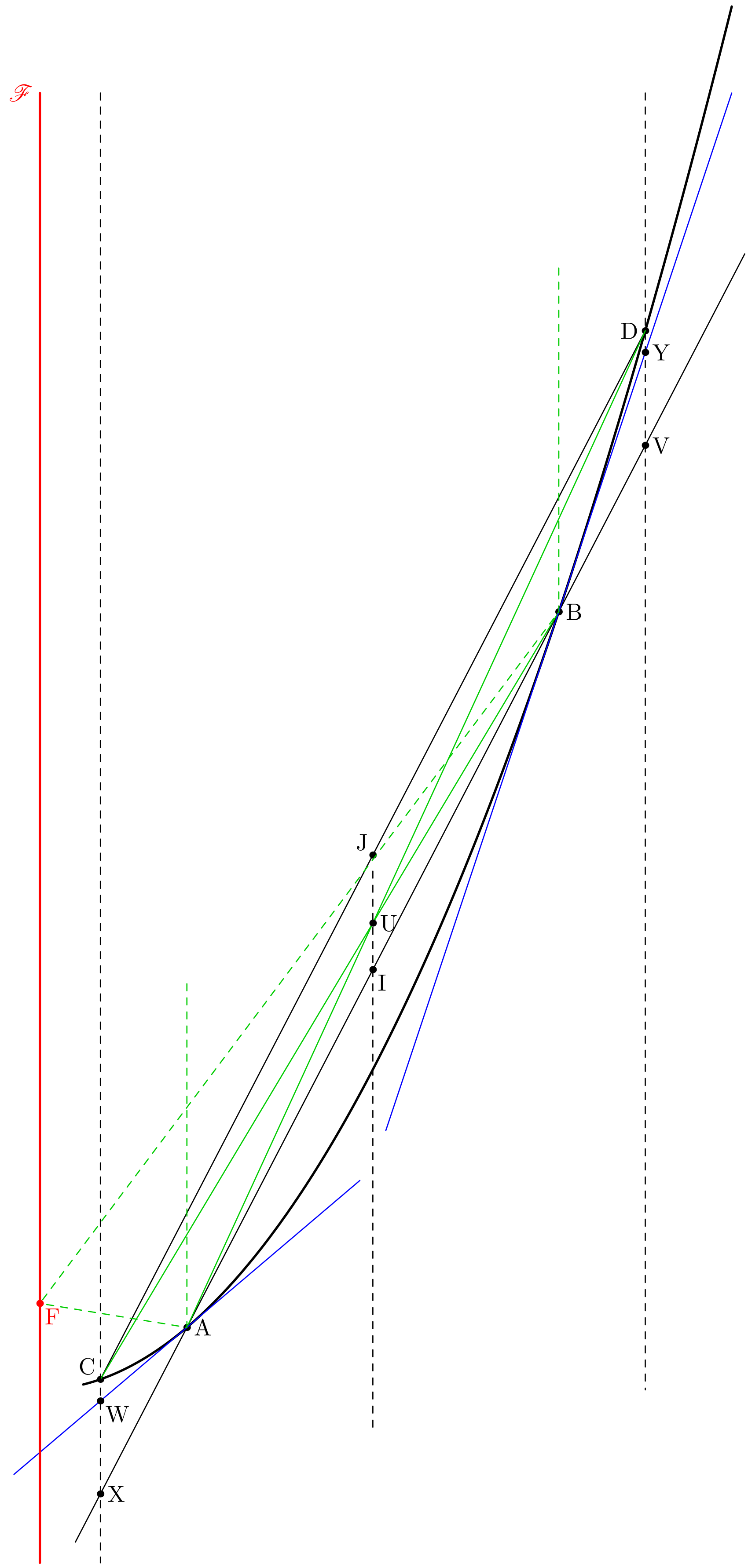

FIGURE 10 – *Étape 10*

11. On appelle K le point d'intersection de $\mathscr{F}$ avec (AW), la tangente à la parabole en A ; on construit L milieu de [AK], puis la droite orthogonale à $\mathscr{F}$ passant par L ; cette droite coupe $\mathscr{F}$ au point S qui est le sommet de la parabole.

