N° 111 – Avril 2009

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Émilie du Châtelet, Femme, Mathématicienne
- Un vaccin contre le sudoku
- Représentation en 3 dimensions des tables de Karnaugh

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

En couverture : Portrait de Mme du Châtelet à sa table de travail, École française du XVIII^e siècle, conservé par la famille au château de Breteuil.

Sommaire

Articles

Editorial

Á l'heure où l'économie mondiale, la planète et les réformes françaises semblent aller de travers, qu'il est bon et reposant de se plonger dans une Feuille de Vigne !

Enfin reposant n'est pas vraiment le mot approprié à l'article de Michel Lafond qui nous propose un sudoku à trois dimensions. Mais ayant trouvé le sudoku initial un peu trop simple, il nous a enlevé soixante pour cent des indications. Fans de sudoku, accrochez-vous !

Marie-Noëlle Racine nous parle de l'importante oeuvre scientifique d'Émilie du Châtelet, personnalité marquante du XVIII^e^ siècle, physicienne à l'avant-garde de la nouvelle physique newtonienne et mathématicienne. Ce sont les talents de mathématicienne de la célèbre compagne de Voltaire que Marie-Noëlle souligne dans cet article. Elle y étudie comment la marquise du Châtelet décrivait la cycloïde dans les Institutions de physique et met en évidence la dextérité avec laquelle celle-ci savait manipuler les notions mathématiques les plus récentes. On oublie trop souvent que l'histoire regorge de grandes figures de femmes scientifiques, merci à Marie-Noëlle de le rappeler.

Bruno Pretot, lui, établit un très joli pont (ou plutôt un très joli tube!) entre logique et topologie en représentant les tables de Karnaugh comme des surfaces topologiques.

Je termine cet éditorial avec moins d'entrain que je ne l'avais commencé. Une petite note de tristesse pour rappeler qu'il y avait à Dijon un mathématicien spécialiste des surfaces topologiques. Il avait su transmettre sa passion des mathématiques et de la topologie à nombre de générations d'étudiants ainsi qu'à ses collègues. Bernard Perron est décédé fin décembre 2008.

C. Labruère Chazal

Agenda

Les énoncés et corrigés des RALLYES peuvent être consultés sur le site de l'IREM http://math.u-bourgogne.fr/IREM/, rubrique "Rallyes".

Un nouveau groupe à l'IREM de Dijon :

"Utiliser des logiciels libres pour faire de la géométrie"

Ce groupe s'adresse à tous ceux qui utilisent ou voudraient utiliser des logiciels pour faire de la géométrie. Il sera ce que ses membres en feront.

Si vous êtes intéressé par l'utilisation d'un logiciel en géométrie, que vous soyez « spécialiste » d'un logiciel ou au contraire débutant, ce groupe est fait pour vous.

Nous pourrons mettre en commun notre expérience des différents logiciels et de leur utilisation ainsi que répondre au besoin d'aide et de formation ressenti par de nombreux collègues en ce domaine.

Pour l'instant, je vous propose de me contacter par courriel (mascret@ac-dijon.fr) et de me préciser ce que vous attendez d'un tel groupe, qui pourrait fonctionner en partie par internet. Une réunion est toutefois prévue à l'IREM dès cette année scolaire, afin de préciser ce que nous voulons faire et pour donner officiellement le départ à ce groupe.

Alain Mascret

4eme JOURNÉE D'ACTIVITÉS : 14 MAI 2009 (9 h – 16 h)

"MATHÉMATIQUES ET ART"

***Matin** :*
Compte rendu d'expériences et d'activités autour du thème ***frises et pavages*** dans l'art : écoles primaires, classes de collège ou de lycée

Après midi :
14 h - 16 h : VISITE DU MUSEE des Beaux-Arts de Dijon, sous la conduite de Liliane BOCCACIO (guide-conférencière au Musée des Beaux-Arts), sur le thème ***"QUE DE DALLES !"***
Dès l'antiquité, les artistes creusent l'espace pictural par l'intégration de dallages, de pavages plus ou moins sophistiqués, mais toujours géométriques. Tentatives et tentations de la perspective, mais aussi jeux d'illusions : entre technicité et maladresse…
Nous questionnerons également les frises et le rôle de leur présence répétée dans les oeuvres peintes ou sculptées : ne sont-elles que purement décoratives ou aident-elles à la circulation du regard ? …

Stages d'avril à juin 2009 dont l'IREM est le responsable pédagogique

Intitulé de l'action	Intervenants	Dates	Lieux
Histoire des nombres et de la géométrie	P. GUYOT F. METIN	01/04/09	AUXERRE
Statistique et probabilité en lycée	C. LABRUERE CHAZAL & A. JEBRANE	16/04/09	IREM

Jeux et Problèmes

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

JEU - 61

Quel est le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de gauche à droite ?

PROBLÈME - 61

Dans R$^+$ démontrer que si $a \geq b \geq c$ avec $a + b + c = 1$,
alors $a^2 + 3\,b^2 + 5\,c^2 \leq 1$.

Si vous avez compris le truc, vous devriez démontrer sous les mêmes hypothèses que :
$$a^3 + 7\,b^3 + 19\,c^3 \leq 1.$$

Solutions

JEU - 60

x, y, z sont trois réels distincts tels que : $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=S$.

Démontrer que $S = -abc$.

Solution :

Par hypothèse on a $\frac{1}{c}=a+\frac{1}{b}-b=\frac{ab+1-b^2}{b}$ et $c=a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a^2b+a-b}{ab}$

On a donc $\frac{b}{ab+1-b^2}=\frac{a^2b+a-b}{ab}$ d'où en développant et en regroupant :

$a^3b^2 + a^2(2b - b^3) + a(1 - 3b^2) + b^3 - b = 0$ qu'on factorise ainsi :
$$(a - b)(a^2b^2 + 2ab - b^2 + 1) = 0.$$

Puisque $a \neq b$ on tire $a^2b^2 + 2ab - b^2 + 1 = 0$ qu'on factorise ainsi :
$$[(a - 1)b + 1]\,[(a + 1)b + 1] = 0.$$

L'un des facteurs est nul :

- Si c'est le premier, $b=\dfrac{1}{1-a}$ entraîne $S=a+\dfrac{1}{b}=a+1-a=1$,

de plus $$c=\frac{b}{ab+1-b^2}=\frac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{a}{1-a}+1-\dfrac{1}{(1-a)^2}}=\frac{a-1}{a}$$ après simplification.

(1 – a est non nul car $b=\dfrac{1}{1-a}$ implique $a \neq 1$).

Donc $abc=a\ \dfrac{1}{1-a}\ \dfrac{a-1}{a}=\ -1$ et on a bien $S\ =\ 1\ =\ -\ abc$.

- Si c'est le second, $b=-\dfrac{1}{1+a}$ entraîne $S=a+\dfrac{1}{b}=a-1-a=-1$

de plus $$c=\frac{b}{ab+1-b^2}=\frac{-\dfrac{1}{1+a}}{-\dfrac{a}{1+a}+1-\dfrac{1}{(1+a)^2}}=-\frac{a+1}{a}$$ après simplification.

(1 + a est non nul car $b=-\dfrac{1}{1+a}$ implique $a \neq -1$).

Donc $abc=a\ \left(-\dfrac{1}{1+a}\right)\left(-\dfrac{a+1}{a}\right)=\ 1$ et on a bien encore $S\ =\ -\ 1\ =\ -\ abc$.

CQFD.

Remarquons que les hypothèses (et donc la conclusion !) sont vérifiées pour

$$a\ =\ 2\ ;\ b\ =\ -1\ ;\ c\ =\ \frac{1}{2}.$$

PROBLÈME - 60

Démontrer que dans $\mathbb{R}^3$, si M et M' sont deux point à coordonnées rationnelles alors la distance de M à M' est différente de $\sqrt{7}$.

Solution :

Soients $(\dfrac{x}{p},\dfrac{y}{p},\dfrac{z}{p})$ et $(\dfrac{x'}{q},\dfrac{y'}{q},\dfrac{z'}{q})$ les coordonnées de M et M'.

Si la distance de M à M' était égale à $\sqrt{7}$, en calculant MM'^2, on arriverait après multiplication par p^2q^2 à une égalité de la forme :

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ avec a, b, c, d entiers et où $d = pq$ n'est pas nul.

On va montrer par l'absurde que ceci est impossible :
Si a, b, c étaient tous pairs, d le serait également, et on pourrait dans (1) diviser a, b, c, et d par 2. On va donc supposer dans la suite que a, b, c ne sont pas tous pairs.

Posons $d = 2^e\,\delta$ avec $\delta = 2i + 1$ impair.

(1) devient $$a^2 + b^2 + c^2 = 7 \times 4^e\,\delta^2 \qquad (2)$$

Or $\delta^2 = (2i + 1)^2 = 4\,i^2 + 4i + 1 = 4\,i\,(i + 1) + 1$.
$i\,(i + 1)$ est nécessairement pair, donc δ^2 est congru à 1 modulo 8.
$7\delta^2$ est donc congru à 7 modulo 8 et (2) pourrait s'écrire

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4^e \times (8k + 7) \quad k \text{ entier} \qquad (3)$$

Mais, modulo 8, un carré ne peut être que : 0, 1 ou 4.
L'examen des 3^3 possibilités de $a^2 + b^2 + c^2$ modulo 8 montre que
$a^2 + b^2 + c^2$ n'est jamais congru à 7 modulo 8.

Pour terminer, distinguons trois cas dans (3) :

Si $e = 0$ (3) devient $a^2 + b^2 + c^2 = (8k + 7)$ quantité congrue à 7 modulo 8, on vient de voir que c'est impossible.
Si $e = 1$ (3) devient $a^2 + b^2 + c^2 = 4(8k + 7)$ quantité congrue à 4 modulo 8
Si $e \geq 2$ 4^e est multiple de 8, et alors $a^2 + b^2 + c^2$ serait congru à 0 modulo 8.
Dans ces deux derniers cas, $a^2 + b^2 + c^2$ serait pair, mais ceci n'est possible que si a, b, c sont tous les trois pairs (puisque le seul résidu impair modulo 8 est 1)
C'est justement la situation qu'on a exclue au début.

(1) est impossible, et par suite, si M et M' sont deux point à coordonnées rationnelles dans R^3 alors leur distance est différente de $\sqrt{7}$.

Par contre dans R^4 la distance entre (0,0,0,0) et (1,1,1,2) est $\sqrt{7}$.

Solutions et compléments de Beczkowski :

Jeu - 60

Cherchons à calculer *a, b, c* en fonction de S.

$c = S - \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{c} = \frac{a}{aS - 1}$ (si $aS - 1 \neq 0$)

$b = S - \frac{1}{c} = S - \frac{a}{aS - 1} = \frac{aS^2 - S - a}{aS - 1}$ et $\frac{1}{b} = \frac{aS - 1}{aS^2 - S - a}$ (si $b \neq 0$ donc $cS - 1 \neq 0$)

$a = S - \frac{1}{b} = \frac{aS^3 - S^2 - 2aS + 1}{aS^2 - S - a}$ (si $b \neq 0$ donc $cS - 1 \neq 0$)

On obtient : $(S^2 - 1)a^2 - S(S^2 - 1)a + (S^2 - 1) = 0$

soit $(S^2 - 1)(a^2 - Sa + 1) = 0$

Si $S^2 - 1 \neq 0$ on a le choix entre deux valeurs de a inverses l'une de l'autre.

Mais *a, b, c* jouant des rôles symétriques on aurait à choisir entre les mêmes valeurs pour b et c. Deux d'entre eux seraient égaux et l'énoncé serait contredit.

On a donc nécessairement $S = \varepsilon = \pm 1$ et $a \neq \varepsilon$.

On en déduit : $b = \frac{-\varepsilon}{\varepsilon a - 1}$ et $c = \frac{\varepsilon a - 1}{a}$ et $-abc = \varepsilon = S$

Problème - 60

Si j'en crois Marc Guinot, auteur chez Aléas d'une arithmétique pour amateurs, un certain L.Aubry a publié, en 1912, une démonstration d'un théorème qui affirme que tout entier somme de 2, 3 ou 4 carrés de rationnels est aussi somme du même nombre de carrés d'entiers.

On peut donc dire que si la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ contenait un point à coordonnées rationnelles elle contiendrait aussi un point à coordonnées entières.

Or il est facile de vérifier que 7 ne peut pas être somme de 3 carrés d'entiers (de 2 non plus…).

Pas de points à coordonnées entières donc pas de points à coordonnées rationnelles.

Aucun point à coordonnées entières, de l'espace ou du plan, ne peut être à la distance $\sqrt{7}$ de l'origine.

Ce résultat est un plus général que celui proposé par l'énoncé car il s'applique à deux points qui définissent un vecteur à coordonnées rationnelles sans que les coordonnées de ces points le soient nécessairement.

Autre façon de traiter le problème : l'inévitable Gauss a démontré qu'un entier ne peut être somme de trois carrés que si et seulement si, il n'est pas de la forme : $4^p(8q + 7)$ où p et q sont entiers.

En appelant t le dénominateur commun à nos trois coordonnées (ou différences de coordonnées) on doit prouver que, pour toute valeur de t, l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$ est sans solutions entières.

Si t est impair, t^2 a pour reste 1 dans la division par 8 et $7t^2 = 7(8q+1) = 8q' + 7$

Si t est pair on peut écrire $t = 2^p\ u$ d'où $t^2 = 4^p u^2$ avec u impair.

On a alors : $7\ t^2 = 7 \times 4^p(8q + 1) = 4^p\ (8q' + 7)$ et $7t^2$ a donc toujours la forme interdite.

Généralisation du problème 59

Ce problème m'a amené à envisager les choses de façon un peu plus générale tout en revenant à nos chers radians.

Soit sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ une subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}$:

$$\left\{0,\frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n},...,\frac{k\pi}{2n},...,\frac{(n-1)\pi}{2n},\frac{\pi}{2}\right\}$$

et associons à cette subdivision les sommes

$$S^- = \cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{3\pi}{2n} + ... + \cos^2\frac{(n-3)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n} + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

et

$$S^+ = \cos^2(0) + \cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{3\pi}{2n} + ... + \cos^2\frac{(n-3)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Pour calculer la valeur de ces sommes, la même méthode, *regrouper deux à deux les termes « symétriques »,* fonctionne encore.

Dans le cas où n est pair :

$$S^- = (\cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}) + (\cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}) + ... + (\cos^2\frac{(\frac{n}{2}-1)\pi}{2n} + \cos^2\frac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{2n})$$

$$+ \cos^2\frac{\frac{n}{2}\pi}{2n} + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

Soit $$S^- = (\frac{n}{2}-1)\times 1 + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Dans le cas où n est impair

$$S^- = (\cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}) + (\cos^2\frac{2\pi}{2n} + \cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}) + ... + (\cos^2\frac{(\frac{n-1}{2})\pi}{2n} + \cos^2\frac{(\frac{n+1}{2})\pi}{2n}) + \cos^2\frac{\pi}{2}$$

Soit $$S^- = \frac{n-1}{2}$$

Donc quelle que soit la parité de n, on a $\quad S^- = \dfrac{n-1}{2}$

Pour S^+ on peut se servir des résultats précédents :

$$S^+ = \cos^2(0) + S^- - \cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ces deux sommes, S^- et S^+, font penser aux sommes de Riemann minorante et majorante de la fonction cos^2x sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur laquelle elle est décroissante.

$$\Sigma^- = \frac{\pi}{2n}S^- = \frac{(n-1)\pi}{4n}$$

$$\Sigma^+ = \frac{\pi}{2n}S^+ = \frac{(n+1)\pi}{4n}$$

associées à l'intégrale $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ modulo la subdivision considérée plus haut.

Et tout rentre dans l'ordre. En effet

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma^- = \lim_{n\to\infty}\Sigma^+ = \frac{\pi}{4}$$

et $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$

Daniel Reisz

Emilie du Châtelet

Femme, mathématicienne

Marie-Noëlle RACINE,
IREM Dijon, France
mnracine@orange.fr

Résumé : Émilie du Châtelet, mathématicienne de la première moitié du XVIII^{e} siècle contribua à propager en France les idées de Newton sur la gravitation. Elle est de nos jours plus connue comme compagne de Voltaire que pour ses écrits dont les principaux sont les Institutions de physique et la traduction des principes mathématiques de la philosophie naturelle de M. Newton.

Mots-clés : mathématicienne, principia, Newton, Émilie, Châtelet, Voltaire, cycloïde, pendule, horloge, isochronisme, brachistochrone, tautochrone, développée, développante, institutions de physique, sciences dix-huitième siècle.

Madame du Châtelet.

De l'Antiquité à nos jours, les femmes ont souvent dû lutter pour s'instruire, pour exister en tant que chercheur-mathématicienne ou en tant qu'enseignant et être à égalité avec leurs collègues hommes. Peu de femmes ont été des chercheurs (ou l'histoire n'a pas retenu leurs noms), elles ont souvent eu un rôle de pédagogues, agissant pour transmettre des connaissances nouvelles et les mettre à portée du public. Si l'on vous demande de citer des noms de mathématiciens, il vous en vient facilement à l'esprit, mais des noms de mathématiciennes, que nenni ! N'en est-il pas d'ailleurs de même dans le domaine de la physique, de la médecine, de la musique, de la peinture, … ? Toutefois, en littérature ou en politique, il nous vient facilement des noms d'auteures, de reines, ... Des femmes mathématiciennes, il y en eut pourtant ! L'une est morte d'avoir voulu faire des mathématiques (voir article Hypatie, femme, grecque, mathématicienne oubliée, Feuille de Vigne n°107, p 47 à 53), une autre s'est fait passer pour un homme pour correspondre avec Gauss, d'autres encore ont laissé leur nom à une courbe ou à une catégorie d'anneaux. Être femme et mathématicienne, doit-on dire « quelle histoire » ou « quelle galère » ? Dans cet article, nous évoquerons plus particulièrement le destin et l'œuvre de l'une d'entre elles : Émilie le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet.

Sa vie : elle naît le 17 décembre 1706 à Paris et décède le 10 septembre 1749 à Lunéville (près de Nancy) où elle est enterrée. Elle a donc vécut un peu moins de 43 ans. Sa mère, déjà, est assez savante et s'intéresse à la théologie et à l'astronomie. Son père, le baron Louis Nicolas le Tonnelier de Breteuil, est très âgé (58 ans) à sa naissance. Seule fille au milieu de ses frères, elle montre très tôt un goût et des aptitudes pour les études. Son père l'admire et lui donne une éducation chez lui, au lieu de l'envoyer au couvent, où elle n'aurait d'ailleurs appris que les « bonnes manières » et les vertus chrétiennes. À douze ans, elle parle plusieurs langues : latin, grec, allemand, espagnol, puis anglais, italien. Elle puise largement dans la bibliothèque de son érudit de père. Elle lit et sait même par cœur certains passages de Horace, Virgile, Cicéron, ... Mais elle aime beaucoup, fait assez rare en ce temps pour une femme, les mathématiques qu'elle apprendra auprès de précepteurs prestigieux comme Koenig (disciple de Wolf, lui-même élève de Leibniz), Maupertuis, Clairaut, entre autres. Elle se marie à 18 ans et demi (le 25 juin 1725) avec le marquis Florent Claude du Chastellet. Ils s'installent à Semur-en-Auxois, en Bourgogne, près de Dijon, mais la marquise dont le mari militaire est souvent absent, préfère, la plupart du temps, vivre à Paris. En 1726 et 1727, Émilie donne naissance à une fille puis à un fils. Un autre fils viendra en 1733 mais décèdera l'année suivante. C'est en 1733 qu'elle rencontre Voltaire, en 1733 et 1734 qu'elle prend des leçons de mathématiques auprès de Maupertuis et, au cours de l'été 1735, elle s'installe à Cirey avec Voltaire. La propriété de Cirey-sur-Blaise, est située en Haute-Marne, dans la région Lorraine. Elle appartient à M. du Châtelet, époux d'Émilie, membre de la noblesse de cette contrée. C'est Voltaire qui finance les travaux de réfection et d'aménagement de la propriété, dans laquelle il crée d'ailleurs un cabinet de physique inspiré de celui de Lunéville. En effet, Émilie est amie avec Mme de Bouflers, maîtresse de Stanislas et le couple Voltaire-Mme du Châtelet est souvent invité à la cour de Lunéville. En fait, le cabinet de Lunéville, l'un des plus beaux cabinets de physique de cette époque, venait d'être déménagé à Florence, au palais Pitti, quand Voltaire s'installe en Lorraine, mais sa teneur a tout de même influencé celui de Cirey. C'est dans ce cabinet que Voltaire et Émilie, séparément, ont travaillé à leur *Mémoire sur le feu* (mémoires transmis à l'Académie Royale des Sciences en 1737 et publiés en 1744). La même année 1737, Mme du Châtelet accouche d'un autre fils, Florent-Louis. Dès l'année suivante, en 1738, elle écrit ses *Institutions de Physique*, adressées à son fils alors âgé de 11 ans, et dans lesquelles elle souhaite, non pas raconter l'histoire des idées, mais regrouper en un seul ouvrage et mettre à la portée de ce jeune garçon les découvertes les plus récentes concernant le développement des sciences. C'est d'ailleurs pour cela qu'elle en retarde la publication : elle souhaite en effet y ajouter toute une partie sur les idées de Leibniz (1646-1716). Son ouvrage paraîtra donc deux ans plus tard, en 1740. Le professeur qui l'avait initiée aux théories de

Leibniz était Koenig. Celui-ci lui a reproché d'avoir volé ses idées. Mais Émilie a pu rétorquer qu'en fait, les leçons de Koenig lui ont servi à comprendre Leibniz, et qu'ensuite elle a écrit seule ce qu'elle avait retenu, et compris, enrichissant le tout par ailleurs. Elle n'a donc en aucun cas plagié son maître. Cet ouvrage eut un vif succès. Il était complet, bien rédigé, les idées bien amenées comme réponses à des questions. Il arrivait tellement à propos pour expliquer les théories récentes et notamment celles de Leibniz, qu'il fut traduit en plusieurs langues, notamment en italien en 1743, tout juste trois années après sa parution en français. En 1745, Émilie commence la traduction des *principia* de Newton (1642-1727). Sa tâche est rapidement terminée, mais elle souhaite ajouter ses propres commentaires, et cela va durer jusqu'à sa mort, puisqu'elle enverra son manuscrit à la bibliothèque royale quelques jours avant de mourir. Elle charge Clairaut (Alexis Claude 1713-1765), jeune mathématicien de talent, de relire et corriger éventuellement, sa traduction et ses commentaires. En 1748, elle s'amourache du jeune Saint Lambert. Il est le père de la petite fille qui naît le 4 septembre 1749. Émilie décède quelques jours plus tard, le 10 septembre 1749, d'une fièvre contractée juste après la naissance. Elle est inhumée en l'église Saint-Rémy de Lunéville.