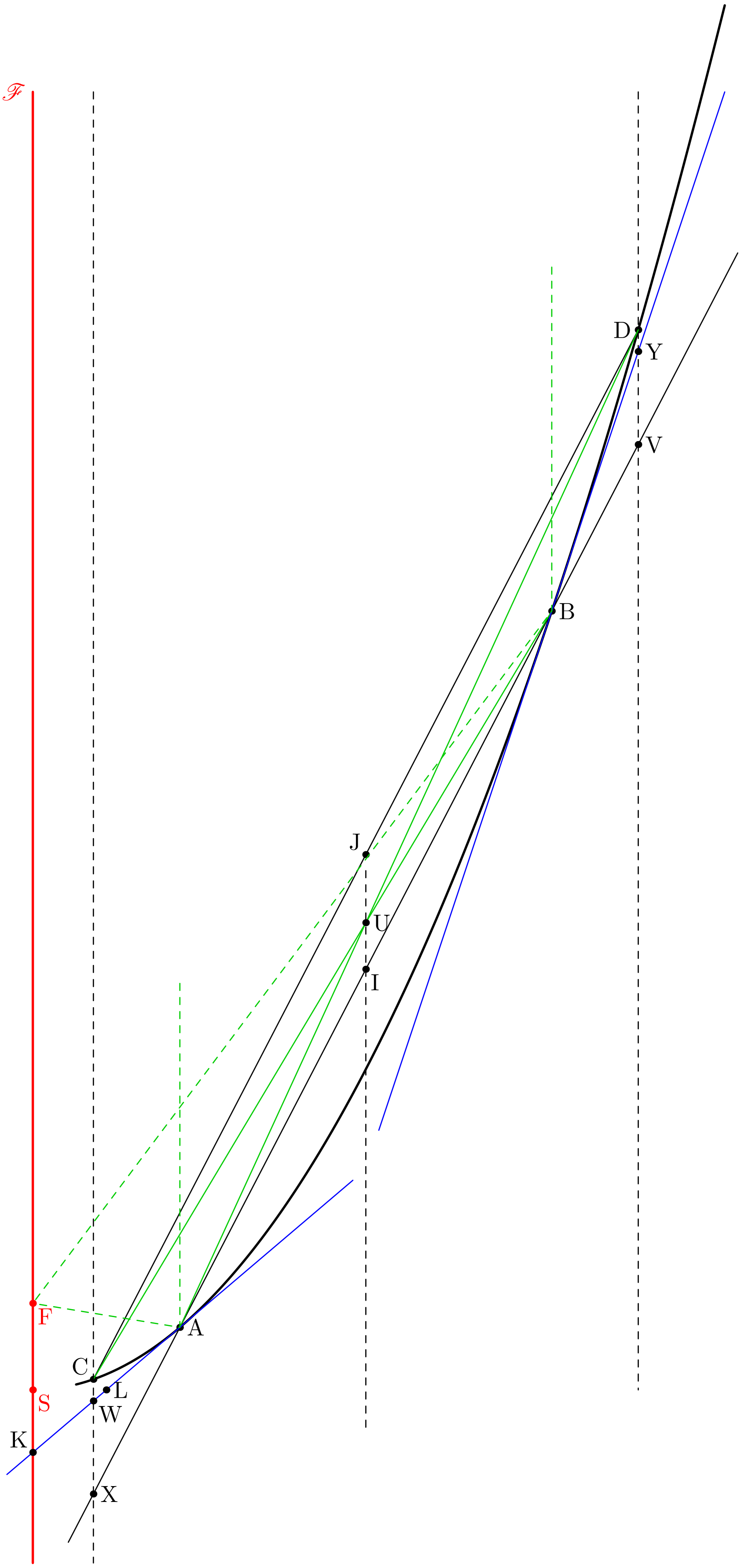

Figure 11 – *Étape 11*

12. On construit H sur $\mathscr{F}$ tel que S soit le milieu de [FH] puis la droite orthogonale à $\mathscr{F}$ passant par H ; cette droite $\mathscr{D}$ est la directrice de la parabole.