Contexte politique : À la fin du siècle précédant la naissance de Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, l'Europe avait vécu la guerre de succession d'Espagne, la Franche-Comté était devenue française. Émilie naît en 1706 ; Louis XIV règne sur la France. Son fils, le Dauphin, également appelé "duc de Bourgogne", meurt en 1712, suivi trois semaines plus tard par son fils (petit fils de Louis XIV). Le jeune Louis XV, arrière-petit-fils du roi Soleil, n'est alors âgé que de 5 ans. Philippe d'Orléans devient régent et le restera jusqu'à sa mort en 1723. Vint alors le règne de Louis XV jusqu'en 1774. Sur le territoire français, la période est assez calme. Louis XIV ne guerroyait plus guère, le Régent non plus, quant à Louis XV, il préférera brader le Canada aux Anglais plutôt que de défendre « ces quelques arpents de neige » (mais il s'agit d'une autre histoire car cela s'est passé en 1763, après la mort de Mme du Châtelet). La France est l'état d'Europe le plus peuplé. La paix intérieure est synonyme de prospérité, surtout pour les bourgeois, mais aussi de légèreté, d'élégance, de confort (ce que les philosophes commencent à dénoncer). Notons toutefois, que le système de Law (monnaie papier sous forme de billets) a été mis en place en 1716 et que ce système finira par ruiner de nombreuses familles.
En Europe, en 1738, on assiste à la guerre de succession de Pologne. Stanislas Leczinski reste roi, obtient la Lorraine et le Barrois qui reviendront à la France après sa mort.
En 1740, c'est l'avènement de Frédéric II le Grand, roi de Prusse.

Contexte culturel : les Académies sont créées depuis une quarantaine d'années pour répondre aux commandes officielles. Elles ont permis le développement et la propagation des idées. Parallèlement, existe aussi un mécénat privé qui aide beaucoup certains chercheurs. C'est aussi une période où les salons fleurissent, où l'on parle, se rencontre, où l'on échange des idées. En littérature, M. de Breteuil laissait à sa fille Émilie libre accès à son immense bibliothèque. À part les auteurs anciens qu'elle lisait dans leur langue d'origine, qu'aurait-elle pu trouver sur les rayonnages ? Ne parlons pas encore d'ouvrages scientifiques, mais intéressons-nous à la littérature, au théâtre, à la philosophie : René Descartes (1595-1650), Pascal (1623-1662), Molière (1622-1673), Corneille, La Bruyère, Jean Racine (1639-1699), Charles Perrault (1628-1703), La Rochefoucauld, Jean de la Fontaine, Mme la marquise de Sévigné, Fénelon. Émilie était à l'affût de tout ce qui se faisait de nouveau. Ses auteurs classiques préférés étant Bossuet (1627-1704) et ses Oraisons funèbres, et Pope (1698-1744). Elle a pu lire les *Lettres Persanes* que Montesquieu publia en 1721, Marivaux, Saint Simon et bien entendu Voltaire (1694-1778) dont les *lettres philosophiques* sont publiées en 1734, alors qu'il commence à fréquenter Mme du Châtelet. En peinture, les contemporains d'Émilie ont été Allegrain (1644-1736), Watteau (1684-1721), Chardin (1699-1779), Jean-Baptiste Lallemand (Dijon 1716-1803), Jean-Baptiste Greuze (Tournus 1725-1805). En musique, citons Couperin (1668-1733), Jean-Philippe Rameau (1683-1764), Jean-Sébastien Bach (1685-1750), Glück (1717-1787). Cette période a été qualifiée de Baroque.

Contexte social : plus précisément, intéressons-nous à la manière dont on élevait les filles à cette époque et à la façon dont on considérait les femmes.
Au siècle précédent, Molière écrivait, en 1672, dans *les Femmes savantes,* ces vers de la tirade de Chrysale (acte II, scène VII)

Il n'est pas bien honnête, et pour beaucoup de causes,
Qu'une femme étudie et sache tant de choses.

Voilà des mots bien sévères à l'égard des femmes que l'on voulait cantonner à leur foyer, sans leur donner la possibilité d'étudier. Les mentalités ne sont cependant pas près de changer, les préjugés ont la vie dure ! Pour s'en convaincre, il suffit de lire la description qu'a faite Mme du Deffand à propos d'Émilie. Dans une lettre adressée à Horace Walpole, les propos médisants de la marquise du Deffand traduisent bien la haine que suscitent l'instruction et l'attitude libre d'Émilie du Châtelet : *«Représentez-vous une femme grande sèche sans cul sans hanches [...]. Née sans talents, sans mémoire sans gout, sans imagination, elle s'est fait géomettre pour paroitre au-dessus des autres femmes [...]».* À cette époque, les lettres étaient écrites pour être lues dans les salons. Les propos qu'elles contenaient devaient donc être rendus publics, ce qui confère à ces écrits plus de virulence et plus de méchanceté que s'ils étaient simplement adressés à un ami complice à qui l'on avoue sa jalousie et son amertume. On le voit ici, Mme du Châtelet ne fait pas l'unanimité. Heureusement pour elle, d'autres personnes l'ont aimée et adulée, ont reconnu son talent. Clairaut, Algarotti, notamment, ont admiré sa facilité à comprendre les mathématiques, la physique, son aisance à parler les langues étrangères, modernes ou anciennes. Mais celui qui en a le mieux parlé est sans conteste son amant, celui qui est resté à jamais son ami : Voltaire. Voltaire qui a si bien su résumer toute la vie d'Émilie, sa passion pour le travail, pour les pompons (il l'avait même surnommée Madame pompon neuton), son goût pour le jeu et les fêtes le soir, sa manière d'être si passionnée par ses amants qu'elle en était exclusive… Mais lisons quelques lignes, pour le plaisir : ces vers de Voltaire, dans une lettre imprimée au-devant des *Elémens de Newton*.

« Tu m'appelles à toi, vaste & puissant génie,
Minerve de la France, immortelle Emilie.
Je m'éveille à ta voix, je marche à ta clarté,
Sur les pas des vertus & de la vérité.[…]
Vous, à qui cette voix se fait si bien entendre,
Comment avez-vous pû, dans un âge encor tendre,
Malgré les vains plaisirs, ces écueils des beaux jours,
Prendre un vol si hardi, suivre un si vaste cours,
Marcher après Newton dans cette route obscure
Du labyrinthe immense où se perd la nature ?
Puissé-je auprès de vous, dans ce Temple écarté,
Aux regards des Français montrer la Vérité,[…] »

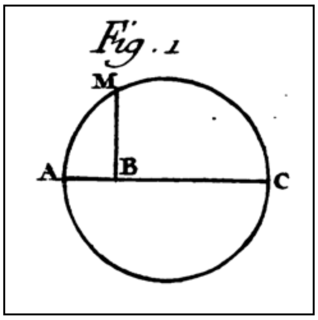
Les mathématiciens et les mathématiques de son temps : Émilie arrive après une lignée de mathématiciens célèbres et prolifiques : Descartes (1595-1650), Desargues (1591-1661), Fermat (1601-1665), Roberval (1602-1675), Torricelli (1608-1647), Pascal (1623-1662), Huygens (1629-1695), Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727), Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) Bernoulli, Rolle, Varignon. Elle naît peu de temps avant Euler (1707-1783), Buffon (1707-1788), Clairaut (1713-1765), D'Alembert (1717-1783), les Bernoulli de la deuxième génération : Nicolas, Daniel et Jean II. Quant aux mathématiques pratiquées à cette époque, ce sont les nombres complexes (ou imaginaires) connus depuis plus de 150 ans, les décimaux et l'algèbre de Viète, couramment utilisés depuis plus de 120 ans, les logarithmes de Napier et Briggs qui facilitent les calculs depuis un siècle, les résultats astronomiques de Kepler et Galilée, admis depuis quelques dizaines d'années déjà. Mais ce sont surtout les progrès phénoménaux en analyse et en calcul différentiel, la bataille entre les Cartésiens et les Newtoniens, les expéditions scientifiques en Laponie et au Pérou pour vérifier l'aplatissement de la Terre aux pôles et ainsi donner raison à Newton à propos de l'attraction universelle notamment.

Son œuvre :

- *Les Institutions de physique*, publiées sans nom d'auteur à Paris chez Prault en 1740, puis à Amsterdam en 1742,
- *Mémoire sur le feu (transmis à l'académie en 1737 et publié en 1744)*,
- *Traité du bonheur*,

- traduction des *Principes Mathématiques de la philosophie Naturelle* (c'est-à-dire la physique, la mécanique, la mathématique de la nature) de M. Newton.

Dans ses *Institutions*, elle est très cartésienne (inspirée par le *Discours de la méthode*), elle explique que la science évolue et qu'untel (comme Descartes) peut avoir une idée claire de certaines choses, mais ces choses peuvent être mal définies et ses successeurs vont préciser la notion. On donne souvent pour cela des contre-exemples, ce qui oblige à faire évoluer les définitions. Leibniz a d'ailleurs procédé comme cela contre Descartes. Elle prépare le terrain, dès la page 20 de son ouvrage, pour les idées de Newton contre celles de Descartes.
Son but est bien d'écrire un ouvrage d'enseignement incluant les théories nouvelles, pour éviter à son fils d'aller chercher de-ci, de-là, comme elle eut à le faire pour s'instruire.
Elle écrit notamment, dans son chapitre I (*des Principes de nos Connoissances*), § I, pages 15 et 16 (son raisonnement s'appuie sur la figure I de la planche I) :
« *Toutes nos Connoissances naissent les unes des autres, & sont fondées sur de certains Principes dont on connoît la vérité même sans y réfléchir, par ce qu'ils sont évidens par eux-mêmes.*
Il y a des vérités qui tiennent immédiatement à ces premiers Principes, & qui n'en découlent que par un petit nombre de conclusions ; alors l'esprit apperçoit aisément la chaîne qui y conduit ; mais il est facile de la perdre de vûë dans la recherche des vérités ausquelles on ne peut arriver que par un grand nombre de conséquences tirées les unes des autres. Il y en a mille exemples dans la Géométrie ; il est très-aisé, par exemple, de voir que le Diametre du Cercle le partage en deux parties égales, parce qu'il ne faut qu'une seule conclusion pour arriver de la nature du Cercle à cette propriété ; mais on ne voit pas si aisément que le quarré de l'ordonnée BM est égal au rectangle de la Ligne AB par la Ligne BC, quoique cette propriété découle de la nature de Cercle comme la première, parce qu'il faut plusieurs conclusions intermédiaires avant d'arriver à cette dernière propriété. Il est donc très-important de se rendre attentif aux Principes, & à la façon dont les vérités en découlent si l'on ne veut point s'égarer. »



C'est ce que l'on peut donner à entendre à toute personne qui veut débuter en mathématiques, nos élèves qui ont l'habitude de « zapper », de passer facilement et rapidement d'une activité à une autre devront persévérer, être attentifs aux hypothèses, définitions, propriétés qui permettront d'arriver à la conclusion.

Prenons l'exemple d'une notion « enseignée » par Émilie du Châtelet dans ses *Institutions* et, plus particulièrement, celui de la cicloïde (à noter que de nos jours le mot cycloïde est orthographié avec un "y", alors qu'Émilie l'écrit avec un "i", les

deux orthographes seront utilisées dans la suite de cet article, selon que l'on se place au XXI^{e} ou au XVIII^{e} siècle). Cette courbe avait été décrite par Descartes sous le nom de « roulette », puis Roberval en avait fait une trochoïde, avait parlé de la forme et avait cherché une quadrature d'un arc de cicloïde, tout comme Torricelli. Pascal, vers 1658, avait montré que la roulette n'était autre qu'une cicloïde, puis Huygens avait expliqué l'isochronisme des oscillations. Son texte montre un début d'assimilation de la géométrie analytique, ce qui le différentie de celui de son illustre prédécesseur Galilée.
Le texte d'Émilie est tiré du chapitre 18 dans lequel elle parle d'abord des pendules simples. Elle décrit des propriétés géométriques de ces pendules, puis elle explique qu'ils ne peuvent convenir pour des horloges (voir §.457 et 458 ci-dessous), elle décrit (§.459 à 461) des expériences menées, dans l'air et dans le vide, par des scientifiques de son époque venant confirmer ses dires et elle amène le lecteur vers la cicloïde (§.462 et suivants).

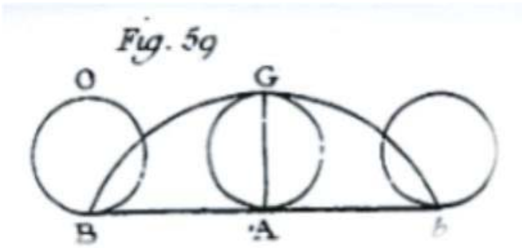
« §.457. *Galilée fut le premier qui imagina de suspendre un corps grave à un fil, & de mesurer le tems dans les observations Astronomiques & dans les expériences de Physique, par ses vibrations : ainsi, on peut le regarder comme l'inventeur des Pendules, mais ce fut M.Hughens qui les fit servir le premier à la construction des Horloges. Avant ce Philosophe les mesures du tems étoient très-fautives, ou très-pénibles ; mais les Horloges qu'il construisit avec des Pendules, donnent une mesure du tems infiniment plus exacte* [...]

§.*458. Quoique les vibrations du même Pendule dans de petits arcs de cercle inégaux s'achevent dans des tems sensiblement égaux (§.454.) cependant ces tems ne sont pas égaux géométriquement ; mais les oscillations dans de plus grands arcs se font toujours dans un tems un peu plus long, & ces petites différences qui sont très-peu de chose dans un tems très-court, & dans de très-petits arcs, deviennent sensibles, lorsqu'elles sont accumulées pendant un tems plus considérable, ou que les arcs different sensiblement. Or mille accidens, soit du froid, soit du chaud, soit de quelque saleté qui peut se glisser entre les rouës de l'Horloge, peuvent faire que les arcs décrits par le même Pendule ne soient pas toujours égaux, & par conséquent le tems marqué par l'aiguille de l'Horloge, dont les vibrations du Pendule sont la mesure, seroit ou plus court ou plus long, selon que les arcs que le pendule décrit seroient augmentés ou diminués.*

§.462. *M. Hughens qui avoit prévû ces inconvéniens, imagina pour y remédier, & pour rendre les Horloges aussi justes qu'il est possible, de faire osciller le Pendule qui les régle dans des arcs de cicloïde, au lieu de lui faire décrire des arcs de cercle ; car dans la cicloïde, tous les arcs étant parcourus dans des tems parfaitement égaux, les accidens qui peuvent changer la grandeur des arcs décrits* *par le Pendule, ne peuvent apporter aucun changement au tems mesuré par les vibrations, lorsqu'elles se font dans des arcs de cicloïde.*»

Ainsi que nous venons de le lire, Émilie du Châtelet rappelle que les pendules circulaires à petites oscillations sont réguliers et que, dès lors que l'on a de plus grandes oscillations, les pendules ne sont plus assez fiables pour en faire des horloges. Les explications plus détaillées et les démonstrations géométriques avaient été données au début du chapitre 18. Elle présente ensuite la solution trouvée par Huygens. Elle dit brièvement que les propriétés de la cycloïde vont permettre des oscillations isochrones (vocabulaire anachronique pour Émilie) « *car dans la cicloïde, tous les arcs étant parcourus dans des tems parfaitement égaux, les accidens qui peuvent changer la grandeur des arcs décrits par le Pendule, ne peuvent apporter aucun changement au tems mesuré par les vibrations, lorsqu'elles se font dans des arcs de cicloïde.* » Elle va maintenant donner toutes les définitions et propriétés afférentes à la cycloïde, utiles à son propos. Nous reconnaîtrons au passage ces quelques propriétés et, pour faciliter la lecture des ces pages, nous donnerons leur nom actuel :

«*§.463. Cette courbe qui est très-fameuse parmi les Géometres par le nombre & la singularité de ses propriétés, se forme par la révolution d'un point quelconque d'un cercle, dont la circonférence entiére s'applique sur une ligne droite.*



Lorsque le cercle BO. (Fig.59.) applique successivement tous les points de la circonférence sur la ligne droite Bab. en sorte que son point B. par lequel il touchoit cette ligne au commencement de sa révolution, se trouve toucher l'autre extrémité b. de cette ligne, quand la révolution du cercle sur cette ligne est achevée, on voit aisément que cette ligne Bab. sera égale à la circonférence du cercle BO. qui s'est appliquée successivement sur elle comme pour la mesurer.
Si l'on conçoit maintenant que le point B. du cercle BO. qu'on appelle le point décrivant, laisse à tous les points par lesquels il passe en allant de B. en b. une production de lui-même, il s'en formera la courbe BGb. & c'est cette courbe qu'on appelle une cicloïde. Les rouës d'un carosse, en tournant décrivent dans l'air des cicloïdes.»

Nous reconnaissons la description de la cycloïde, générée par un cercle qui roule sans glisser le long d'une droite. La description est d'abord donnée sèche, puis un exemple est décrit en s'appuyant sur une figure pour illustrer le propos.

Suivent les définitions des mots de vocabulaire utilisés pour parler d'une cycloïde :

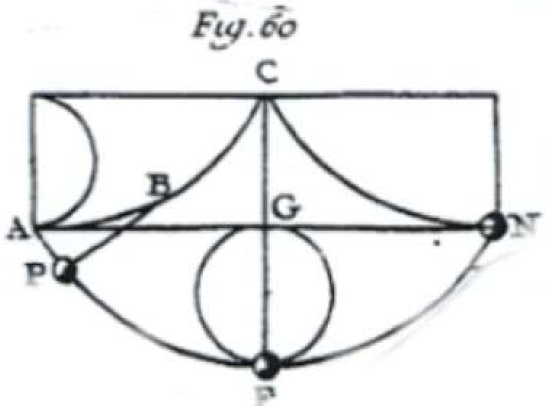
«§.464. Le cercle BO. dont la révolution a formé la cicloïde BGb. s'appelle le cercle générateur de cette cicloïde : le point G. est le sommet de la cicloïde, & la ligne horisontale Bab. est sa base.

§.465. Si l'on conçoit le cercle générateur BO. parvenu dans sa révolution au point dans lequel son diametre GA. partage la cicloïde, & sa base en deux parties égales, alors ce diametre devient l'axe de la cicloïde.»

Viennent dorénavant des paragraphes entiers pour aborder les propriétés de la cycloïde. On pourra remarquer que, bien qu'étant familière du calcul différentiel ou intégral (elle connaissait les œuvres de Leibnitz et de Newton), elle n'évoquera pas la quadrature de la cycloïde, publiée par Roberval quelques décennies avant ces *Institutions*, mais dont elle n'a pas besoin dans son propos.

«§.466. Si je voulois vous démontrer toutes les propriétés de cette courbe, il faudroit en faire un traité entier. Je me contenterai donc de vous indiquer ici celles qui sont nécessaires au sujet que je traite, vous en supposerez les démonstrations, ou si vous voulez les connoître, vous les trouverez dans l'excellent Livre de M. Hughens de Horologia Oscillatorio, ou dans le Traité que M. Wallis a donné de la Cicloïde.

(le lecteur rétablira le point D, oublié dans l'édition de 1740,
en haut et à gauche de la figure 60).



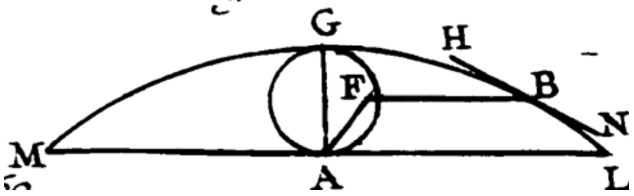
1°. Cette courbe se décrit elle-même par son évolution, en sorte que si CA. CN. sont deux demi-cicloïdes renversées, formées par le même cercle générateur DA. lesquelles se réunissent au point C. ayant leur sommet en A. & en N. (Hughens de Horol.Oscil. part.3. prop.5.6.& 7.) & que l'on conçoive un fil CBA. Egal à la demie-cicloïde CA. à laquelle je le suppose appliqué. Si l'on attache à l'extrémité de ce fil un poids P. (Fig.60.) ce fil deviendra un Pendule égal à la demi-cicloïde CA. or si ce poids P. est abandonné à lui-même, il tombera vers la terre autant qu'il lui sera possible par sa gravité, & en tombant, il déployera le fil CA. lequel

en se déployant de A. en F. décrira par son extrémité auquel tient le poids P. une courbe AF.
Si le poids P. qui a déployé le fil CBA. & qui l'a amené dans la direction perpendiculaire CF. continue à se mouvoir par l'action de sa gravité, lorsqu'il est arrivé en F. il décrira en remontant de F. en N. une courbe FN. égale à AF. (Fig.60) & quand le point P. sera arrivé au point N. le fil CBP. sera appliqué à la demi-cicloïde CN. à laquelle il est égal : donc la courbe entiére AFN. sera décrite par l'évolution & la révolution de la demi-cicloïde CA. ou du fil CBP. qui lui est égal, & cette courbe AFN. se trouve être une cicloïde égale aux deux demi-cicloïdes CA. CN. & ayant le même cercle générateur, & elle est par conséquent double du fil CBP. égal à chacune de ces demi-cicloïdes.
Afin que les Pendules décrivent des arcs de cicloïde dans leur évolution & leur révolution, il faut qu'ils soient suspendus entre des demi-cicloïdes de métal, contre lesquelles ils s'appuyent sans cesse en se déployant, & qui les empêche de décrire des arcs de cercle.»
Nous dirions de nos jours, que la développée et la développante d'une cycloïde sont superposables

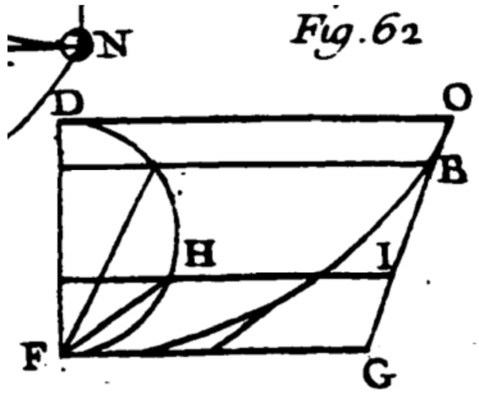
«2°. Le tems de la chute d'un corps par un arc quelconque d'une cicloïde renversée, est au tems de la chute perpendiculaire par l'arc de la cicloïde, comme la demie circonférence du cercle est à son diametre.
C'est cette propriété de la cicloïde dont vous pouvez voir la démonstration dans le Traité de M. Hughens (Idem p.2. prop. 25.), qui fit découvrir à ce Philosophe la proportion entre le tems d'une oscillation, & l'espace tombé dont j'ai parlé.»
Cette propriété est énoncée, sans démonstration. Le lecteur intrigué et intéressé, se reportera au traité de Huygens. L'essentiel ici n'étant pas de démontrer mais de voir comment cela peut servir dans le cas du problème de la construction d'horloges exactes.

«3°. De cette propriété de la cicloïde, il en naît une autre, c'est que tous les arcs d'une cicloïde renversée sont parcourus en tems égal, par un corps qui tombe dans cette courbe par son propre poids ; car puisque par la propriété précedente les tems de la chute d'un corps par des arcs quelconques de cicloïde, sont au tems de sa chute perpendiculaire par l'axe de cette cicloïde dans une raison constante, ces tems sont égaux entr'eux.»
On dit aujourd'hui que la cycloïde est une courbe tautochrone : quel que soit le point de départ sur la cycloïde, le temps de parcours depuis ce point, lâché sans vitesse initiale, pour arriver au sommet de la cycloïde est constant. Quels que soient les points M et P d'un arc de cycloïde AFN, les points pesants, lâchés sans vitesse initiale, mettront le même temps pour parcourir le chemin vers le sommet F de la cycloïde (les notations sont celles de la figure 60 ci-dessus).

«4°. Cet isochronisme des arcs de la cicloïde est fondé sur une propriété de cette courbe, dont je ne vous ai pas encore parlé, & qui se prouve par une démonstration assez compliquée (Hughens de Horol. Oscil.p.2.prop.1.), c'est que toute tangente de la cicloïde est parallele à la corde de son cercle générateur comprise entre le sommet de la cicloïde, & le point auquel la parallele à la base tirée du point de tangence, coupe le cercle générateur (Fig.61.) : ainsi, la tangente HBN. est parallele à la corde EA. dans la cicloïde MGL.