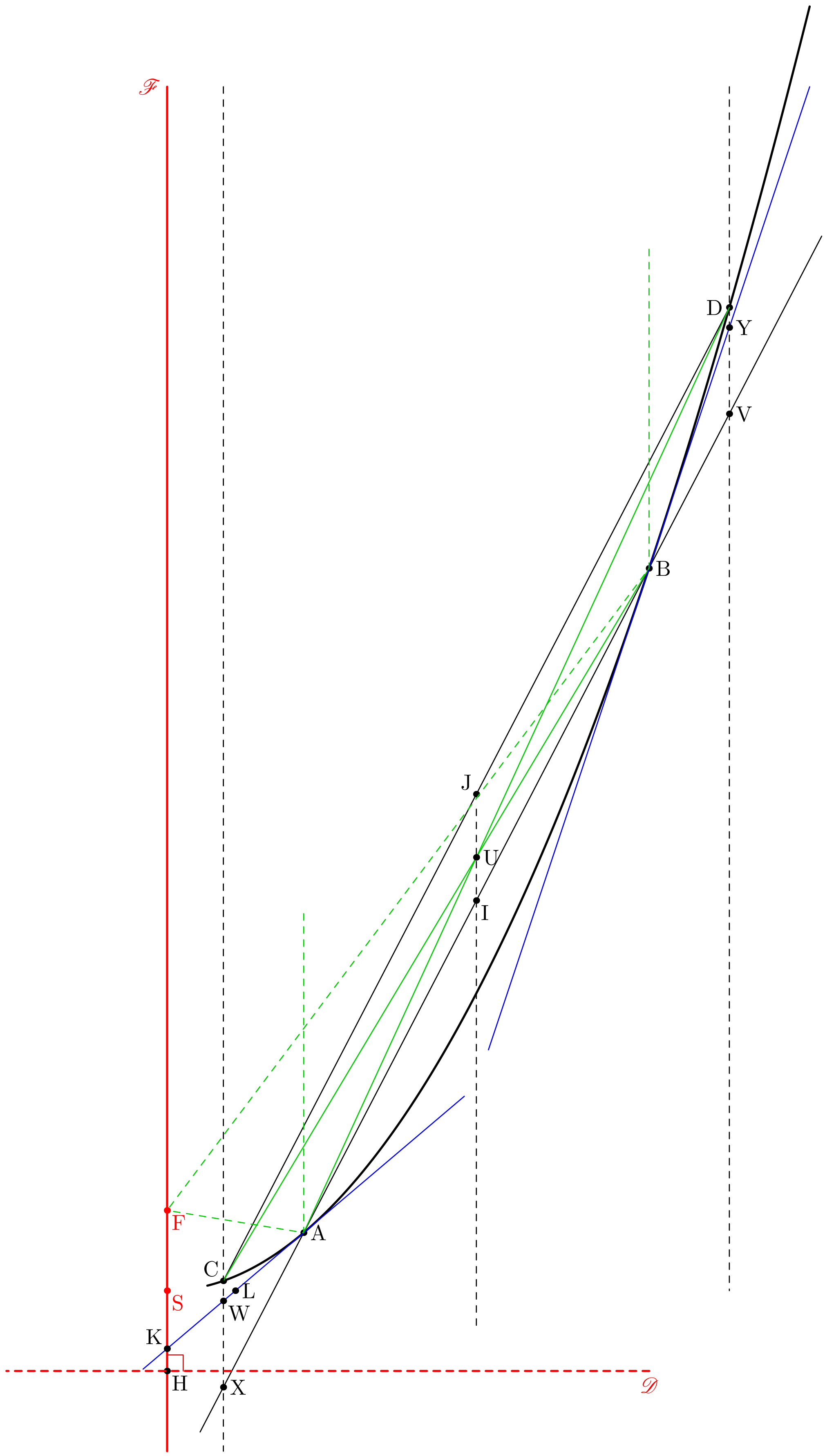

FIGURE 12 – *Étape 12*

Cas particulier : l'arc de parabole contient le sommet de la parabole

1. Étape 1 : placer deux points A et C sur l'arc de parabole, du même coté par rapport au sommet ; placer un point B sur l'arc de parabole de l'autre côté du sommet de la parabole ; tracer [AB] :