Il est aisé de voir comment l'isochronisme des arcs de la cicloïde découle de cette propriété, quoique ce ne soit pas par là qu'on l'a découvert, car la gravité agira sur le corps au point de cette courbe où il se trouve, de la même manière qu'elle y agiroit sur la corde du cercle générateur qui correspond à ce point, puisque chaque point de la cicloïde a la même inclinaison que la corde du cercle générateur qui lui correspond : on a vû que sur toutes les cordes d'un cercle tirées des extrémités de son diametre , le corps reçoit des impulsions de la pesanteur proportionnelles aux cordes qu'il parcourt, c'est-à-dire, d'autant plus grandes que ces cordes sont plus longues : ainsi, dans la cicloïde chaque point de cette courbe ayant la même inclinaison que la corde du cercle générateur qui lui correspond, le corps reçoit à chacun de ces points des impulsions de la pesanteur proportionnelles à la corde, ou au double de cette corde, (Hughens de Horol. Oscil.p.3. prop.5.&7.) c'est-à-dire à l'arc qui lui reste à parcourir ; car chacun de ces arcs est double de la corde du cercle générateur qui lui correspond (Fig.62) : ces impulsions sont par conséquent d'autant moindres que ces arcs sont plus courts, & d'autant plus grandes qu'ils sont plus grands, ces arcs étant d'autant plus inclinés qu'ils sont plus courts. Suivant cela, deux corps qui partent en même tems en des points H. & B. de la cicloïde DFO. avec des vîtesses initiales proportionnelles aux arcs HF. BF. qu'ils ont à parcourir, arriveroient en même tems au point F. s'ils continuoient à se mouvoir avec des vîtesses initiales de H. en F. & de B. en F. d'un mouvement uniforme ; or comme on peut faire le même raisonnement sur tous les poins qui sont entre H. & F. & entre B. & F. les corps qui partent de ces différents points, doivent atteindre le sommet F. en même tems.



Je me suis arrêté à prouver cette quatriéme propriété de la cicloïde , & surtout à en faire sentir la raison Physique, parce que c'est celle qui sert le plus à la justesse des Pendules qui oscillent dans des arcs de cicloïde.»
On peut remarquer ici qu'Émilie a pris le temps de donner la démonstration de cette propriété essentielle à son propos, tout en donnant, là encore, la référence à l'ouvrage de Huygens.

«§.*467. Je ne puis passer sous silence une des plus belles propriétés de la cicloïde, & assurément celle qui est la plus surprenante de toutes, c'est que cette courbe est la ligne de la plus vîte descente d'un point à un autre.»*
Fallait-il passer cette propriété sous silence dans cet article ? eh bien non, soyez étonnés vous aussi. La propriété décrite ici fait que l'on dit de nos jours que la cycloïde est brachistochrone.

«§.*468. Le problème de la ligne de la plus vîte descente d'un corps tombant obliquement à l'horison par l'action de la pesanteur d'un point donné à un autre point donné, est fameux par l'erreur du grand Galilée, qui a crû que cette ligne étoit un arc de cercle, & par les différentes solutions que les plus grands Géometres de l'Europe en ont donné ; vous lirez un jour ces solutions dans les Acta Eruditorum, & dans les Transactions Philosophiques, & vous verrez que tous ces grans hommes arriverent au même but par différens chemins, & que tous trouverent que cette ligne étoit une demi-cicloïde renversée, qui a pour origine & pour sommet les deux points donnés.*

§.*469. La solution de ce problême semble une espece de paradoxe, puisqu'il s'ensuit que la ligne droite qui est toujours la plus courte entre deux points donnés, n'est pas celle qui est parcourue dans un moindre espace de tems, & cela étonne d'abord un peu l'imagination, cependant la géometrie le démontre, & il n'y a pas à en appeler, et cela dépend de cette propriété de la cicloïde, par laquelle les vîtesses initiales d'un corps à un point quelconque de cette courbe, sont proportionnelles aux arcs qui lui restent à parcourir.*

§. *470. Ainsi la ligne de la plus vîte descente est aussi celle dont tous les arcs sont parcourus en des tems égaux, & il est utile de remarquer que ces deux propriétés qui dépendent visiblement du même principe, je veux dire des vîtesses initiales proportionnelles aux arcs à parcourir, ne se trouvent réunies dans une même courbe, qu'en suivant le sistême, ou pour mieux dire, les découvertes de Galilée sur la progression de la chute des corps.»*
Voilà une propriété qui peut surprendre : la ligne de plus court temps de parcours (la cycloïde) n'est pas la ligne de plus courte distance (la ligne droite). Ce problème a été étudié avant elle, par les plus grands mathématiciens de l'époque. Emilie rapporte les diverses recherches, découvertes de ces personnages.
«§.471. M.Jean Bernoulli, ce fameux Mathématicien qui avoit proposé le problême de la ligne de la plus vîte descente, le résolut par la dioptrique, en démontrant que tout rayon rompu dans l'atmosphére doit décrire une cicloïde ; ce grand Géometre suposoit dans la solution que la lumiére en traversant des milieux d'une densité héterogene, devoit se transmettre par le chemin du plus court tems (Acta Erudis. 1697.p.206.), comme Fermat l'avoit prétendu contre Descartes, & comme Messieurs Hughens & Leibnits l'avoient soutenu depuis Fermat.»

Pour être complète sur le sujet des horloges et surtout des pendules qui les font fonctionner, Émilie revient sur le problème des pendules pesants simples dont l'extrémité décrit un arc de cercle, et elle explique pourquoi on a des pendules qui n'oscillent pas entre deux arcs de cycloïde. Notre propos n'étant pas celui des horloges, mais la manière dont Émilie du Châtelet l'a traité et expliqué, nous arrêtons là sur ce sujet, et nous incitons le lecteur intéressé à lire les Institutions de Physique (un exemplaire est archivé à la Bibliothèque Nationale de France, numérisé, il est téléchargeable sur le site gallica de la bnf).

Émilie du Châtelet nous offre un ouvrage que l'on pourrait qualifier de pédagogique, utile à la génération de son fils pour comprendre le monde et l'appréhender par les outils les plus récents et les mieux appropriés. C'est un enseignement problématisé, mais pas édulcoré ni considérablement simplifié. Dans cet ouvrage, comme dans la traduction et les commentaires des *principia* de Newton, Emilie montre qu'elle sait manipuler les notions mathématiques les plus récentes. Notons, pour terminer ce propos, qu'à ce jour (au XXI^{e} siècle) sa traduction des *Principes de la Philosophie Naturelle* de Newton, est encore la seule traduction française complète de cet ouvrage fondamental pour la physique et les mathématiques. Émilie du Châtelet mérite qu'on s'attarde sur son œuvre et qu'on la réhabilite en tant que MATHÉMATICIENNE !

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Badinter, Élisabeth. *Émilie, Émilie, ou l'ambition féminine au XVII*e, Paris : Flammarion, 1983.
Madame du Châtelet. *Discours sur le bonheur*, (préface de Mme Badinter), Paris : Éditions Payot & Rivages, 1997.
Voltaire, *Mémoires,* Paris : Librairie Générale Française, 1998.
Emch, Antoinette et Gérard. *Émilie du Châtelet, Minerve des Lumières*, article paru dans Les Génies de la science n°27, mai-juillet 2006, p. 10-15.
Le Ru, Véronique. *Voltaire newtonien, le combat d'un philosophe pour la science*, Paris : Vuibert/adapt, 2005.
Catalogue de l'exposition Madame du Châtelet la femme des Lumières, BNF, Paris : 2006
Rebière, A. *Les femmes dans la science* », Paris : Librairie Nony, 1897.
Institutions de Physique, publié sans nom d'auteur, Paris : chez Prault fils en 1740 (disponible en téléchargement sur gallica, le site de la BNF).
Newton. *Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*, tomes 1 et 2, traduction de la dernière édition de 1726 par la Marquise Emilie du Chastellet, publié en 1759, chez Desaint & Saillant, réédité en 1966 par la Librairie Blanchard à Paris (ces deux tomes sont disponibles à la bibliothèque de l'IREM) et réédité en 1990 par Gabay, Paris (disponible en téléchargement sur gallica, site de la BNF)
Badinter, Elisabeth. *Les passions intellectuelles,* tome 1, Désirs de gloire (1735-1751), Paris : Fayard 1999.
Poirier, Jean-Pierre. *Histoire des femmes de science en France du Moyen-Age à la Révolution*, Paris : Pygmalion, 2002.
Racine, Marie-Noëlle. *Eu(er)*^{n}, Yverdon : Gymnase, 2007,p.64-69.
Racine, Marie-Noëlle. *History and Epistemology in Mathematic Education*, Plzeň : Barbin Evelyne, 2008, p 641-650.
Chazal, Gérard. *Les femmes et la science*, ellipses, mai 2006.

Un vaccin contre le sudoku

Michel LAFOND,

Résumé : Un exemple de sudoku à 3 dimensions.
Mots-clés : Sudoku, jeu, casse-tête, 3D.

1. L'inventeur du vaccin.

En surfant, je tombe sur le site de Nicolas Hannachi, à savoir :

http://pagesperso-orange.fr/math-a-mater/index.htm

Dans la page d'accueil de ce site, on peut accéder (entre autres) à la page :

http://pagesperso-orange.fr/math-a-mater/sudoku/sudoku.htm

qui propose un sudoku en 3 dimensions, qu'on peut faire tourner dans tous les sens avec la souris, de manière à faire apparaître la case vide de son choix qu'on remplit avec un chiffre de 1 à 8 avec les contraintes habituelles, c'est-à-dire que chaque "rangée" (dans les 3 directions) et chaque bloc soit contenir {1,2,3,4,5,6,7,8}. Voir la figure 1 page suivante.

Le commentaire est le suivant :

Avec un exercice pareil, on est normalement vacciné contre la fièvre du sudoku.

C'était inespéré !

Étant atteint depuis maintenant 3 ans par la fièvre en question, je ne soupçonnais pas l'existence d'un remède. Je me suis donc attaqué au problème, mais si le maniement du cube est aisé, il est très difficile de bien situer les chiffres déjà placés malgré l'usage judicieux de couleurs pour distinguer les différents blocs. Je l'ai donc "découpé" en 8 tranches, chacune étant un sudoku en 2 dimensions de 8×8 cases, et je l'ai résolu sur papier.

Il n'est pas trop difficile à résoudre, car le nombre d'indices donnés par le "docteur Hannachi" soit 201 cases pré remplies sur les 512 du cube, fait qu'un très grand nombre de cases ont un contenu unique de par les contraintes imposées par la règle. Il se résout de proche en proche exactement comme un sudoku en 2-D. Mais il faut du temps.

J'ai donc supprimé environ 60% des indications inutiles, et j'ai fait des permutations entre les faces et entre les chiffres pour qu'on ne puisse pas reconnaître l'original et utiliser les indices du site. Cela donne le défi exposé au paragraphe 2.

La figure 1 ci-dessous montre la géographie du sudoku 3-D :

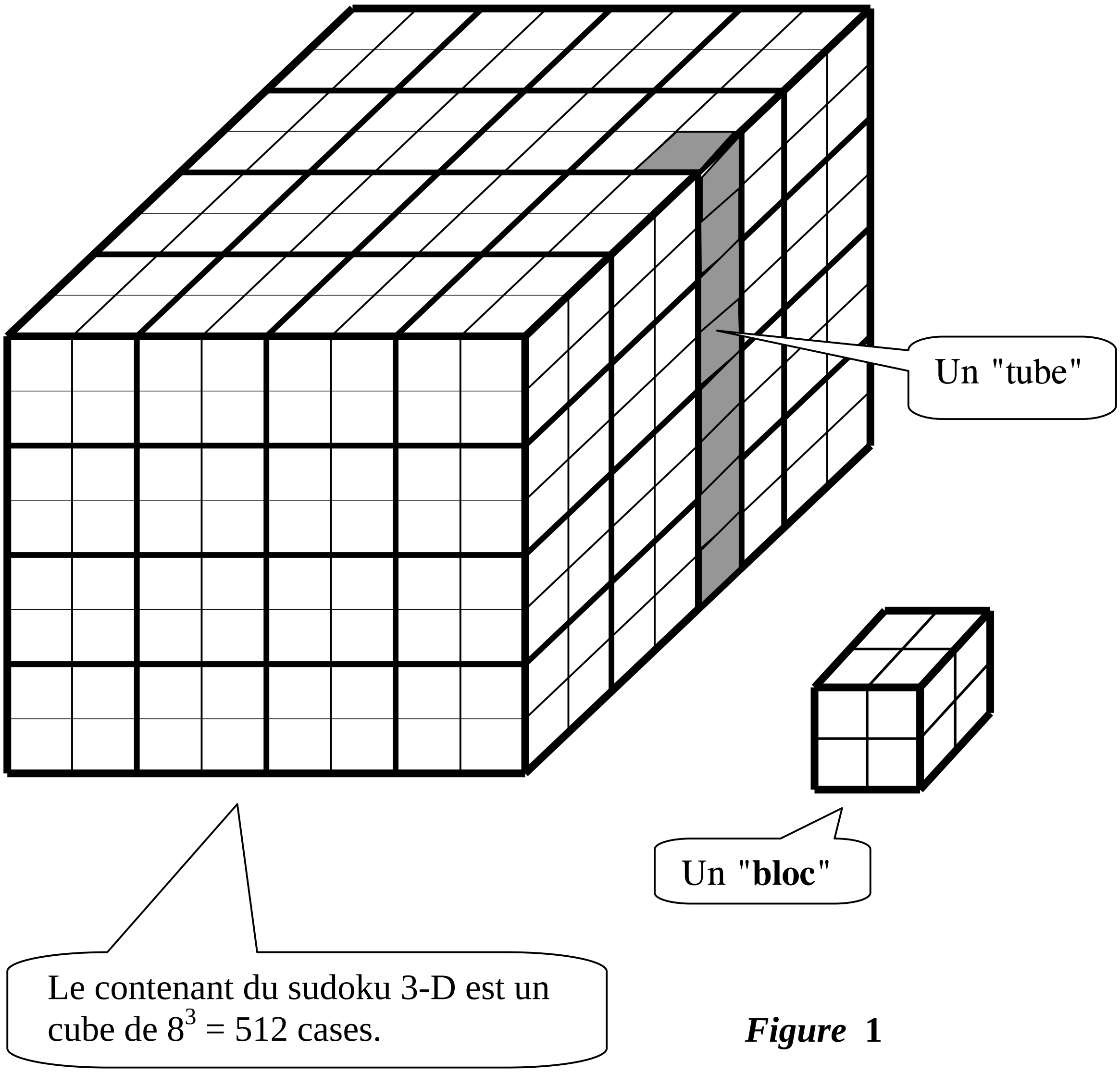


***Figure* 1**

Le cube entier a pour côté 8 cases. Il contient donc $8^3 = 512$ cases. Il est divisé en $4^3 = 64$ "blocs" [Voir la figure 1 ci-dessus] Le problème est le suivant : il s'agit de remplir chaque case avec un chiffre de 1 à 8 de telle sorte que : • Chacun des 64 blocs contienne {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. • Chaque rangée de 8 cases alignées dans l'une des 3 directions parallèles aux arêtes contienne aussi {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. (Il y a $3 \times 8^2 = 192$ rangées).

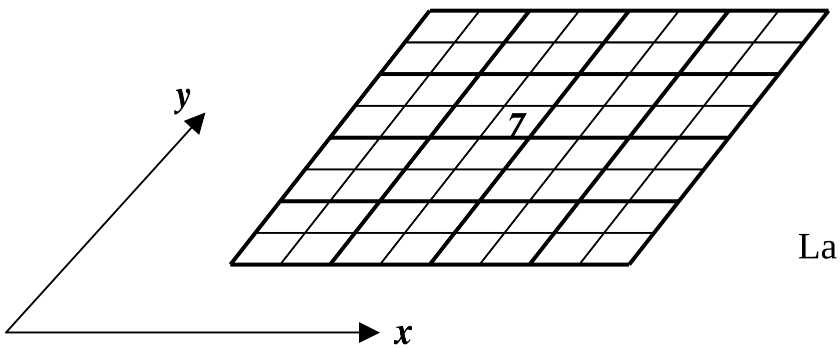
Bien entendu des cases "indices" seront données remplies au départ, et comme dans tout bon sudoku, la solution est unique.

<u>Remarque</u> :
En dimension 2, un sudoku carré contient nécessairement un nombre de cases de la forme p^4 ($p = 2$ pour les enfants, $p = 3$ ou 4 pour les grands). Le plus courant a $3^4 = 81$ cases.
De même, un sudoku <u>cubique en 3 dimensions</u> contient nécessairement un nombre de cases de la forme p^9, p entier. En effet :
Chaque rangée contient $\{1,2,3,\text{---}\ n\}$, donc le nombre total de cases est n^3.
Mais chaque bloc est lui-même un cube de p^3 cases et doit contenir $\{1,2,3,\text{---}\ n\}$.
Donc $n = p^3$.
Finalement le nombre total de cases est $n^3 = (p^3)^3 = p^9$.
Si on élimine le cas $a = 1$! le plus petit nombre de cases d'un sudoku cubique en 3D est donc $2^9 = 512$ cases. C'est le cas dans notre exemple.

2. Le vaccin.

On suppose le cube posé sur une surface horizontale.
Le cube complet est découpé en huit couches (tranches) horizontales.
Pour l'énoncé du problème, je vais donner dans l'ordre les huit "couches" depuis le bas, et dans chaque couche, on repèrera les cases par leurs coordonnées *x, y* (Figure 2).
x et *y* décrivent {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
Chaque couche comporte 8 lignes et 8 colonnes selon les termes utilisés habituellement.
Dans le grand cube, les rangées verticales sont appelées "tubes". Il y en a 64 qui seront repérés naturellement par leurs coordonnées *x, y* dans un plan horizontal (même repérage que les cases d'une tranche).
Un tube est représenté en gris dans la figure 1.

***Figure* 2**



La couche 1

Ainsi, la case située dans la couche 1 (du bas) de coordonnées [4 ; 5] contient le chiffre 7.
Les lignes en gras dans la figure 2 séparent les blocs.

Dans l'énoncé figurant ci-dessous, 79 "indices" sont connus, il ne restera donc "que" 433 cases à remplir.

Voici l'énoncé :

			4				
1		7					
					2	5	
			7				
		3				1	
	8						
			8				

Couche 1

	3				1		
			3			4	
		5					
				6			
7							
			6		5		
			1				
4						3	

Couche 2

	6			2			
						3	
			4				
2							
				7			1

Couche 3

			3	6			
			8				7
						1	
					4		
		7			8		
7						5	
					5		2
					2		

Couche 4

6							
				5			2
		1					
				6			
						6	
						1	
	2				4		

Couche 5

		5					7
		8					
	5						
				3		5	
		7					

Couche 6

	4						
				3			
		7		5			
		4			3		8
		5				6	
5			2				
					1		
		2					

Couche 7

			2				
	2						
	8			6			
		5					
	4			8			
			4				

Couche 8

Remarquez que chaque bloc (de 8 cases) est visible dans le descriptif ci-dessus, mais en deux morceaux de 4 cases.
Par exemple les 8 cases grisées ci-dessus sont celles d'un même bloc.

3. Comment appliquer le remède ?

Voici un début possible de raisonnement :

- Dans la couche 4, la case C = [6 ; 8] contient nécessairement un **7** car comme on le voit ci-dessus :

  3 et 6 sont présents dans la ligne 8 de la couche 4 ;
  2, 4, 5, 8 sont présents dans la colonne 6 de la couche 4 ;
  1 est présent dans le tube de la case C = [6 ; 8] couche 2.

Donc :

Cette case contient un **7**

Le 1 présent ici dans la couche 2 interdit d'avoir un 1 deux cases au-dessus dans la couche

			3	**6**			
			8				**7**
						1	
					4		
		7			**8**		
7						**5**	
					5		**2**
					2		

Couche 4

	3				**1**		
			3			**4**	
		5					
				6			
7							
			6		**5**		
			1				
4						**3**	

Couche 2

Voilà déjà une case remplie, il n'en reste plus que 432.

Le plus difficile est de repérer les cases "forcées".
Quelquefois il faut utiliser les blocs pour conclure :

- Dans la couche 2, la case C' = [3 ; 1] contient nécessairement un **6** car comme on le voit ci-dessous :

  3 et 4 sont présents dans la ligne 1 de la couche 2 ;
  5 est présent dans la colonne 3 de la couche 2 ;
  7 et 2 sont présents dans le tube [3 ; 1] couches 6 et 7 respectivement.
  1 et 8 sont présents dans le bloc contenant la case C'.

	3				**1**		
			3			**4**	
		5					
				6			
7							
			6		**5**		
			1				
4						**3**	

Couche 2

Cette case C' contient un **6**

		5					**7**
		8					
	5						
				3		**5**	
		7					

Couche 6

Ce 7 présent dans la couche 6 interdit d'avoir un 7 quatre cases plus bas dans la couche 2

	4						
				3			
		7		**5**			
		4			**3**		**8**
		5				**6**	
5			**2**				
					1		
		2					

Couche 7

Ce 2 présent dans la couche 7 interdit d'avoir un 7 cinq cases plus bas dans la couche 2

			4				
1		**7**					
					2	**5**	
			7				
		3				**1**	
	8						
			8				

Couche 1

	3				**1**		
			3			**4**	
		5					
				6			
7							
			6		**5**		
			1				
4		**C'**				**3**	

Couche 2

En grisé les 8 cases du bloc contenant la case C'. Les présences du 8 et du 1 dans ce bloc interdisent la présence du 8 ou du 1 dans la case C' du même bloc.

Vous pouvez continuer ainsi, en remplissant de manière "forcée" :
La case [4 ; 3] de la couche 4, puis la case [4 ; 3] de la couche 1, et de proche en proche toutes les cases vides restantes.

Il ne faut pas arrêter le traitement pour que le vaccin fasse son effet.

Si vous constatez des effets secondaires, écrivez au docteur Hannachi à l'adresse :
hannachi nicolas@yahoo.fr.

Représentation en 3 dimensions des tables de Karnaugh

Bruno PRETOT, Lycée Fourier à Auxerre

Résumé : A travers cet article, nous allons travailler avec les variables booléennes. Nous allons découvrir ou redécouvrir la représentation des tables de Karnaugh et l'utilisation de ces tables pour simplifier les fonctions booléennes. Mais le cœur de cet article est la représentation des tables de Karnaugh en 3 dimensions.

Mots-clés : Fonction booléenne ; Table de vérité ; Table de Karnaugh ; Tore à tubes interconnectiques ou tore à interconnections

Ce document comprend plusieurs parties :
- Remerciements
- Introduction : historique de ma démarche
- Rappel sur les variables booléennes
- Présentation et principe des tables de Karnaugh
- Représentation en 3 dimensions des tables de Kargnauh
- Conclusion

Remerciements : Je tiens à remercier Gérard Bonneval car il m'a mis en contact avec l'IREM de Dijon. Je remercie aussi tout particulièrement Marie-Noëlle Racine et Alain Mascret pour leur travail de relecture. C'est grâce à Alain Mascret que des représentations graphiques des tores à interconnection sont dans l'article.

I. Introduction : historique de ma démarche

Quand j'ai étudié en électronique les tables de Karnaugh, les enseignants de faculté avaient dit qu'il n'y avait pas de représentation en 3 dimensions des tables de Karnaugh à plus de 4 variables et que la représentation des tables de Karnaugh à 3 variables ou à 4 variables était un cylindre.

Un jour, je me suis penché sur la question : j'ai remarqué que la représentation dans l'espace (donc en 3 dimensions) des tables de Karnaugh 4 variables n'étaient pas un cylindre mais un tore.