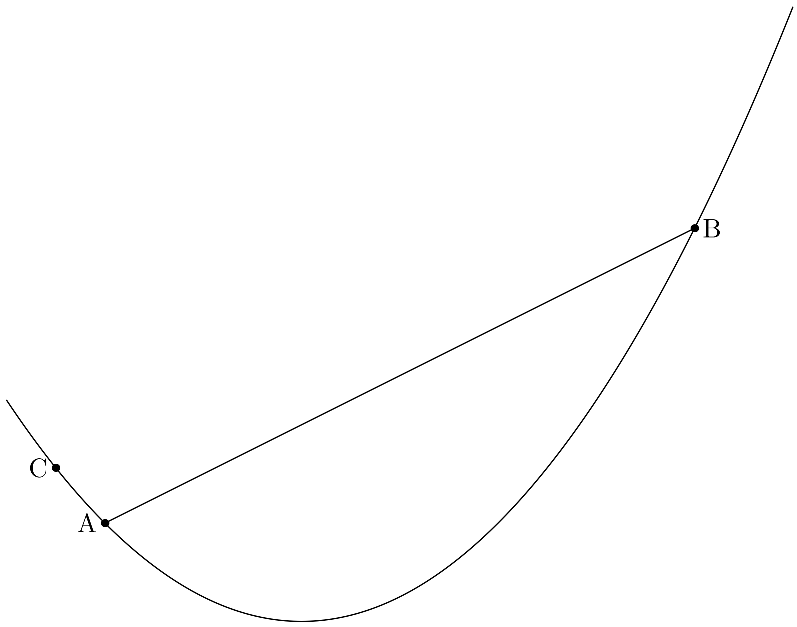

FIGURE 13 – *Étape 1*

2. Étape 2 : construire la parallèle à (AB) passant par C qui recoupe l'arc de parabole en un point D :

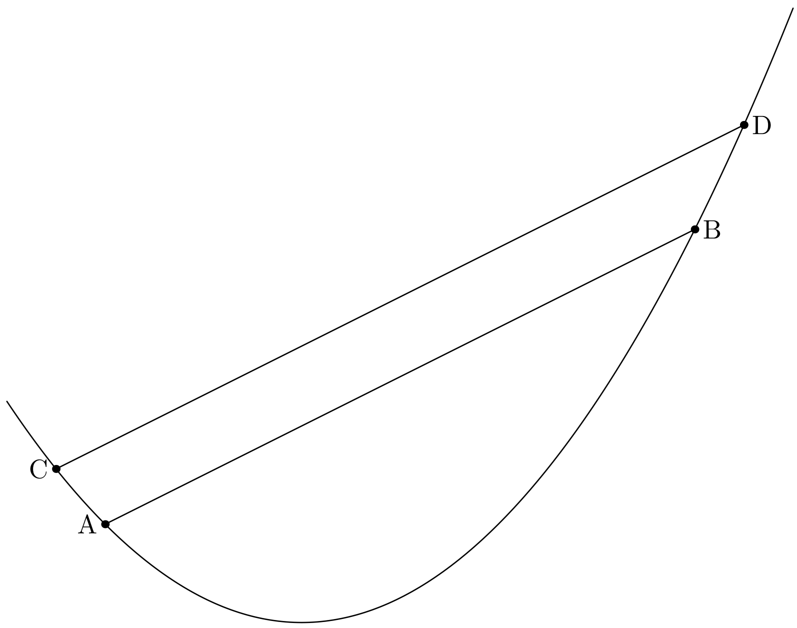

FIGURE 14 – *Étape 2*

3. Étape 3 : construire le milieu I de [AB] et le milieu J de [CD] et tracer la droite (IJ) :

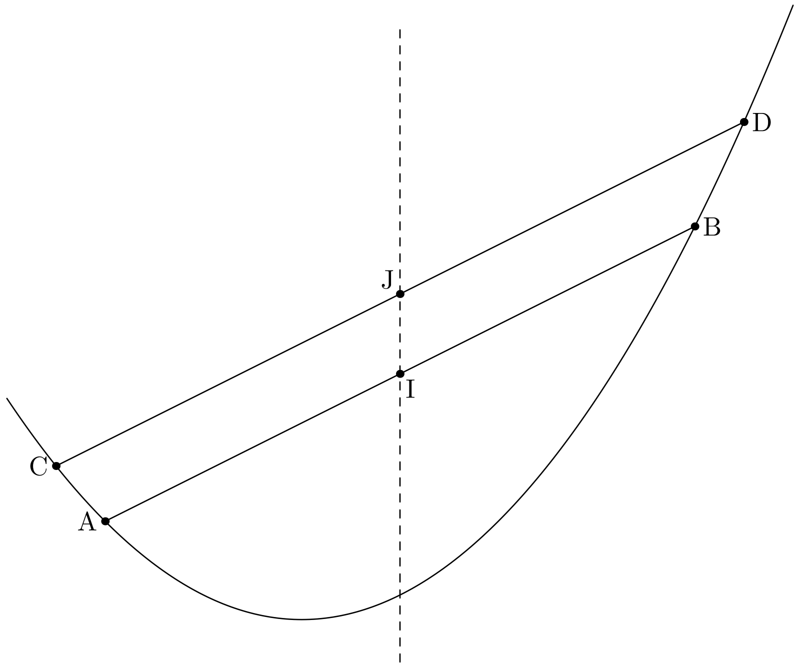

Figure 15 – *Étape 3*

Cette droite (IJ) est parallèle à l'axe de la parabole.

4. Étape 4 : construire la droite orthogonale à (IJ) passant par A ; cette droite recoupe la parabole en un point E :

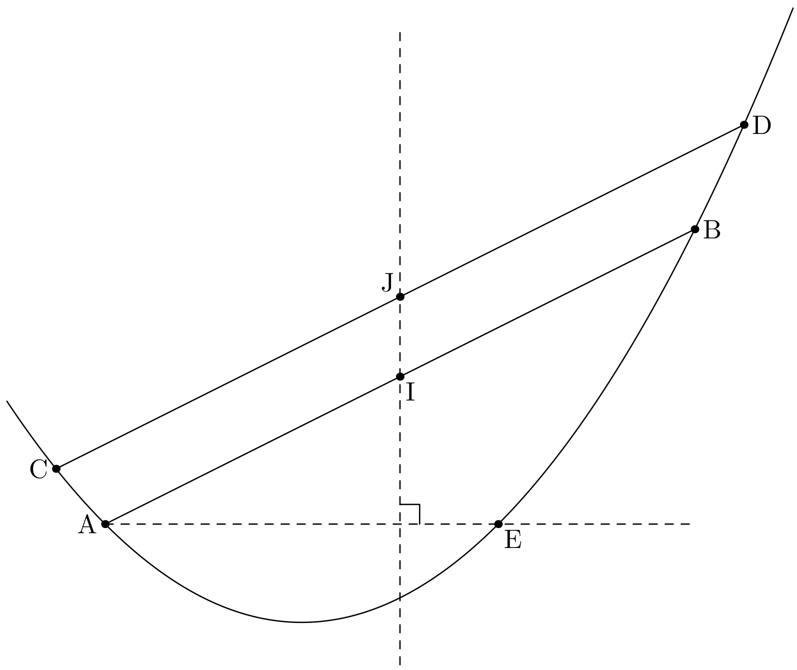

Figure 16 – *Étape 4*

5. Étape 5 : construire la médiatrice de [AE] : cette médiatrice est l'axe de la parabole.

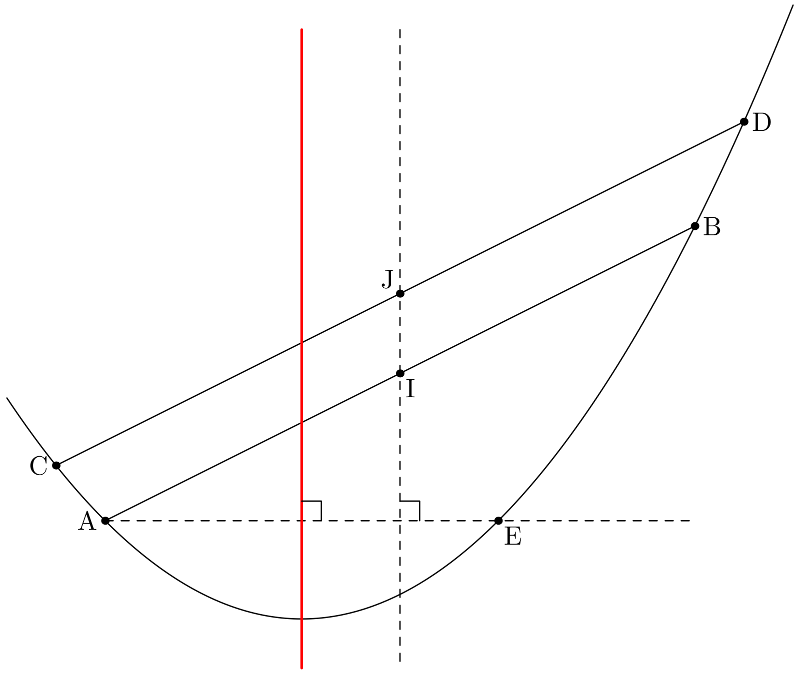

Figure 17 – *Étape 5*

Problème 81

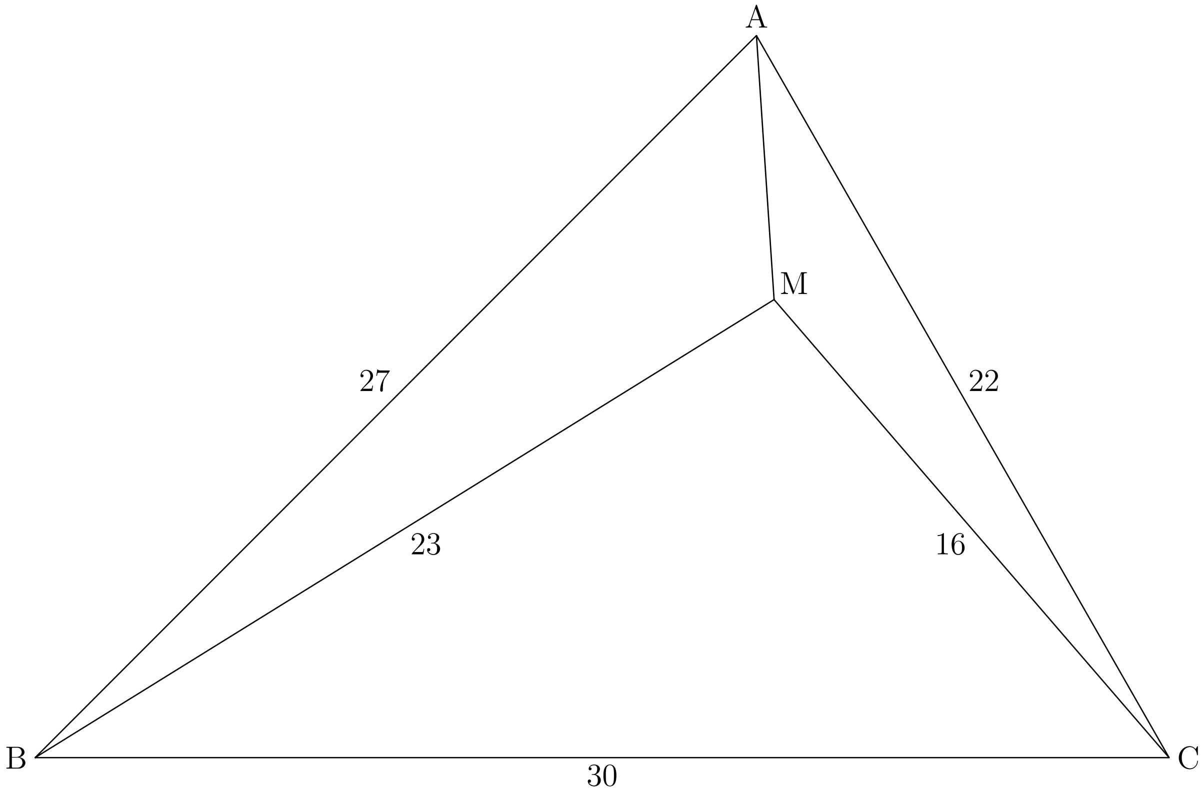

FIGURE 18 – AM $\stackrel{?}{=}$ 7

Notons $\alpha = \widehat{\mathrm{AMB}}$ et $\beta = \widehat{\mathrm{AMC}}$ et supposons que la distance AM soit égale à 7.
Alors, le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AMB donne :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2.\mathrm{AM}.\mathrm{BM}.\cos(\alpha)$$

c'est-à-dire :

$$27^2 = 23^2 + 7^2 - 2 \times 23 \times 7 \cos(\alpha)$$

soit :

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = -\frac{151}{2 \times 23 \times 7}} \tag{1}$$

De même, le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AMC donne :

$$\boldsymbol{\cos(\beta) = -\frac{179}{2 \times 16 \times 7}} \tag{2}$$

Et le même théorème dans le triangle BMC donne :

$$\cos\big(2\pi - (\alpha + \beta)\big) = -\frac{115}{2 \times 23 \times 16}$$

c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{2 \times 16}} \tag{3}$$

La relation (1) nous donne :

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) &= 1 - \frac{151^2}{(2\times 23\times 7)^2} \\
&= \frac{103\ 684 - 22\ 801}{(2\times 23\times 7)^2} \\
&= \frac{80\ 883}{(2\times 23\times 7)^2} \\
\text{donc : } \boldsymbol{\sin(\alpha)} &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{80\ 883}}{2\times 23\times 7}}
\end{aligned} \tag{4}$$

De même, la relation (2) donne :

$$\begin{aligned}
\sin^2(\beta) &= 1 - \frac{179^2}{(2\times 16\times 7)^2} \\
&= \frac{50\ 176 - 32\ 041}{(2\times 16\times 7)^2} \\
&= \frac{18\ 135}{(2\times 16\times 7)^2} \\
\text{donc : } \boldsymbol{\sin(\beta)} &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{18\ 135}}{2\times 16\times 7}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{2\times 16} &= \cos(\alpha+\beta) \quad \text{d'après (3)} \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&= -\frac{151}{2\times 23\times 7} \times \left(-\frac{179}{2\times 16\times 7}\right) - \frac{\sqrt{80\ 883}}{2\times 23\times 7} \times \frac{\sqrt{18\ 135}}{2\times 16\times 7} \quad \text{d'après (1), (2), (4) et (5)} \\
&= \frac{151\times 179 - \sqrt{80\ 883}\times\sqrt{18\ 135}}{2^2\times 23\times 16\times 7^2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
-5\times 2\times 23\times 7^2 &= 151\times 179 - \sqrt{80\ 883}\times\sqrt{18\ 135} \\
\sqrt{80\ 883}\times\sqrt{18\ 135} &= 151\times 179 + 5\times 2\times 23\times 7^2 \\
&= 38\ 299 \\
80\ 883\times 18\ 135 &= 38\ 299^2 \\
1\ 466\ 813\ 205 &= 1\ 466\ 813\ 401
\end{aligned} \tag{6}$$

et l'égalité (6) est manifestement fausse, donc $\boxed{\mathrm{AM} \neq 7}$.