Puis j'ai réussi à trouver une représentation dans l'espace des tables de Karnaugh à 5 variables, à 6 variables, puis autant de variables que je veux. J'ai appelé cette représentation un tore à interconnections. C'est en fait un tore à plus ou moins de trous suivant la valeur de n.

2. Rappel sur les fonctions booléennes

Une variable booléenne P peut prendre **deux états** :

- un état **vrai** que l'on représente par la valeur 1 et qui est noté P = 1 ou bien par abus, simplement P (notation utilisée pour les tables de Karnaugh).
- un état **faux** que l'on représente par la valeur 0 et qui est noté P = 0 ou bien par abus, simplement $\overline{P}$ (notation utilisée pour les tables de Karnaugh).

En électronique, chaque état d'une variable booléenne peut être représenté par une tension différente.

On définit trois opérations :

la somme logique notée $+$, appelée encore OU logique ;

le produit logique noté $\bullet$, appelé encore ET logique ;

la complémentation définie par $\overline{0}=1$ et $\overline{1}=0$, appelé encore NON logique.

Avec ces opérations, on peut construire une fonction booléenne à plusieurs variables.

Les variables et les fonctions booléennes ne pouvant prendre que deux valeurs (0 ou 1), on étudie les fonctions booléennes en envisageant tous les cas possibles et en rangeant les résultats dans **une table de vérité**.

Exemple :

Table de vérité de la somme logique		
a	b	S = a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité du produit logique		
a	b	S = a • b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Théorème de Shannon

Il établit que toute fonction booléenne de n variables peut se mettre sous la forme canonique suivante : $f(a_1,a_2,....,a_n)=\sum \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_2 \bullet .... \bullet \hat{a}_n f(\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$

où $\hat{a}_i$ représente une variable directe ou complémentée :

$\alpha_i = 0$ alors $\hat{a}_i = \overline{a}_i$

$\alpha_i = 1$ alors $\hat{a}_i = a_i$

Dans cette expression, un terme tel que $\hat{a}_1 \bullet \hat{a}_2 \bullet .... \bullet \hat{a}_n$ dans lequel toutes les variables interviennent sous la forme directe ou complémentée est appelé un **minterm.**

Exemple : $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c + a.b.\overline{c} + a.b.c$

a.b.c est un minterm,

f(a, b, c) est la somme de 4 minterms.

3. Présentation et principe des tables de Karnaugh

Une table de Karnaugh permet de représenter une fonction booléenne et surtout de la simplifier. Chaque case d'une table de Karnaugh correspond à une ligne de la table de vérité mais la disposition de Karnaugh est beaucoup plus pratique.

On considère une fonction de 3 variables par exemple

$$f(a,b,c) = \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.c$$

Comme il y a 3 variables, on construit un rectangle comportant 2^3 = 8 cases ; chacune d'elles correspondant à 1 minterm.

bc→ a	00	01	11	10
0	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	$\overline{a}.\overline{b}.c$	$\overline{a}.b.c$	$\overline{a}.b.\overline{c}$
1	$a.\overline{b}.\overline{c}$	$a.\overline{b}.c$	$a.b.c$	$a.b.\overline{c}$

Chaque case est à l'intersection d'une ligne et d'une colonne ; les lignes sont numérotées 0 ou 1, les colonnes sont numérotées 00, 01, 11, 10. De cette façon, une seule variable change d'état quand on change de colonne.

Les entrées horizontales du tableau correspondent à la variable *a* et les entrées verticales correspondent aux variables *b* et *c*.

Par exemple, à l'intersection de la ligne 0 et de la colonne 11 se trouve le minterm $\overline{a}.b.c$

La fonction $f(a,b;c) = \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.c$ a pour table de Karnaugh

bc a	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0

0 signifie que le minterm n'est pas pris et 1 signifie que le minterm est pris.

<u>Notion essentielle pour l'utilisation des tables de Karnaugh</u>

La notion essentielle est celle **<u>d'états adjacents</u>** : ce sont des « états » de minterms qui correspondent à la variation de l'état d'une seule variable de ces minterms. Dans une table, ils correspondent :

- soit à des cases voisines (évident d'après la construction de la table) ;
- soit à des cases qui seraient voisines si on rapprochait les bords parallèles qui limitent le rectangle.
- soit encore à des cases symétriques par rapport aux frontières qui délimitent des carrés de 4 x 4 cases dans le cas d'un plus grand nombre de variables (voir partie 4 : représentation d'une table de Karnaugh à 5 variables, représentation d'une table de Karnaugh à 6 variables)

<u>Exemple de simplication d'une fonction booléenne par l'utilisation d'une table de Karnaugh</u>

Voici une table de Karnaugh à 4 variables. Elle représente une fonction booléenne à 4 variables.

cd ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Si on lit la table de Karnaugh suivant les « uns » (comme une table de vérité), on trouve l'expression pour la fonction booléenne suivante :

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}cd + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}\overline{d} + ab\overline{c}d + a\overline{b}\overline{c}\overline{d} + a\overline{b}\overline{c}d$$

Mais une table de Karnaugh permet de simplifier les expressions booléennes. Il suffit de faire des groupements de « uns » comprenant un nombre de un multiple d'une puissance de 2.

Il faut faire les groupements les plus grands possible.

Ici on peut faire 3 groupements :

cd ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Groupement 1

Groupement 2

Groupement 3

Groupement 1 :
La variable d peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1 ; elle est indifférente pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$

Remarque : par le calcul algébrique, cela revient à faire :
$\overline{a}\overline{b}cd+\overline{a}\overline{b}c\overline{d}=\overline{a}\overline{b}c(d+\overline{d})=\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ puisque $d+\overline{d}$ est toujours égal à 1.

Groupement 2 :
La variable a peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1, de même pour la variable b ; elles sont indifférentes pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $\overline{c}\overline{d}$

Remarque : par le calcul algébrique, cela revient à faire :

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}+\overline{a}b\overline{c}\overline{d}+ab\overline{c}\overline{d}+a\overline{b}\overline{c}\overline{d}=\overline{c}\overline{d}(\overline{a}(b+\overline{b})+a(b+\overline{b}))=\overline{c}\overline{d}$$

Groupement 3 :
La variable b peut prendre soit la valeur 0 soit la valeur 1, de même pour la variable d ; elle est indifférente pour l'expression algébrique de ce groupement. L'expression algébrique est : $a\overline{c}$

L'expression simplifiée de la fonction booléenne est donc

$$f(a,b,c,d)=\overline{a}\overline{b}c+\overline{c}\overline{d}+a\overline{c}$$

4. Représentation dans l'espace des tables de Karnaugh

1) Table de Karnaugh à deux variables

		Colonne 1	Colonne 2
	b / a	0	1
Ligne 1	0	**1**	**2**
Ligne 2	1	**3**	**4**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
Puisque les cases se touchent déjà, la représentation plane est suffisante.
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à deux variables est un tableau plan.

2) Table de Karnaugh à trois variables

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
	bc / a	00	01	11	10
Ligne 1	0	**1**	**2**	**3**	**4**
Ligne 2	1	**5**	**6**	**7**	**8**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
La case **1** est adjacente à la case **4 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **8 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1** et **5** touchent les cases **4** et **8**, il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 4 se touchent ; on obtient un cylindre.
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à trois variables est un cylindre.

3) Table de Karnaugh à quatre variables

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
	cd / ab	00	01	11	10
Ligne 1	00	**1**	**2**	**3**	**4**
Ligne 2	01	**5**	**6**	**7**	**8**
Ligne 3	11	**9**	**10**	**11**	**12**
Ligne 4	10	**13**	**14**	**15**	**16**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
La case **1** est adjacente à la case **4 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **8 par l'extérieur.**
La case **9** est adjacente à la case **12 par l'extérieur.**
La case **13** est adjacente à la case **16 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1**, **5, 9, 13** touchent les cases **4, 8, 12, 16** il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 4 se touchent ; on obtient un cylindre.

La case **1** est adjacente à la case **13 par l'extérieur.**
La case **2** est adjacente à la case **14 par l'extérieur.**
La case **3** est adjacente à la case **15 par l'extérieur.**
La case **4** est adjacente à la case **16 par l'extérieur.**

Pour que les lignes 1 et 4 se touchent par l'extérieur, cela revient à faire toucher les deux faces du cylindre ; on obtient **un tore.**
La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à quatre variables est un tore.

4) *Table de Karnaugh à cinq variables*

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7	Colonne 8
	cde ab	000	001	011	010	110	111	101	100
Ligne 1	00	**1**	**2**	**3**	**4**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ligne 2	01	**5**	**6**	**7**	**8**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ligne 3	11	**9**	**10**	**11**	**12**	**25**	**26**	**27**	**28**
Ligne 4	10	**13**	**14**	**15**	**16**	**29**	**30**	**31**	**32**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras.
Maintenant chaque case est adjacente à 5 cases. Mais la table n'en montre que 4.
Pour trouver plus facilement la cinquième case, on la scinde en deux parties.
Pour la représenter dans l'espace, un tore simple ne suffit plus : il faut des interconnexions en plus, ce que j'appelle des tubes interconnectiques.
Raisonnement :
La case **1** est adjacente à la case **20 par l'extérieur.**
La case **5** est adjacente à la case **24 par l'extérieur.**
La case **9** est adjacente à la case **28 par l'extérieur.**
La case **13** est adjacente à la case **32 par l'extérieur.**

Donc pour que les cases **1**, **5, 9, 13** touchent les cases **20, 24, 28, 32** il suffit de rouler le tableau pour les colonnes 1 et 8 se touchent ; on obtient un cylindre.

La case **1** est adjacente à la case **13 par l'extérieur.**
La case **2** est adjacente à la case **14 par l'extérieur.**
La case **3** est adjacente à la case **15 par l'extérieur.**

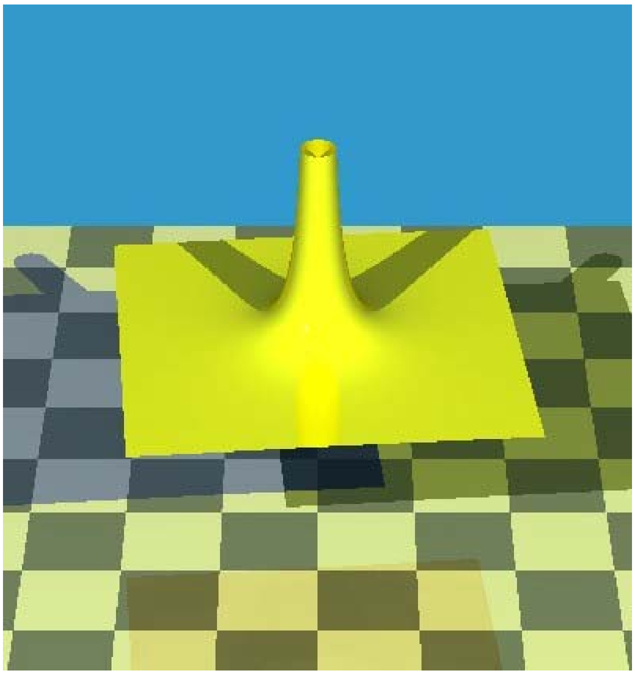
La case **19** est adjacente à la case **31 par l'extérieur.**
La case **20** est adjacente à la case **32 par l'extérieur.**

Donc il suffit de courber le cylindre pour que les lignes 1 et 4 se touchent par l'extérieur ; cela revient à faire toucher les deux faces du cylindre ; on obtient **un tore**

Prenons la case 6.
Elle est adjacente à la case **2, 5, 10, 7** mais aussi à la case **23** par symétrie.
Les cases **2, 5, 10** et **7** sont, de part leur position sur le tore, adjacentes à la case **6**.

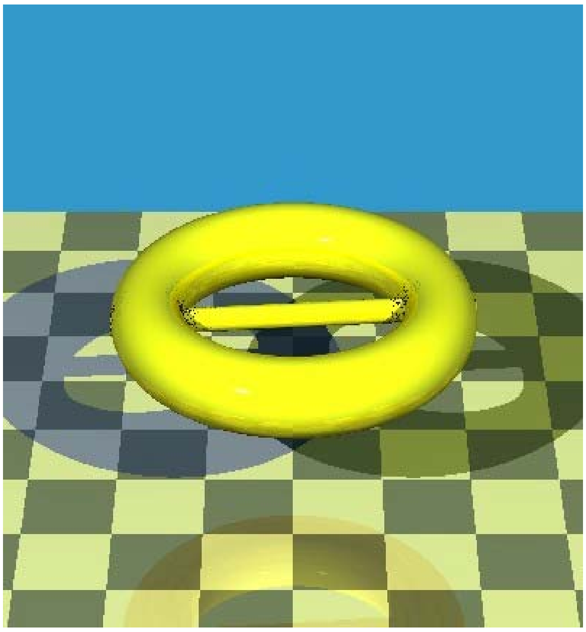
Comment faire en sorte que la case ***23*** *soit en contact avec la case* ***6*** *?*
Il suffit de placer un tube cylindrique que j'appelle tube interconnectique entre la case **6** et la case **23** ; ce tube est dans l'espace entourant le tore.

La représentation de la case 6 sur le tore n'est plus une surface curviligne mais **un pavillon de trompette avec un tube.**



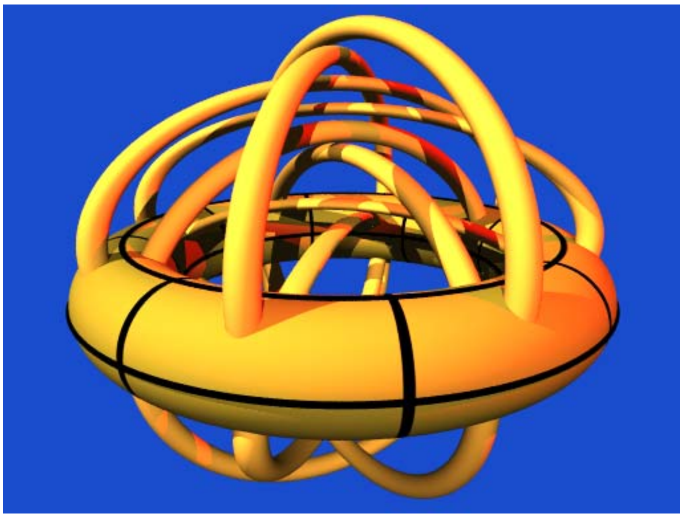
Même raisonnement
- entre **10** et **27**,
- entre **14** et **31**,
- entre **2** et **19**,
- entre **3** et **18**,
- entre **7** et **22**,
- entre **11** et **26**,
- entre **15** et **30**
- entre **1** et **4**,
- entre **5** et **8**,
- entre **9** et **12**,
- entre **13** et **16**
- entre **17** et **20**,
- entre **21** et **24,**
- entre **25** et **28**,
- entre **29** et **32**

On a en tout **16 tubes interconnectiques**.



Mais un tore à un tube interconnectique est un tore à 2 trous. (Voir ci-contre)

Donc le tore à 16 tubes interconnectiques est un tore à 17 trous.



La représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à 5 variables est un tore à 16 tubes interconnectiques ou un tore à 17 trous.

5) *Table de Karnaugh à six variables*

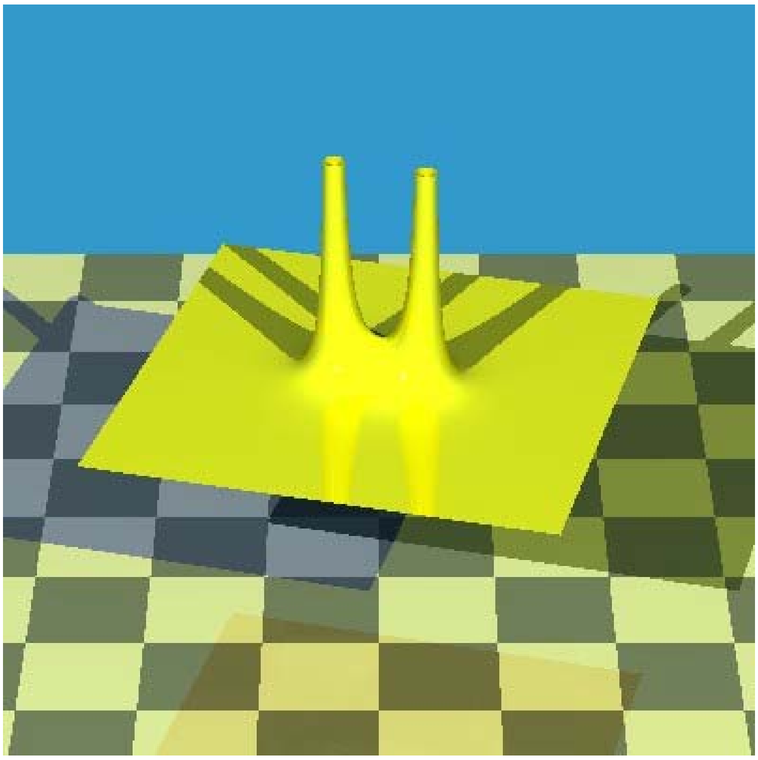
	def / abc	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6	Colonne 7	Colonne 8
		000	001	011	010	110	111	101	100
Ligne 1	000	**1**	**2**	**3**	**4**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ligne 2	001	**5**	**6**	**7**	**8**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ligne 3	011	**9**	**10**	**11**	**12**	**25**	**26**	**27**	**28**
Ligne 4	010	**13**	**14**	**15**	**16**	**29**	**30**	**31**	**32**
Ligne 5	110	**33**	**34**	**35**	**36**	**49**	**50**	**51**	**52**
Ligne 6	111	**37**	**38**	**39**	**40**	**53**	**54**	**55**	**56**
Ligne 7	101	**41**	**42**	**43**	**44**	**57**	**58**	**59**	**60**
Ligne 8	100	**45**	**46**	**47**	**48**	**61**	**62**	**63**	**64**

Pour reconnaître les cases de la table de Karnaugh, je les ai numérotées en gras. **Maintenant chaque case est adjacente à 6 cases** et la table est scindée en quatre parties.

Raisonnement

Prenons la case 6

La case 6 est adjacente aux cases **2, 5, 10, 7, 23, 42.** L'adjacence des cases **2, 5, 10, 7** est réalisé par le tore. (Les lignes 1 et 8 se touchent les colonnes 1 et 8 se touchent).
Pour respecter l'adjacence des cases **6** et **23** et **6** et **42**, il faut placer deux tubes interconnectiques partant de la case **6**.



Donc en tout il faut :
1 – 4 ; 1 – 13 17 – 20 ; 17 – 29 33 – 45 ; 33 – 36 49 – 61 ; 49 – 52
5 – 8 ; 5 – 41 21 – 24 ; 21 – 57 (37 – 9) ; 37 – 40 53 – 56 ; (53 – 25)
9 – 12 ; 9 – 37 25 – 28 ; 25 – 53 (41 – 5) ; 41 – 44 57 – 60 ; (57 – 28)
13 – 16 ; (13 -1) 29 – 32 ; (29 – 17) (45 – 33) ; 45 – 48 61 – 64 ; (61 – 43)

2 – 19 ; 2 – 14 (18 – 3) ; 18 – 30 34 – 46 ; 34 – 51 50 -62 ; (50 – 35)
6 – 23 ; 6 – 42 (22 – 7) ; 22 – 58 (38 – 10) ; 38 – 55 (54 -26) ; (54 – 39)
10 – 27 ; 10 – 38 (26 – 11) ; 26 – 54 (42 – 6) ; 42 -59 (58 -22) ; (58 – 43)
14 – 31 ; (14 – 2) (30 – 15) ; (30 – 18) (46 – 34) ; 46 – 63 (62 – 50) ; (62 – 47)

3 – 18 ; 3 – 15 (19 – 2) ; 19 – 31 35 – 47 ; 35 – 50 51 – 63 ; (51 – 34)
7 – 22 ; 7 – 43 (23 – 6) ; 23 – 59 (39 – 11) ; 39 – 54 (55 – 27) ; (55 -38)
11 – 26 ; 11 – 39(27 – 10) ; 27 – 55 (43 – 7) ; 43 – 58 (59 – 23) ; (59 – 42)
15 – 30 ; (15 – 3) (31 -14) ; (31 – 19) (47 – 35) ; 47 – 62 (63 – 51) ; (63 – 46)

(4 – 1) ; 4 – 16 (20 -17) ; 20 – 32 (36 – 33) ; 36 – 48 52 – 64 ; (52 – 49)
(8 – 5) ; 8 – 44 (24 – 21) ; 24 – 60 (40 – 37) ; (40 – 12) (56 – 28) ; (56 – 53)
(12 – 9) ; 12 – 40 (28 – 25) ; 28 – 56 (44 – 41) ; (44 – 8) (60 – 24) ; (60 – 57)
(16 – 13) ; (16 -4) (32 – 29) ; (32 – 20) (48 – 45) ; (48 – 36) (64 – 52) ; (64 – 61)

Le tube interconnectique 6 – 23 est le même que 23 – 6. Pour éviter de le compter 2 fois, je l'ai mis entre parenthèses.
Si on compte le nombre de couples de nombres sans parenthèses, on trouve 64 couples.
Donc la représentation dans l'espace de la table de Karnaugh à 6 variables est un tore à 64 tubes interconnectiques ou un tore à 65 trous.

6) *Evolution du nombres de tubes interconnectiques pour les tables de Karnaugh*

Le nombre de cases adjacentes à une case donnée est égal au nombre **n** de variables de la table de Karnaugh.
Une case dans le plan est adjacence à 4 cases. Donc le nombre de tube interconectiques partant d'une case donnée est **n – 4** pour $n \geq 4$.
Le nombre de cases contenues dans un tableau à n variables est $\mathbf{2^n}$.
Il ne faut compter qu'une seule fois le tube interconnectique reliant deux cases données, donc il faut diviser par 2 le nombre de cases du tableau, c'est-à-dire $\mathbf{2^{n-1}}$.
Donc le nombre de tubes interconnectiques pour une table de Karnaugh à n variables est

$$2^{n-1} \times (n-4) \quad Pour \ n \geq 4$$

Vérification

n = 5 $2^{5-1} \times (5-4) = 16$

n = 6 $2^{6-1} \times (6-4) = 32 \times 2 = 64$

Finalement, pour avoir un tableau de Karnaugh à n variables, il faut :

- d'abord faire un tableau plan
- ensuite numéroter les cases en **code de Gray**.

Le code de Gray est un code binaire tel que quand on passe d'un nombre au suivant, on ne change qu'un **seul chiffre.** (On l'appelle aussi "binaire réfléchi").

Par exemple pour 4 variables, on a la suite de nombres :
0000 000100110010 0110 011101010100 11001101111111010101011 10011000

Pour avoir une représentation en 3 dimensions de ce tableau,

- on enroule le tableau sur lui-même pour obtenir un tore.
- Puis on ajoute les tubes interconnectiques pour rendre adjacentes les cases qui doivent l'être que le tore ne met pas en contact. Ils sont au nombre de $2^{n-1} \times (n-4)$ pour un tableau de n variables.

On obtient un solide que j'appelle tore à interconnexions.

5. Conclusion

Un problème pratique, l'utilisation des tables de Karnaugh, m'a conduit à vouloir les représenter dans l'espace et finalement à un problème de nature topologique. Comme souvent en mathématiques des domaines qui semblent totalement étrangers peuvent intervenir pour résoudre un problème.

Encore un tube interconnectique ! Cette fois entre logique et topologie !

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Michel LAFOND
Alain MASCRET
Jean-Frençois MUGNIER
Jacky MARECHAL
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 188 – 1er semestre 2009

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM