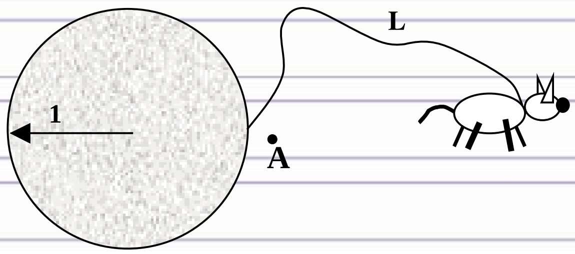
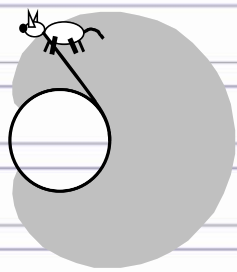
N° 103 – Février 2007

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- "Inscrire un carré dans un triangle"
- Pelouse interdite
- Ce que cache "Euclide livre 1, proposition 47"
- Collisions sur une barre





Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

- ✓ Bloc-notes 1
- ✓ Jeux et Problèmes 5

Articles

- ✓ "Inscrire un carré dans un triangle" 9
  Jean TERRERAN
- ✓ Pelouse interdite 19
  Michel LAFOND
- ✓ Ce que cache "Euclide livre 1, proposition 47" 29
  Henry PLANE
- ✓ Collisions sur une barre 33
  Emmanuel MOREAU

Editorial

Des calculs toujours et encore, encore et toujours. Mais aussi :

Des « **preuves sans mots** » : mise en place sur une figure, d'un fait mathématique, qui de par cette présentation s'impose, vu notre vécu, notre expérience et un modèle sous-jacent non dit, comme une évidence. *L'évidence, encore faut-il parfois, direz vous, l'asseoir sur ou la corroborer par un petit calcul à faire de tête et que la feuille de vigne par simple générosité et dans la tradition des classiques jeux des 7 ou 9 ou plus erreurs, vous joint souvent en annexe (une page ou deux jamais plus).*

Des « **preuves par mots** » : mise en scène, dans un scénario, modélisation verbalisée, d'un fait mathématique, qui par cette scénographie, se révèle comme allant de soi, de par leur confrontation avec les autres structures dont le modèle s'est trouvé enrichi, *second rôles, confidents, valets et soubrettes, sans lesquels qualités et propriétés, tourments et passions des premiers rôles nous resteraient étrangers.*

Qui se ressemble s'assemble : triangles semblables, qui toujours nous font tourner la tête et que l'on nous aurait caché depuis des siècles, cubes maquillés en dés avec leurs mouches de taffetas sur leurs faces, qui toujours se jouent de nous, cardioïdes qui n'en sont pas et lovent leurs envies autour d'une pelouse, tendues par un chien que des fourmis talonnent.

La fourmi n'est pas prêteuse dit-on, et pourtant, imaginez, mutation génétique ou dressage de cirque lilliputien, (inné ou acquis à vous de choisir vos modèles), qu'elle le devienne et qu'elle se mette à collaborer, à donner, non, faut pas exagérer tout de même, à échanger, ce serait déjà bien. Et voici des messages qui se mettent à vivre leur vie, et à voyager en toute indépendance (le rêve de tout puceron libéré du joug de ces fourmis tyranniques). Alors … Mais bien sûr ! Voilà la solution.

Et les élèves eux, libérés des contraintes, que sont-ils capables de voir, d'imaginer, comment les guider et les aider : récit d'une expérience.

Mode d'emploi (simples sugestions non exaustives)

Voici le programme de cette feuille de vigne qui, dans sa nouvelle version ultra portable et écologique (format réduit = tronc d'arbres épargnés et recyclage facilité) s'invite dans votre poche, prête à agrémenter :

- vos déplacements en transports collectifs (interdit de la lire en conduisant, cela peut nuire gravement à la santé et peut conduire à la suspension de points)
- vos entractes au spectacle au cinéma au jeu de quille ou bilboquet (mais là cela peut être dangereux, à consommer donc avec modération dans ces circonstances)
- vos insomnies (sans restriction)
- vos promenades, même celles qui vous conduisent au fond du jardin, ….
- …..

Mais là, moi, je vous laisse faire bon usage de votre feuille de vigne et recycler tout ce que vous aurez pu y trouver d'intéressant.

Patrick GABRIEL

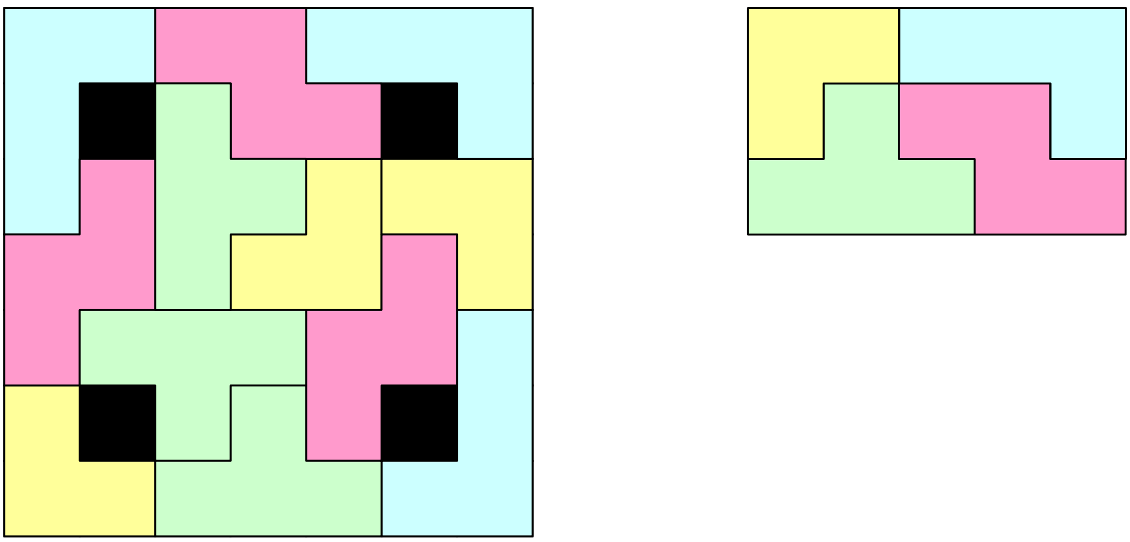
B loc-notes

SOLUTIONS DU RALLYE DES COLLEGES DE COTE D'OR ET SAONE ET LOIRE 2007

Exercice N°1 : Un 4×4 Sudoku :

a = 2	4	b = 1	3
3	1	4	2
1	c = 2	3	d = 4
4	3	2	1

Exercice N°2 : Encore des dalles :



Exercice N°3 : Le rêve de Madame Ièdre :

Il y a 13 faces en dehors du sol. Madame Ièdre s'appelle Paule.

Exercice N°4 : un carré très magique :

	+ ↓	+ ↓	+ ↓	
×→	**6**	**2**	**7**	84
×→	**9**	**4**	**5**	180
×→	**1**	**3**	**8**	24
	16	9	20	

Exercice N°5 : Géorientation :

Il reste à placer les points S, M et P

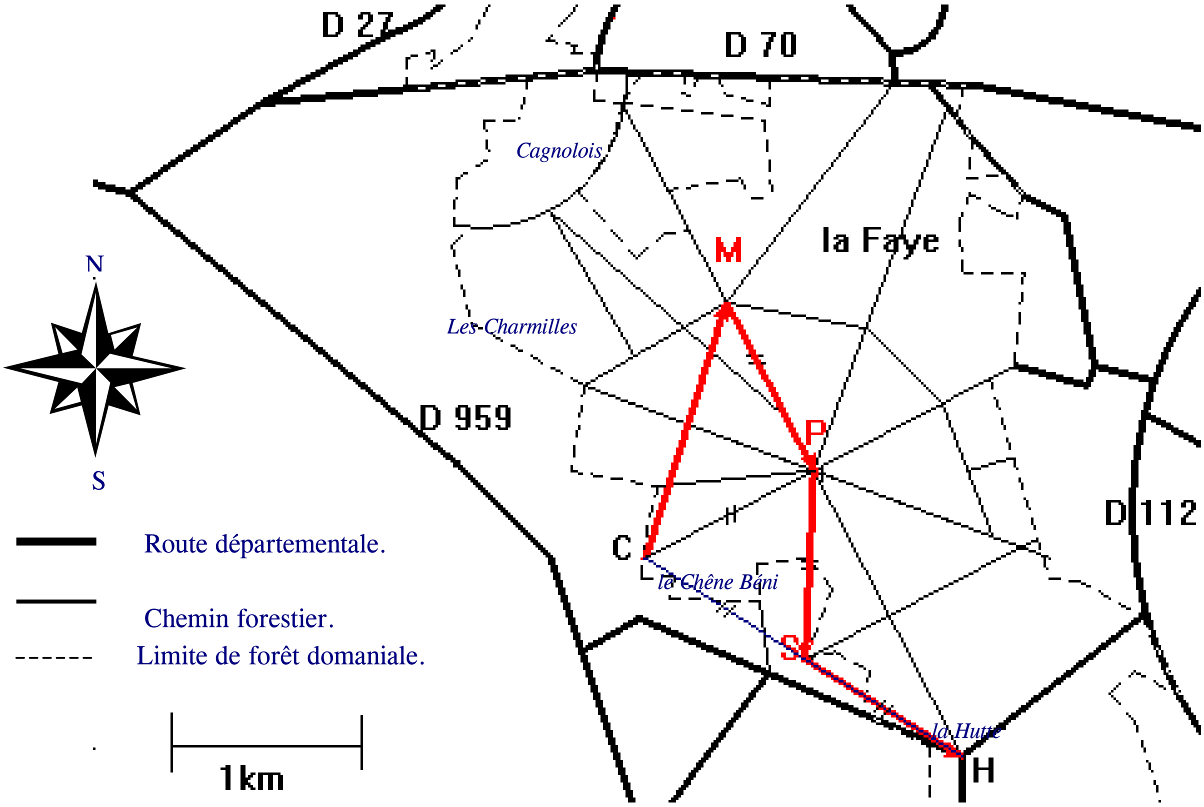
Puisque S est équidistant de C et H et que C, S et H sont alignés, alors S est le milieu du segment [CH].

Puisque S est équidistant de C, P et H, alors le cercle de centre S et de rayon SP passe par C, P et H, et donc le triangle a un côté qui est diamètre de son cercle circonscrit, donc ce triangle est rectangle en P.

Puisque M, P et H sont alignés alors le triangle CMP est aussi rectangle en P.

Et comme PC = PM alors le triangle CPM est isocèle rectangle en P.

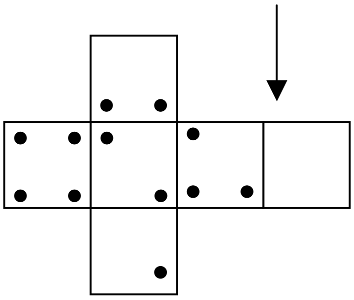
Puisque CP = 1km, on en déduit facilement que MP = CP = PS = SH = 1km = 1000m

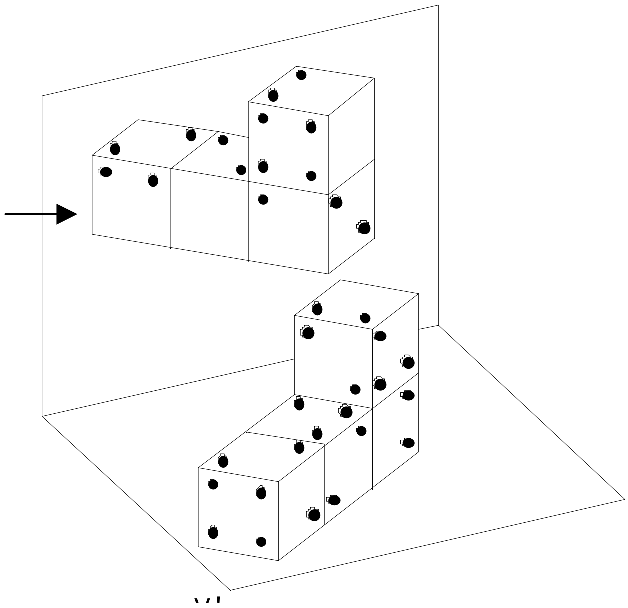


Le trajet le plus court est CMPSH qui mesure mathématiquement $(3000 + 1000\sqrt{2})$ mètres, soit environ 4414mètres.

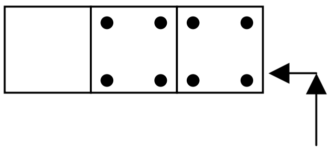
Exercice N°6 : Réflexion cubique :

Développement d'un dé.





Ce qu'on voit



Voici ce qui est en contact avec la table, et donc il y a 8 points.

Exercice N°7 : Drôle d'embouteillage :

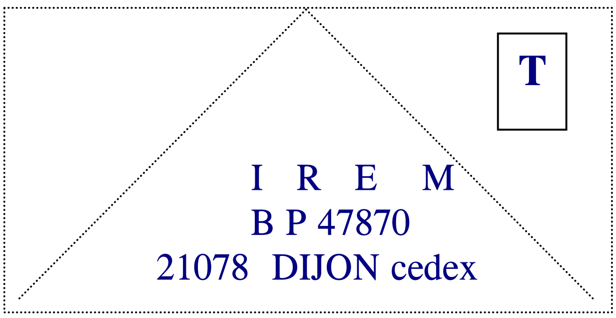
Il y a 9 bouteilles de 73cl et 18 bouteilles de 75cl.

Exercice N°8 : Un sacré scarabée :

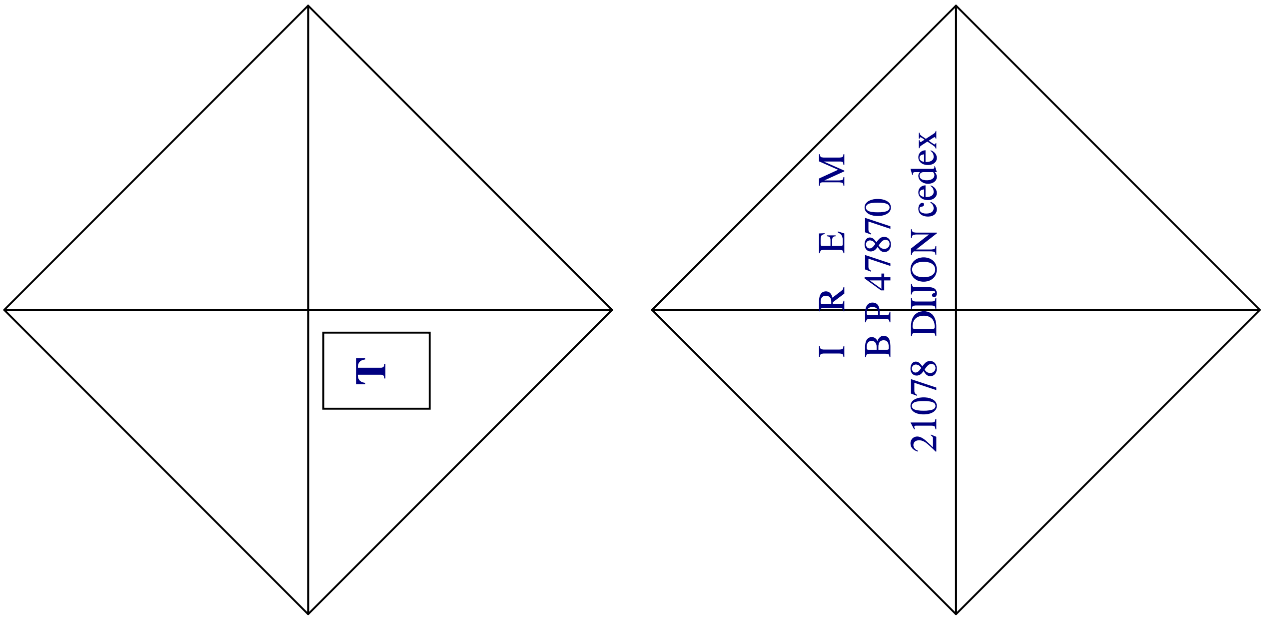
Le scarabée est revenu sur la face OAB.

Exercice N°9 : L'enveloppe de mémère :

Voici l'enveloppe initiale avec l'indication du pliage



Voici le carré (recto et verso) obtenu après pliage de l'enveloppe.



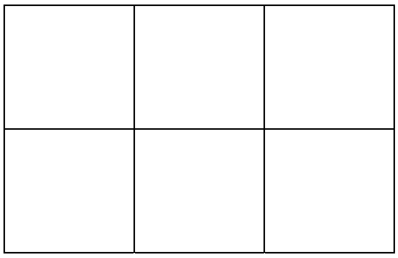
Le côté du carré est entre 15,5 et 15,6 cm. La mesure exacte est racine carrée de 242.

SOLUTIONS ABREGEES DU RALLYE MATHEMATIQUE DE BOURGOGNE 2007

(les solutions complètes paraîtront dans le numéro 104)

1 AFICHAGE DIGITAL	**644 fois.**
2 LE CALENDRIER	**Gaston est né un Mardi.**
3 EN FAMILLE	**Les âges sont : 1 an, 2 ans et 4 ans.**
4 TRIANGLES …RECTANGLE	**La longueur est de 57 cm.**
5 LE TOIT	**L'aire est d'environ 14 m^2.**
6 CAVE A VIN	**Utiliser les propriétés de symétrie des parallélogrammes de la figure.**
7 DITES 34	**$7037 \times 7038 \times 7039 = 348616371834$.**
8 SOMME TOUTE	**La somme est 9.**
9 UN DRÔLE DE PATRON	**Le volume est de 72 cm^3.**

JEU - 53



En traçant sur la grille ci-contre trois segments, démontrer sans le moindre calcul la belle formule :

$$\tan^{-1}(1)+\tan^{-1}(2)+\tan^{-1}(3)=\pi$$

PROBLÈME - 53

Démontrer simplement dans R$^+$ l'implication : $x^3+\dfrac{1}{x^3}=18 \quad\Rightarrow\quad x^5+\dfrac{1}{x^5}=123$

Solutions

JEU - 52

Un entier est dit BIDIGITAL si, en base 10, il s'écrit en utilisant au plus 2 chiffres différents.
Exemples : 2666262 et 33003033300 sont bidigitaux.
123456 = 90090 + 33366 est la somme de deux entiers bidigitaux.
Ecrire de même 1234567, 12345678 et 123456789 comme sommes de 3 entiers bidigitaux.

On a par exemple les solutions ci-dessous obtenues par tâtonnements inspirés :

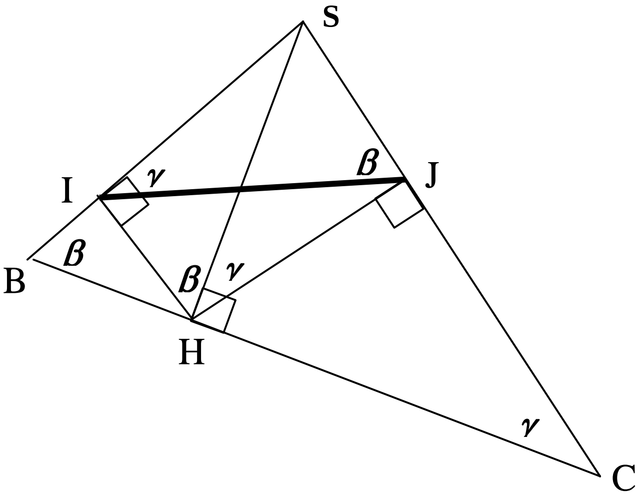
$$\begin{array}{r} 955995 \\ 277772 \\ 800 \\ \hline 1234567 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9777999 \\ 2525255 \\ 42424 \\ \hline 12345678 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 62626662 \\ 53355353 \\ 7474774 \\ \hline 123456789 \end{array}$$

Voici une solution proposée par Richard Beczkowski

Termes de la somme	90090	90090	90090	90090090
	33366	33366	33366	33333366
		1111111	12222222	33333
Total à obtenir	**123456**	**1234567**	**12345678**	**123456789**

PROBLÈME - 52

Dans un triangle acutangle ABC, soit H le pied de la hauteur issue d'un des 3 sommets S.
H se projette en I et J sur les deux côtés passant par S.
Démontrer que la longueur IJ ne dépend pas du sommet choisi.



Solution :

Les égalités d'angles :

angle (IBH) = angle (IHS) = angle (IJS) = β et

angle (JCH) = angle (JHS) = angle (JIS) = γ ne posent pas de problème.

On a : 2 aire (SHC) = HJ . SC = SH . HC donc HJ = $\dfrac{SH \ . \ HC}{SC}$ (1)

SJ = HJ tan (γ) = HJ $\dfrac{SH}{HC} = \dfrac{SH \ . \ HC}{SC} . \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{SH^2}{SC}$ (on a utilisé (1))

Les triangles SIJ et SBC sont semblables donc $\dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{SJ}{SB}$ (2)

Donc : $IJ = \dfrac{BC \ . \ SJ}{SB} = \dfrac{BC \ \ SH^2}{SB \ . \ SC} = \dfrac{BC^2 SH^2}{SB \ . \ SC \ .BC} = \dfrac{4 \ \ aire^2 \ \ (SBC)}{SB \ . \ SC \ . \ BC}$

Le résultat est symétrique par rapport aux 3 sommets S, B, C CQFD.

Solution proposée par Jean-Claude ANDRIEUX

La clef de la démonstration est la propriété suivante : Soit ABC un triangle quelconque : on pose $a = BC, \ b = CA, \ c = BA$ et on note R le rayon du cercle circonscrit à ABC alors $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})} = 2R$.

Les points $S, \ I, \ H$ et J sont cocycliques et le cercle circonscrit à HIJ a pour diamètre SH. On en déduit $IJ = SH \sin\left(\widehat{IHJ}\right)$; or $\left(\widehat{IHJ}\right)$ et $\left(\widehat{IAJ}\right)$ sont soit supplémentaires soit égaux (selon en fait que le triangle SBC est acutangle ou non) d'où en notant R le rayon du cercle circonscrit à SBC

$$IJ = SH \sin\left(\widehat{IHJ}\right) = SH \sin\left(\widehat{IHJ}\right) = SH \times \frac{BC}{2R} = \frac{aire(SBC)}{R}$$

le résultat est bien indépendant du sommet initialement choisi (que le triangle SBC soit acutangle ou non).

Autre solution proposée par Richard Beczkowski

Quelques théorèmes plus ou moins connus :

1) ***Al Kashi*** : dans le triangle SBC on a $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos\hat{S}$.
2) Pour tout triangle le rapport d'un côté au sinus de l'angle opposé est égal au double du rayon R du cercle circonscrit ou au rapport du produit des trois côtés et du double de l'aire.
3) ***Ptolémée*** : pour qu'un quadrilatère soit inscriptible il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits de deux côtés opposés.

La droite (SH) définit avec les côtés de l'angle $\hat{S}$ deux angles $\hat{S}_1$ et $\hat{S}_2$ qui sont, dans les conditions de la figure proposée, les complémentaires respectifs de $\hat{B}$ et de $\hat{C}$.
Dans le triangle rectangle SIH : $SI = SH.\cos\hat{S}_1 = SH.\sin\hat{B}$ et $HI = SH.\cos\hat{B}$.
Dans le triangle rectangle SJH : $SJ = SH.\cos\hat{S}_2 = SH.\sin\hat{C}$ et $HJ = SH.\cos\hat{C}$.
D'après 2) $\sin\hat{S} = \dfrac{BC}{2R}$ $\sin\hat{B} = \dfrac{SC}{2R}$ $\sin\hat{C} = \dfrac{SB}{2R}$.
L'aire du triangle SBC est $A = \dfrac{1}{2}SH.BC$ d'où $SH = \dfrac{2A}{BC}$.

<u>Méthode utilisant 1) dans le triangle SIJ</u> : $IJ^2 = SI^2 + SJ^2 - 2SI.SJ.\cos\hat{S}$.

$$IJ^2 = SH^2.\sin^2\hat{B} + SH^2.\sin^2\hat{C} - 2SH^2.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}.\cos\hat{S} =$$

Soit

$$\frac{SH^2}{4R^2}\left(SC^2 + SB^2 - 2SB.SC.\cos\hat{S}\right) = \frac{SH^2}{4R^2}BC^2$$

On obtient $\boxed{IJ = \dfrac{A}{R}}$.

<u>Méthode utilisant 3)</u> : $SIHJ$ qui a deux angles droits est inscriptible donc $IJ.SH = SI.HJ + SJ.HI$.
On en déduit

$$IJ = SH\left(\sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}\right) = SH.\sin\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = SH.\sin\hat{S} = \frac{2A}{BC}.\frac{BC}{2R}.$$

On obtient $\boxed{IJ = \dfrac{A}{R}}$.

La longueur IJ ne dépend pas du sommet choisi.

<u>Méthode n'utilisant pas les angles</u> :

Le point I étant sur la droite (SB) on peut poser $\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SB}$.

Grâce aux orthogonalités proposées par l'énoncé nous avons : $\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{SI} = SI^2$ et $\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{SB} = SH^2$

Par conséquent $k\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{SB} = k^2 SB^2 = kSH^2$ d'où l'on déduit $k = \dfrac{SH^2}{SB^2}$.

$$\overrightarrow{SI} = \frac{SH^2}{SB^2}\overrightarrow{SB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SJ} = \frac{SH^2}{SC^2}\overrightarrow{SC}.$$

A partir de $\overrightarrow{IJ}^2 = \left(\overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI}\right)^2$ on obtient $IJ^2 = \left(\dfrac{SH^2}{SC^2}\overrightarrow{SC} - \dfrac{SH^2}{SB^2}\overrightarrow{SB}\right)^2$.

Qui se développe en $IJ^2 = \dfrac{SH^4}{SC^2} + \dfrac{SH^4}{SB^2} - 2\dfrac{SH^4}{SB^2SC^2}\overrightarrow{SB}\overrightarrow{SC}$.

Soit $IJ^2 = \dfrac{SH^4}{SB^2SC^2}\left(SB^2 + SC^2 - 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}\right) = \dfrac{SH^4BC^2}{SB^2SC^2}$ et

$$IJ = \frac{SH^2BC}{SB.SC} = \frac{4A^2}{BC.SB.SC} = \frac{A}{R}.$$

Cette méthode a l'avantage de ne pas dépendre du cas de figure.

"Inscrire un carré dans un triangle" [1]

Jean Terreran, Lycée C & R Janot, Sens.

Ce problème, posé aux élèves de seconde en 1947 par Lebossé et Hémery ([LEB1947]) est un classique, voire un "incontournable"[2]. Ainsi, en 1484, Nicolas Chuquet dans sa *Géométrie* ([CHU1979]) demandait, parmi de nombreux autres problèmes d'inscription de figures, de *calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral*. H. L'Huillier signale que c'est un problème classique chez les géomètres italiens (Fibonacci, Pacioli, ...) où l'on trouve aussi un triangle isocèle (Piero de la Francesca) et même le triangle 13.14.15.

Au XVIII^e^ siècle, Etienne Bézout proposait d'*appliquer l'algèbre à la géométrie* ([BEZ1788]) pour construire ce carré[3]. En revanche, on ne trouve de traces de ce problème ni dans Les *Éléments* d'Euclide ([EUC1993]), ni dans les *Éléments de Géométrie* de Clairaut ([CLA1987]).

Au cours du temps les modes de résolution changent au gré des changements de programme : conformément au programme de 1931, P. Chenevier ([CHE1931]) propose aux élèves de seconde de procéder comme Bézout, sans le citer. En 1947, Lebossé et Hémery utilisent l'outil "homothétie". Aujourd'hui le programme de seconde 2000 fournit l'outil "triangles semblables". J'avais souvent proposé cet exercice aux élèves de seconde, c'était un bon exemple d'application des homothéties. La découverte du texte de Bézout allait me permettre de le proposer à nouveau. La première tentative, sous forme de problème ouvert a été un échec.

Que font les élèves ?

Il y a ceux qui construisent un rectangle et qui cherchent en vain à le transformer en carré et ceux qui, par des constructions "miraculeuses", pensent avoir trouvé la solution Il faut alors beaucoup de temps et de persuasion pour les convaincre (le sont-ils vraiment ?) de leurs erreurs. Avant que tout le monde ne se décourage, il

---

[1] Reproduction avec l'autorisation de l'éditeur de l'article : "*Inscrire un carré dans un triangle*". Cet article a été publié dans le Repère n°63, d'avril 2006, pages 5 à 12 ; Editeur : Topiques éditions à Metz ; ISSN 1157-285X.

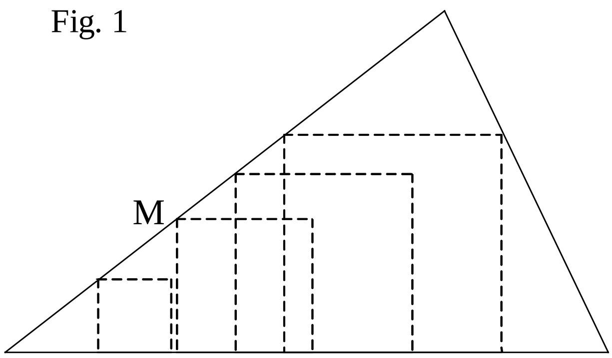
[2] Un article sur le sujet écrit par Patrick Guyot a déjà été publié dans le Repère n° 51, d'avril 2003 ([GUY2003]).

[3] L'édition originale parut en 1770 à l'Imprimerie Royale. *Le Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine* avait été publié à Paris, en 6 volumes, à partir de 1764.

faut renoncer à examiner ces solutions et proposer d'autres pistes. On comprend bien pourquoi l'Académie Royale des Sciences a fini, sous l'impulsion de d'Alembert, par ne plus examiner les solutions au problème de la quadrature du cercle.

Certains ont ainsi construit un carré dans le triangle et ont modifié le troisième côté de ce triangle, Thalès ou les triangles semblables permettant de trouver la solution. Les autres ont inscrit des carrés de différentes tailles (voir la fig.1) et ont… observé ; ils conjecturent alors assez vite un alignement qui leur permet de conclure. Au risque de choquer les puristes, cette méthode s'apparente fort à la méthode de fausse position utilisée en algèbre : une "fausse position" du sommet M sur un des côtés permet d'en déduire la bonne solution. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où, dans les deux cas, il s'agit d'un problème de proportionnalité ; dans le cas géométrique, le mot position retrouve son sens traditionnel.

Fig. 1



Mis à part cette remarque qui avait plu aux élèves, cette activité reste relativement pauvre. Dans son article sur le même sujet, Patrick Guyot pose la même question, mais avec beaucoup plus de succès. Heureusement Bézout allait arriver. Malgré le handicap de n'être pas bourguignon[4&5], la proximité de sa ville natale - Nemours n'est qu'à dix lieues de Sens – est peut-être une des raisons pour lesquelles la bibliothèque municipale de cette ville possède plusieurs de ses ouvrages[6]. Le théorème d'arithmétique qu'on lui attribue restait un bon souvenir de Terminale C et constituait une invitation à en savoir plus sur ce mathématicien du XVIII^{e}.

Si le tome 1 (Arithmétique et géométrie) de son *Cours de Mathématiques* est assez classique, le tome 2 ("contenant l'algèbre & l'application de l'algèbre à la géométrie") comporte en revanche plusieurs idées originales. La suite de cet article présente une activité construite à partir de sa méthode d'inscription du carré dans le triangle (on la trouvera *in extenso* sur le site de l'IREM de Dijon ([DIJ]).)

[4] Le groupe « Histoire des Maths » de l'IREM de Dijon étudie depuis quelques années les mathématiciens bourguignons.

[5] Non bourguignon, certes, mais que serait-il advenu si le duc Sans Peur n'avait été assassiné au pont de Montereau, à moins de quatre lieues de Nemours, en 1419 ?

[6] L'exemplaire de la Bibliothèque de Sens appartenait au citoyen français Bourbon Berset, lui a-t-il été confisqué en 1793 ?

En utilisant les heures en demi-classe, les élèves ont été répartis en groupes de trois ou quatre.

Séance n°1 : (55 min)

Exercice 1 :

Voici le texte, sans la figure, d'un problème posé par Etienne Bézout (1) dans son Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie (Édition de 1788) :

Proposons-nous donc pour première question, de *décrire un quarré* ABCD (fig.9) *dans un triangle donné EHI.*

1° Lire cet énoncé et reformuler la consigne pour qu'elle soit plus facilement comprise par un élève du XXI^e^ siècle.

(1) Etienne Bézout est un mathématicien né en 1730 près de Sens, à Nemours où le lycée porte son nom, et est mort aux Basses-Loges, près de Fontainebleau, en 1783.

Les élèves ont déjà travaillé sur un texte du XVIII^e^ (Le calcul approché de $\sqrt{20}$ par la méthode d'Euler). Ils traduisent tous, ou presque, "décrire" par "inscrire" sans difficulté.

2° On donne, en annexe, la solution de Bézout. Les questions posées ci-dessous doivent permettre de comprendre chaque étape de la construction et de la démonstration. La reproduction de la figure 9 étant de mauvaise qualité, on a ébauché une nouvelle figure que l'on complétera au fur et à mesure de la lecture.

a. Lire les lignes 1 à 3 et observer la figure : la consigne a-t-elle été bien traduite ?

b. Lire les lignes 4 à 10 et expliquer ce que veut faire l'auteur.

c. Lire les lignes 11 à 13 : Comment les données et les inconnues sont-elles nommées ?

d. Lire les lignes 14 & 15: Quel théorème du cours de seconde reconnaît-on dans le paragraphe donné en bas de page sous la référence *Géom.109* ?

e. Écrire les rapports que l'on peut déduire de la similitude des triangles, puis observer comment ces proportions étaient écrites au XVIII^e^ siècle (lignes 15 à 17.)

On lit : *EF est à EG comme FI est à GB, comme* ……….

Par exemple : "6 est à 2 comme 21 est à 7" ou "40 est à 5 comme 96 est à…"

f. Dans la section *Arithmétique* de l'ouvrage, au paragraphe 169, Bézout rappelle simplement les règles de calcul qui permettent de transformer des rapports.

Lire alors les lignes 18 à 20 et refaire les calculs.

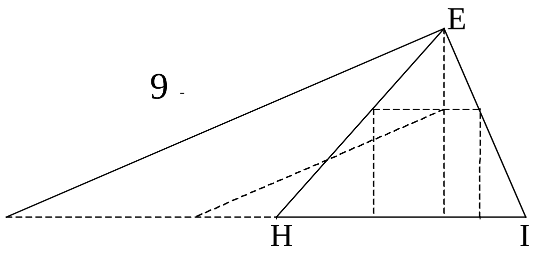
Vérifier que l'on obtient bien : $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

g. Lire les lignes 21 à 23. Quelle est la quatrième proportionnelle à $a + b$, b et a ? Dans le paragraphe 184, Bézout rappelle que l'on sait construire cette quatrième proportionnelle à la règle et au compas.

h. Lire et comprendre la méthode de Bézout (lignes 24 à 29), en notant, au fur et à mesure sur la figure, les lettres correspondantes.

i. A quoi les lignes 30 à 33 servent-elles ?

Par ces mots, *un triangle donné,* nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, &c. Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à



GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement, il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, & celle de FG, & ensuite les égaler. Nommons donc a la hauteur connue EF ; b, la base connue HI, & x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 109) avoir

$EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : GE :: HI : AB$, ou a : $a - x :: b : AB$, donc (*Arith.* 169) $AB = \dfrac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\dfrac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (184), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b, & a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire égale à $EF + HI$, & l'on tirera EO ; puis ayant pris FM égale à $HI = b$, on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x ; car les triangles semblables EFO, GFM, donnent $FO:FM::FE:FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\dfrac{ab}{a+b}$.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & sont, par conséquent, semblables.*

Que font les élèves ?

a. Les élèves ont beaucoup de difficultés à admettre l'expression *triangle donné* : "On n'a pas le droit de mesurer, donc on ne connaît rien !" Toute la difficulté de la détermination d'une donnée par une lettre resurgit.

b. Même les élèves qui "voient" ce que Bézout veut faire ("s'il trouve G, il aura le carré") rechignent à l'exprimer. La plupart d'entre eux préfèrent se lancer directement dans la résolution sans annoncer d'abord la stratégie choisie, ce n'est pas nouveau.

c. Pas de difficulté.

d. On reconnaît sans hésiter les triangles semblables, et l'expression *égaux chacun à chacun* est jugée plus précise que l'énoncé proposé dans le cours.

e. & f. Le guidage proposé pour comprendre cette partie a éliminé toute difficulté. Il serait peut-être plus riche de les aider moins et de les laisser chercher davantage.

g. Peu d'élèves comprennent le terme *quatrième proportionnelle*, ils maîtrisent pourtant assez bien les tableaux de proportionnalité vus en collège, mais ils les considèrent peut-être comme une boîte noire.

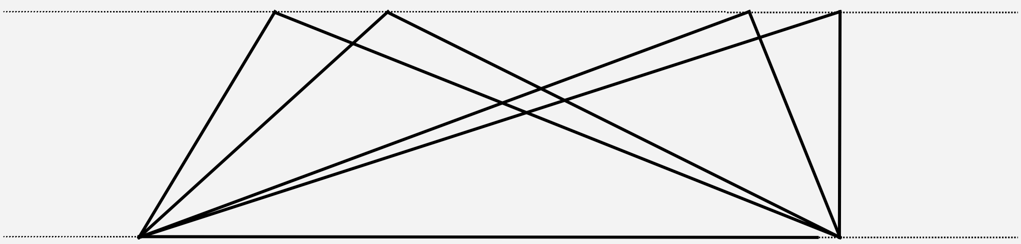
h. C'est une partie délicate. S'ils savent établir des proportions dans des circonstances données, ils n'imaginaient pas que l'on puisse provoquer des situations pour en créer[7]. Je leur ai signalé que Descartes, mais aussi d'autres avant lui, remplaçait le côté de longueur $a + b$ par un côté de longueur 1 et obtenait ainsi le produit $a \times b$ de deux nombres donnés. Quelques élèves ont tenu à vérifier.

i. Pas de difficulté.

Séance n° 2 : (55 min)
Exercice 2 :

On a vu que la méthode de Bézout consistait à construire la grandeur $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

1° Expliquer pourquoi les carrés inscrits dans chacun des quatre triangles ci-dessous sont égaux.



2° En déduire un troisième mode de construction du carré inscrit, en utilisant le triangle le plus approprié parmi les quatre proposés.

Que font les élèves ?

1°. Pas de difficulté.

2° Chacun se doute que c'est le triangle rectangle le plus pratique (mais c'est le seul triangle particulier, il faudrait proposer aussi un triangle isocèle pour voir) moins nombreux sont ceux qui réussissent. Ceux-là tracent la bissectrice, non parce que tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle droit, mais parce que la diagonale du carré est à 45°.

[7] Dans l'activité de Patrick Guyot, Marolois et Al Khwarizmi proposent directement, sans analyse préalable, une solution, respectivement géométrique et algébrique, que les élèves justifient.

Commentaires :

Toutes ces solutions sont astucieuses et peuvent susciter l'admiration de quelques-uns, mais les autres se demandent pourquoi s'ingénier à inscrire des figures dans d'autres figures : "Déjà qu'on a du mal à construire le cercle inscrit dans un triangle !" Hélas ! Aucun des auteurs cités plus haut ne répond à cette question. On trouve bien aujourd'hui, dans les manuels d'analyse de 1ère, une échelle de 6 m que l'on ne peut approcher du pied du mur autant qu'on le voudrait à cause d'un bloc de béton cubique de 1 m^3 ; la question étant de savoir quelle hauteur va-t-on pouvoir atteindre. Mais on peut difficilement croire que ce problème seul a motivé Bézout et tous les autres.

Alors imaginons ……

Exercice 3 :

Reprenons la formule de Bézout $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

Cette relation peut s'écrire aussi : (rayer la relation fausse)

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{a+b}$ ou $x(a+b) = ab$ ou $x = \dfrac{b}{1+b}$ ou $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Entourer celle qui a été utilisée lors de la construction de Bézout et faire vérifier.
Dans les exercices qui suivent, on va utiliser les autres formes.

Que font les élèves ?

Il est plus prudent de vérifier soigneusement tous ces résultats, les simplifications sont parfois fantaisistes (on l'a bien cherché !) La dernière forme est souvent rejetée et la réduction au même dénominateur n'est réussie qu'au terme de beaucoup de souffrances.

Exercice 4 :

Définition : a et b étant deux nombres positifs donnés, le nombre y défini par la relation $\dfrac{1}{Y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ s'appelle la *moyenne harmonique* de a et b.

(Elle a peut-être été inventée par les Pythagoriciens pour la musique).

1° *Exemples* :

a. Vérifier que 7 est la moyenne harmonique de 4 et 28.

b. Résoudre l'exercice (travail personnel) pour la prochaine séance.

2° Trouver une relation entre y et le côté x du carré construit précédemment.

3° Ainsi, inscrire un carré dans un triangle permet de construire "à la règle et au compas" la moyenne harmonique de deux nombres a et b donnés, il suffit pour cela de :

Construire le double de x	☐	Doubler d'abord a dans le triangle	☐
Doubler d'abord b dans le triangle	☐	Doubler d'abord a et b dans le triangle	☐

(Cocher les bonnes réponses et faire vérifier)

Que font les élèves ?

2° Ce calcul est encore insurmontable pour trop d'élèves.
1° et 3° Bien réussis en général.

Commentaires :

S'il s'agissait réellement d'un mode de construction de la moyenne harmonique, il serait étonnant qu'Euclide n'ait pas proposé sa propre solution dans les *Éléments*, alors qu'il connaissait ces moyennes et qu'il donne une construction de la moyenne géométrique de a et b.

Or, si l'on écrit la relation de Bézout sous la forme $ab = (a + b)x$, le problème revient à égaler deux aires de parallélogrammes (ou de rectangles), l'un donné par sa base a et sa hauteur b, l'autre par sa base $a + b$, et sa hauteur cherchée. La construction découle alors directement de la proposition VI.24 des *Éléments*[8].

Exercice 5 :
(à commencer en classe si vous êtes en avance, à terminer à la maison.)

1° Construire un rectangle MNPQ et un rectangle MRSQ qui contient MNPQ et dont la longueur MR vaut MN + NP.
2° La diagonale [MS] coupe [NP] en T. La parallèle à (MN) passant par T coupe [MQ] en U et [RS] en V.
a. Montrer que les rectangles TPQU et NRVT ont même aire.
b. En déduire que les rectangles MRVU et MNPQ ont même aire.
3° On appelle a et b les longueurs respectives NP et MN.
A l'aide d'une des relations de l'exercice 3 non encore utilisée, donner la valeur de la longueur NT.
(Cette dernière méthode de construction est due à Euclide au III[e] siècle av. J.C)

[8] Clairaut traite aussi cette question dans la seconde partie, paragraphes V et VI, pp 77 et suivantes de ses *Elémens de Géométrie*.

Que font les élèves ?

1° & 2° Bien réussi : tout le monde utilise, sans aide, l'égalité des triangles situés de part et d'autre de la diagonale.

3° Peu réussissent, il faudrait peut-être demander d'exprimer les aires de ces deux rectangles.

Commentaires :

Cette activité 2 est assez longue, et plusieurs groupes ont dû terminer seuls à la maison, ce qui a ajouté à la difficulté. Cet exercice a été corrigé la semaine suivante. Les deux méthodes de construction (Bézout et Euclide) ont été présentées sur des transparents. Les analogies observées renforcent l'idée qu'on inscrit un carré dans un triangle pour obtenir une moyenne harmonique. Les élèves sont perplexes, ils se demandent si leur professeur de mathématiques a le droit de faire de telles hypothèses. Promesse leur est faite de les informer de toute "protestation" émanant de lecteurs de cet article.

Exercice de travail personnel :

1° En musique, une corde de longueur L produit un son lorsqu'elle vibre.
Une corde de longueur L/2 donnera le même son, mais une octave plus haut (plus aigu). Pour obtenir un son moyen entre les deux précédents, on utilise une corde dont la longueur L' est la moyenne harmonique des deux longueurs précédentes.
Montrer que L' = 2L/3.

(Cette méthode a été utilisée par Pythagore pour construire une gamme qui porte son nom et qui a été peu modifiée depuis.)

2° Un cycliste grimpe un col à la vitesse moyenne de 18 $km.h^{-1}$ puis le redescend à la vitesse moyenne de 42 $km.h^{-1}$.
Calculer la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'ensemble du trajet aller-retour.
Que représente cette moyenne pour les deux vitesses de montée et de descente ?

Que font les élèves ?

La question 1° (corde) ne soulève pas de difficulté particulière, malgré une certaine incrédulité face à ce Pythagore-là. La seconde (vitesse), en revanche, est moins bien réussie : une partie des élèves calcule évidemment la moyenne arithmétique, l'autre, "flairant" le piège, utilise la bonne moyenne, mais peu justifient ce résultat correctement.

Pour finir, on a remarqué qu'une même formule écrite de différentes manières pouvait conduire à autant de méthodes différentes et on a pris rendez-vous un peu plus tard pour utiliser la dernière formule avec la fonction inverse (même s'il ne s'agit plus d'une construction à la règle et au compas, les manipulations sur la courbe peuvent se révéler intéressantes).

Conclusion :

Cette activité pourra paraître longue à certains collègues (deux séances de module et trente minutes de corrections), les calculs posant bien plus de difficultés que les démonstrations géométriques. Il est quand même intéressant de mêler différents domaines des mathématiques (ici algèbre et géométrie, en dehors du cas habituel du calcul dans un repère) ainsi que différentes époques (antiquité et XVIII^{e} siècle) pour montrer que les mathématiques se construisent et s'enrichissent progressivement, en un mot qu'elles "bougent"… même s'ils trouvent que leur professeur exagère un peu avec ses hypothèses. Beaucoup, enfin, ont bien compris que pour résoudre un problème plusieurs stratégies sont possibles.

Bibliographie

([LEB1947]) C. Lebossé & C. Hémery, *Géométrie Plane*, Classe de Seconde des collèges et lycées, Fernan Nathan, 1947. 6^{e} édition, 1951.

([CHU1979]) Manuscrit de 1484, transcrit et commenté par Hervé Lhuillier, *La Géométie de Nicolas Chuquet, première géométrie en langue française*, Paris, Vrin, 1979.

([BEZ1788]) E. Bézout, *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie*, (4 tomes), Paris, Ph. D. Pierres, 1788.

([EUC1993]) *Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*, 1819, A. Blanchard, Paris, 1993.

([CLA1987]) A. Clairaut, *Elémens de Géométrie*, 1753, Siloë, Laval, 1987.

([CHE1931]) Pierre Chenevier, *Cours d'algèbre*, […] Classe de seconde, Paris, Hachette, 1931.

([GUY2003)) Patrick Guyot, *Un carré dans le triangle. De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème*, Repères-IREM n°51, avril 2003.

([DIJ]) http://www.u-bourgogne.fr/irem

Pelouse interdite

Michel LAFOND,

I. Le problème est le suivant : (figure 1)

Youki est attaché en A, point situé au bord d'une pelouse circulaire de rayon 1.
Sa laisse est de longueur L.
La pelouse lui est évidemment interdite.
Quelle est l'aire de la surface accessible à Youki ?

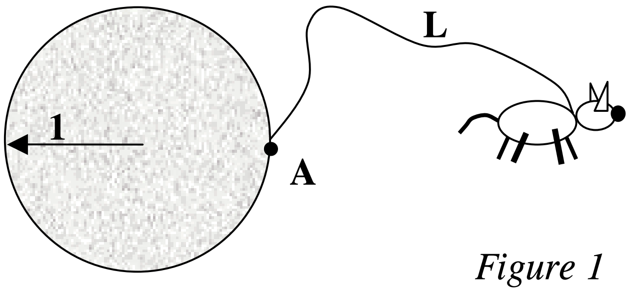


Figure 1

Voici (figure 2) la surface en question lorsque la longueur de la laisse est $L = 2{,}5$.

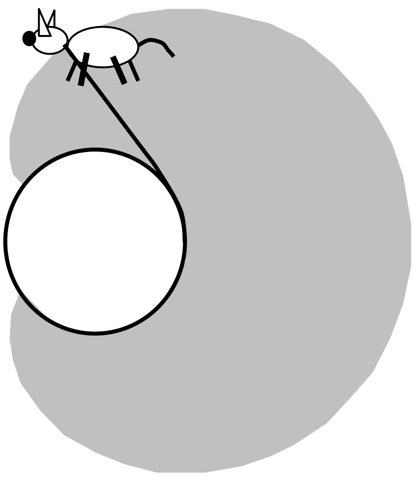


Figure 2

Nous allons calculer l'aire accessible dans le cas $L = \pi$ (le plus facile) puis dans le cas $L < \pi$ et enfin dans le cas $L > \pi$.

II. Calcul de l'aire dans le cas où la longueur L de la laisse est égale à π.

La longueur de la laisse est $L = \pi$.
Dans ce cas, Youki peut atteindre de justesse tout point du périmètre.
On a la figure 3 ci-dessous (seule la partie supérieure est visible) : Youki peut parcourir, laisse tendue, l'arc (BCD) où D est diagonalement opposé à A.
O est le centre de la pelouse.
Pour calculer l'aire accessible, on va envisager deux méthodes, la première est utilisable en terminale, la seconde suppose des connaissances plus approfondies du calcul intégral.

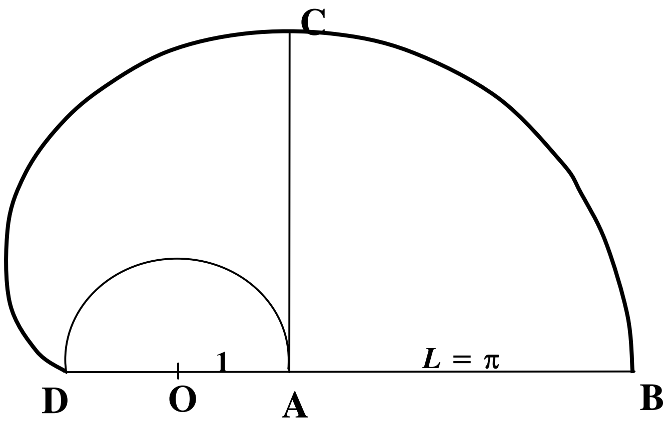


Figure 3

- **<u>Calcul au niveau terminale</u> :**

On remplace dans la figure 3, le demi-cercle (AD) par un demi-polygone régulier convexe à n côtés.
L sera pris égal à la longueur du demi-polygone : $\boldsymbol{L = n\,c}$ où c est le côté du demi-polygone.
Ensuite, on fera tendre n vers l'infini en admettant la validité de la méthode.
On a la figure 4 ci-dessous :

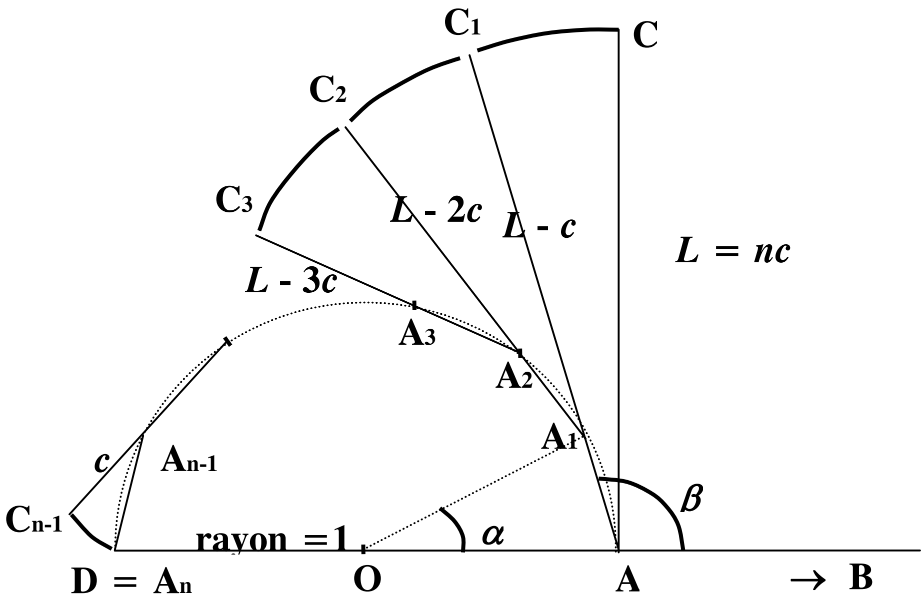


Figure 4

Le demi-polygone (A A_1 A_2 $\cdots$ A_n) a pour côté : $c = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ où l'angle au centre mesure $\alpha = \frac{\pi}{n}$.
Youki démarre sa laisse tendue selon AB (figure 3).
Il peut déjà parcourir tout le secteur du cercle de centre A, de rayon π et d'angle au centre β jusqu'à AC_1 (figure 4).
Cet arc mesure $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} = \pi\frac{n+1}{2n}$.
Ensuite, pivotant autour de A_1, Youki parcourra le domaine $\left(A_1C_1, A_1C_2\right)$ qui est un secteur de rayon L - c et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{n}$, puis il parcourra le domaine $\left(A_2C_2, A_2C_3\right)$ qui est un secteur de rayon L - 2c et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{n}$ et ainsi de suite jusqu'au domaine $\left(A_{n-1}C_{n-1}, A_{n-1}A_n\right)$ qui est un secteur de rayon $L - (n-1)c = c$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{n}$.
En remarquant que $L = nc$, $L - c = (n - 1)\ c$ - - - , la somme des aires de ces secteurs est

$$S = \pi\left(n^2c^2\,\frac{n+1}{4n} + (n-1)^2c^2\,\frac{2}{4n} + (n-2)^2c^2\,\frac{2}{4n} + \cdots + c^2\,\frac{2}{4n}\right)$$

$$S = \pi\frac{c^2}{4n}\left(n^2\left(n+1\right) + 2\left[\left(n-1\right)^2 + \left(n-2\right)^2 + \cdots + 1^2\right]\right)$$

Si on ne connaît pas la somme des carrés des n premiers entiers, c'est le moment de la redécouvrir.
Voici une possibilité qui évite la récurrence :

$$K = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$K = K - (n+1)^3 + 3\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\frac{n\ \ (n+1)}{2} + n + 1\ ;$$

[Dans ce dernier $\sum$, la contribution pour $i = 0$ est 0] donc :

$$3\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(2n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

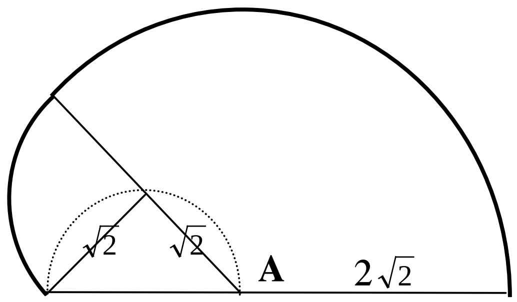
Il n'y a plus qu'à diviser par 3 pour avoir $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Reprenons le calcul de S :

$$S = \pi \frac{c^2}{4n}\left(n^3 + n^2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{3}\right) = \pi \frac{c^2}{4}\left(n^2 + n + \frac{(n-1)(2n-1)}{3}\right) = \pi \frac{c^2}{12}(5n^2+1)$$

Aire qu'il faut multiplier par 2 puisque S ne donne que la moitié supérieure de l'aire accessible.

Avec $c = 2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ cela donne <u>une aire accessible de</u> : $\frac{2\pi}{3}(5n^2+1)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$



Le cas $n = 2$

On peut vérifier (figure ci-dessus) que dans le cas d'une pelouse carrée ($n = 2$), et d'une laisse de longueur $L = 2\sqrt{2}$, l'aire accessible est bien égale à $\frac{2\pi}{3}(5.2^2+1)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\pi$.

C'est le moment délicat du passage à l'infini. Il faut connaître ou bien les équivalents, ou bien la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Avec cette dernière possibilité, on a :

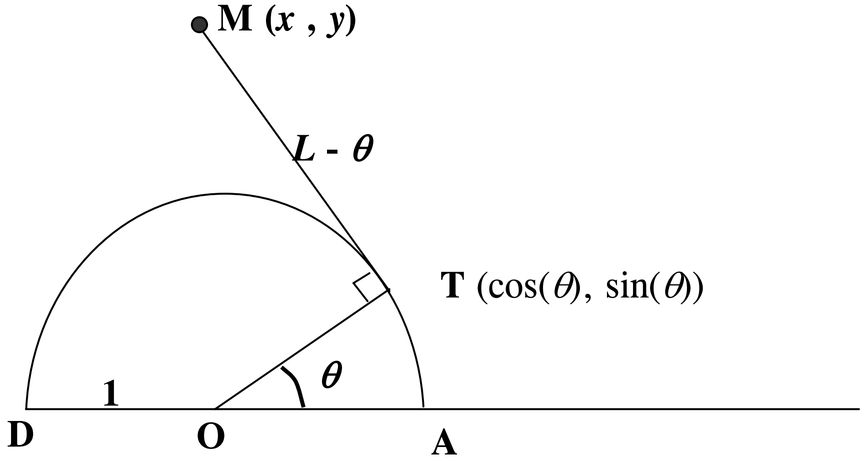
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{3}(5n^2+1)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}\frac{5n^2+1}{n^2} = \frac{2\pi}{3}\frac{\pi^2}{4}5 = \frac{5}{6}\pi^3$$

Si le rayon de la pelouse est 1, et la longueur de la laisse π, l'aire totale accessible est $\frac{5\pi^3}{6}$.

Par exemple, l'aire accessible avec une laisse de 10π mètres et un rayon de 10m est égale à $\frac{5}{6}\pi^3 \times (10\text{m})^2$, ce qui fait dans les 2584m^2.

- **Calcul par les intégrales :**

Figure 5



Lorsque la laisse de Youki (On reste avec l'hypothèse $L = \pi$ unités) a commencé d'encercler la pelouse, il se trouve en M (figure 5 ci-dessus)
On choisit pour paramètre l'angle (OA, OT) $= \theta$.
Un vecteur directeur de $\overrightarrow{TM}$ est [- sin(θ), cos(θ)], et sa norme est $L - \theta$ puisque l'arc (AT) mesure précisément θ.
[Il est bon de rappeler qu'on mesure les angles en radians. Bientôt, on aura à dériver sin(x), et en dehors des radians, la dérivée de sin(x) n'est plus égale à cos(x) ! !
[Exercice : A quoi est égale la dérivée de sin(x) si x est mesuré en degrés ?]

Donc les coordonnées de M sont : $\begin{cases} x = \cos(\theta) - (\pi - \theta)\sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) + (\pi - \theta)\cos(\theta) \end{cases}$

Pour $\theta = 0$, M est en C (et non en A !), pour $\theta = \pi$, M est en D, le domaine du paramètre θ est donc $[\mathbf{0}, \pi]$, correspondant au trajet de l'arc (CD) en gras dans la figure 6 ci-dessous.

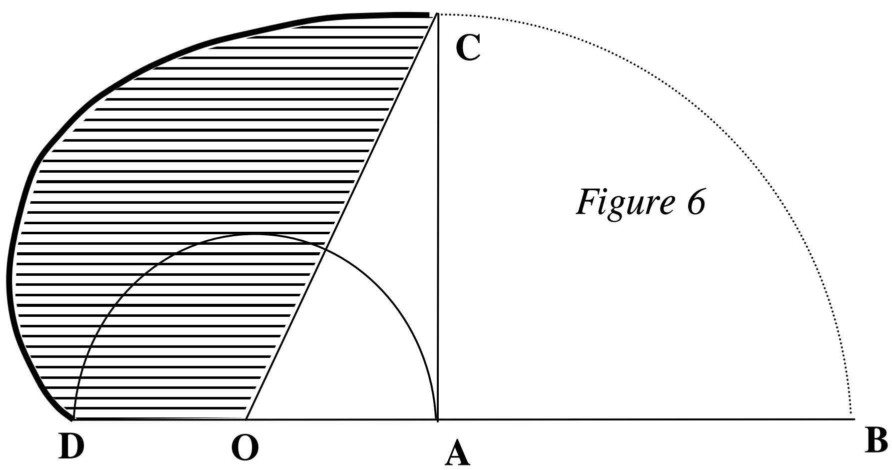


Figure 6

L'arc (BCD) ci-dessus n'est pas un arc de cardioïde, bien qu'il lui ressemble étrangement.
En fait, (BCD) est composé du quart de cercle (BC) et de l'arc CD qui est ce qu'on appelle une <u>développante</u> du demi-cercle (AD).

L'aire du domaine (OCDO) (hachuré dans la figure 6), est donnée par

$$U = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} xdy - ydx$$

[Une "démonstration visuelle" de cette formule est donnée dans **V)**]

Ici, on a : $dx = -(\pi-\theta)\cos(\theta)d\theta$ et $dy = -(\pi-\theta)\ \sin\ (\theta)\ \ d\theta$, d'où :

$$xdy - ydx = (\pi-\theta)^2 d\theta \;;$$

et donc : $$U = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(\pi-\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=\pi} t^2 dt = \frac{\pi^3}{6}$$

Pour avoir l'aire totale accessible, il faut (Revoir la figure 6) ajouter à U l'aire du triangle rectangle (OAC), retrancher l'aire du demi cercle supérieur (pelouse interdite), ajouter l'aire du quart de cercle (ABC) et multiplier le tout par 2.

On trouve : $2\left(\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{4}\right)=\frac{5\pi^3}{6}$ comme dans la méthode artisanale.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule des aires en coordonnées polaires : $\frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta$ pour avoir directement l'aire U' du domaine hachuré de la figure 7 ci-dessous.

Alors, $U' = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(\pi-\theta)^2 d\theta$ est évidente physiquement puisque "l'aire élémentaire" en grisé à droite, vaut $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}(\pi-\theta)^2 d\theta$.

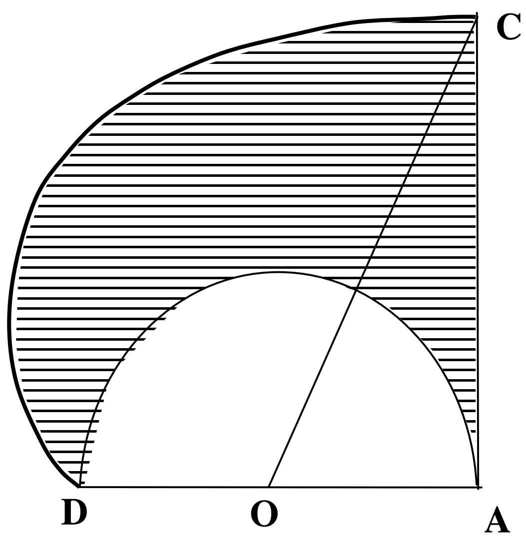
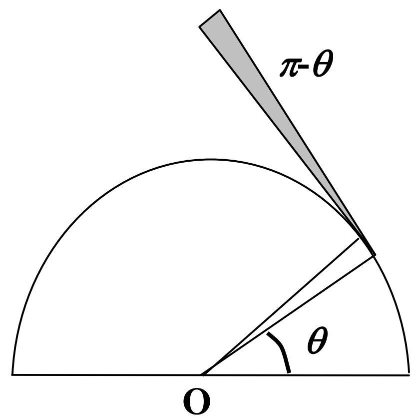
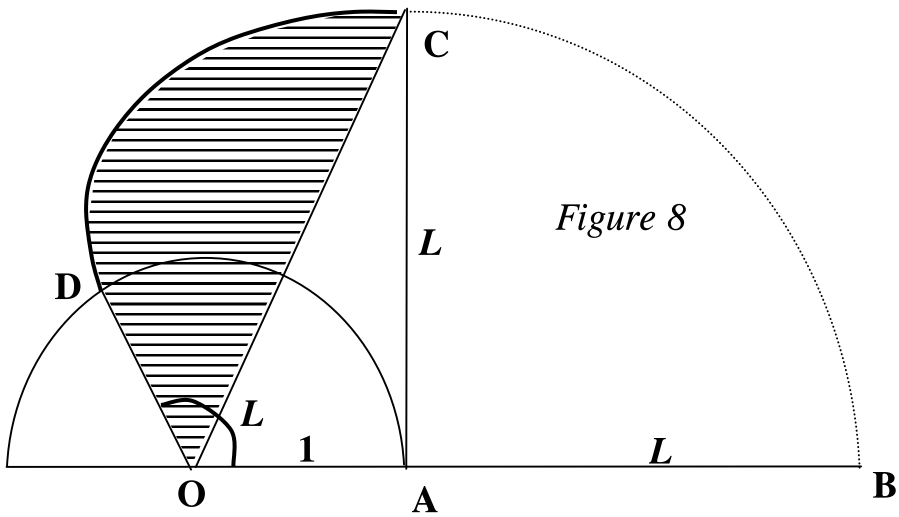


Figure 7



III. Calcul de l'aire dans le cas où la longueur L de la laisse est inférieure à π

On est dans le cas de la figure 2. Les calculs sont les mêmes qu'à la fin du II), sauf que cette fois, le paramètre θ varie de 0 à L, car quand Youki arrive en D laisse tendue, l'arc de cercle (AD) mesure précisément L (figure 8 ci-dessous).



L'aire hachurée de la figure 8 vaut ici

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=L}(L-\theta)^2\,d\theta=\int_{t=0}^{t=L}t^2\,dt=\frac{L^3}{6}$$

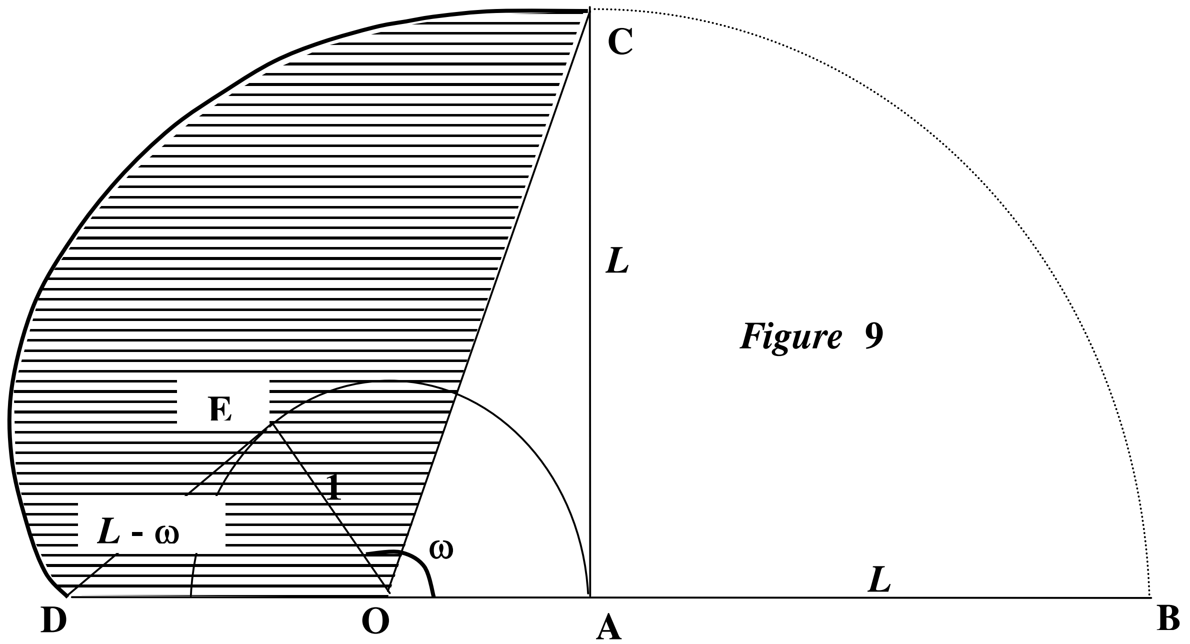
L'aire accessible totale vaut alors (voir la fin du II)

$$2\left(\frac{L^3}{6}+\frac{L}{2}-\frac{L}{2}+\frac{\pi L^2}{4}\right)=\frac{L^2(2L+3\pi)}{6}$$

Par exemple, l'aire accessible avec une laisse de 30 mètres et un rayon de pelouse égal à 10m est $\frac{9}{2}(2+\pi)\times(10\text{m})^2$, ce qui fait dans les 2314m^2.

IV. Calcul de l'aire lorsque la longueur L de la laisse est supérieure à π

On a la figure 9 ci-dessous. Quand Youki arrive en D laisse tendue, celle-ci décrit l'arc de cercle (AE) de longueur ω, suivi du segment [ED] qui a par conséquent une longueur de L-ω.



En examinant le triangle rectangle (OED), on voit que ω vérifie l'équation : $\tan(\omega - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{L-\omega}$, ou encore : $\tan(\omega) = \omega - L$. ($\omega$ étant obtus, on a $\tan(\omega) < 0$).

L'aire hachurée mesure :

$$\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\omega}(L-\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{t=L-\omega}^{t=L} t^2\,dt = \frac{L^3-(L-\omega)^3}{6}$$

L'aire totale accessible vaut alors :

$$2\left[\frac{L^3-(L-\omega)^3}{6} + \frac{L}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi\frac{L^2}{4}\right] = \frac{L^3-(L-\omega)^3}{3} + L - \pi + \pi\frac{L^2}{2}$$

ω étant solution de $\tan(\omega) = \omega - L$ dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Ainsi, pour une pelouse de rayon 10m et une laisse de 40m, en résolvant $\tan(\omega) = \omega - 4$, on trouve $\omega \approx 2{,}043245$ d'où une aire totale accessible d'environ 4483 m^2.

V. La formule mystérieuse

- Soit à calculer l'aire du domaine (OAB) où l'arc (AB) est celui d'une courbe paramétrée par les équations $x = x\,(t)$ et $y = y\,(t)$ (figure 10 ci-dessous.)

Le paramètre t varie de $t = a$ au point A et $t = b$ au point B, x et y sont supposées continues.

Il faut justifier : $aire(OAB) = \frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} xdy - ydx$.

Cela est évident sur le schéma ci-dessous où les infiniment petits sont d$x<0$ et d$y>0$:

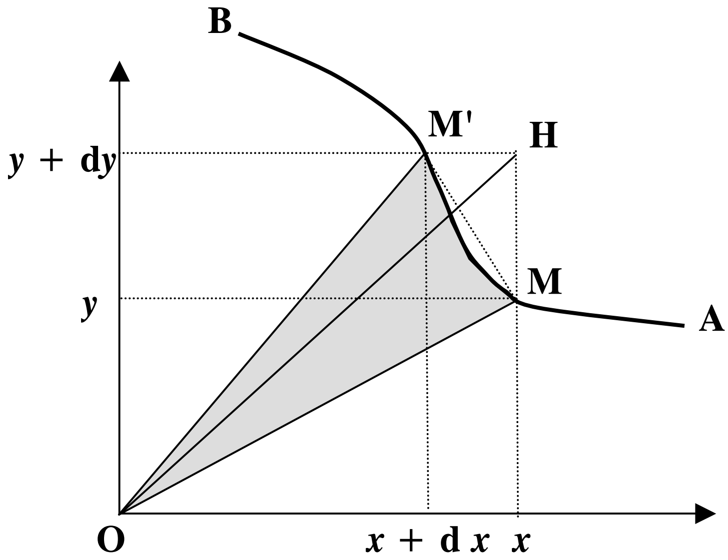


Figure 10

dx et dy étant infiniment petits, le domaine en grisé a une aire géométrique égale à aire (triangle OMM') = aire (triangle OMH) + aire (triangle OHM') - aire (triangle MHM') $= \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y) - \frac{1}{2}(y + \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

Les signes sont choisis en tenant compte du fait que $\mathrm{d}x < 0$ et $\mathrm{d}y > 0$ pour que les aires soient positives. Bien entendu, il faudrait examiner les 4 cas de figure selon les signes de dx et dy, pour s'assurer qu' à chaque fois, on a bien l'aire géométrique avec le signe +, ceci dans un repère orthonormé et de sens direct (sinon il faudrait permuter x et y dans la formule).

- Dans le cas discret, cette formule permet le calcul de l'aire d'un polygone non croisé quelconque du plan : Si le polygone a pour sommets les points (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) ; $\cdots$;(x_n, y_n) supposés numérotés dans le sens direct lorsqu'on parcourt sa frontière, alors en posant $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ l'aire du polygone est $A = \frac{1}{2}\sum xdy - ydx$ dans le sens suivant :

$$2A = x_1(y_2 - y_1) + \cdots + x_n(y_{n+1} - y_n) - y_1(x_2 - x_1) - \cdots - y_n(x_{n+1} - x_n)$$

qui se simplifie en :

$$2A = x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{n-1}y_n + x_ny_{n+1} - \left(y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_{n-1}x_n + y_nx_{n+1}\right)$$

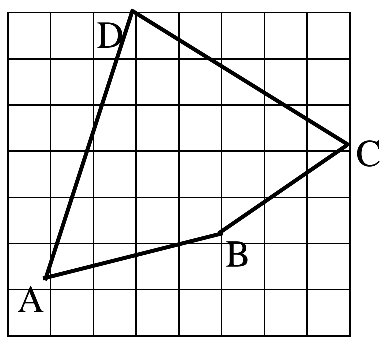
ou en abrégé :

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_iy_{i+1} - y_ix_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

(C'est plus clair avec les déterminants).

Ainsi le quadrilatère (ABCD) ci-contre
où A (1 ; 1) ; B (5 ; 2) ; C (8 ; 4) ; D (3 ; 7) a une aire égale à

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}\right) = 20{,}5.$$

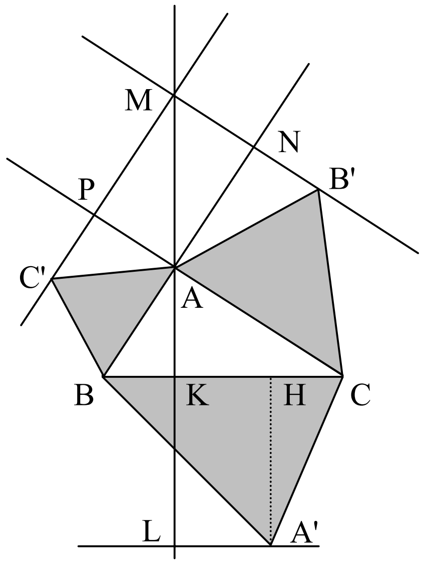


Ce que cache "Euclide livre 1, proposition 47"

(le théorème de Pythagore) car il y a bien plus que les carrés

Henry PLANE,

Etudions la figure ci-contre : sur les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A sont construits trois triangles semblables A'BC, B'CA, C'AB et ce à l'extérieur du triangle. La parallèle à (AC) menée par B' recoupe (AB) en N et la parallèle à (BA) menée par C' recoupe (AC) en P. Ces parallèles se rencontrent en M. MNAP est un rectangle.



Les triangles B'CA et C'AB étant semblables le rapport de leurs éléments homologues est égal à $\frac{CA}{AB}$.

Il en est donc de même pour AN et AP qui jouent le rôle de hauteurs.

$$\frac{NA}{PA} = \frac{NA}{NM} = \frac{AC}{AB}.$$

Le triangle NMA est donc rectangle et semblable à ABC. Il s'en suit que $\widehat{MAN} = \widehat{BCA}$, angles homologues. Si (AM) et (BC) se coupent en K on a : $\widehat{KAB} = \widehat{MAN} = \widehat{BCA}$ par suite $\widehat{AKB}$ est droit.

<u>(MA) est orthogonale à (BC)</u>. (1)

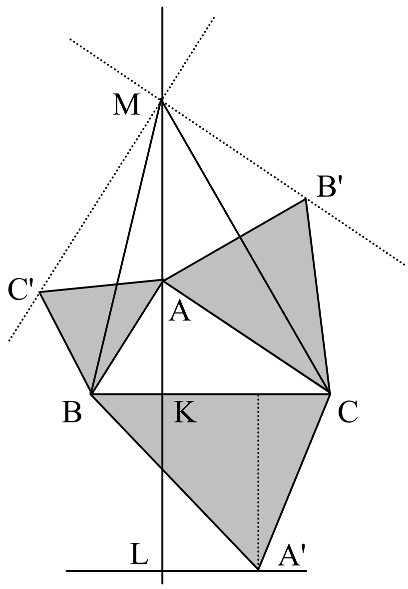
Revenons aux rapports de similitude :

- triangles NMA et ABC : $\frac{MA}{BC} = \frac{MN}{BA} = \frac{PA}{BA}$ (MNPA rectangle)
- triangles C'BA et A'CB, PA et A'H jouant le rôle de hauteurs : $\frac{A'H}{BC} = \frac{PA}{BA}$ et

si on prolonge MK de $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MA}$ alors $\frac{KL}{BC} = \frac{MA}{BC} = \frac{A'H}{BC}$ donc <u>KL = A'H = MA.</u>

<u>(A'L) est parallèle à (BC).</u> (2)

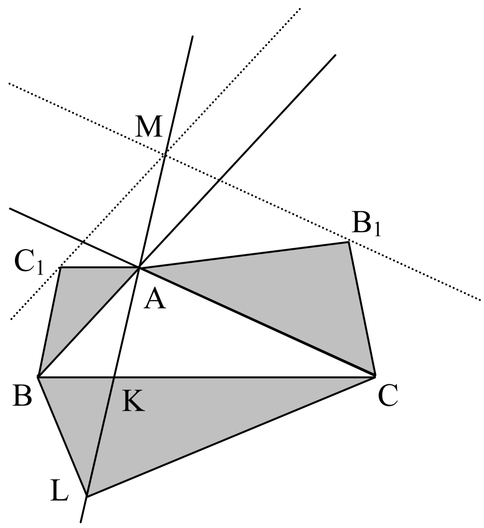
Ces deux propriétés vont conduire à une relation d'aires.
(C'BA) = (MBA) même base dans la même bande de parallèles.
(MBA) = (KBL) même hauteur BK et égalité des bases MA = KL.
Par suite : (C'BA) = (KBL).
Pour des raisons analogues, (B'AC) = (KLC).
Donc :
(C'BA) + (AB'C) = (KBL) + (KLC) = (LBC) = (A'BC) puisque (2) (A'L)//(BC).
Le triangle construit sur l'hypoténuse a son aire égale à la somme des aires des triangles semblables construits sur les deux autres côtés.



Les triangles semblables constituant la base de figures semblables la propriété est vraie pour en particulier des triangles équilatéraux ou des carrés ou tout autre polygone régulier. Une question d'unité d'aire permet alors d'écrire : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
On vient ici de démontrer le théorème livre VI proposition 31 sans utiliser le théorème dit de Pythagore. Celui-ci devenant seulement un cas particulier.

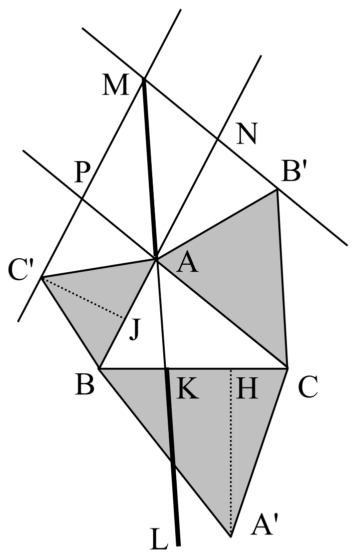
Revenons sur le rôle de l'angle droit en A du triangle ABC.

Il est toujours possible de construire sur BC un triangle dont l'aire soit égale à la somme de celles de triangles quelconques construits sur les autres côtés de ABC, et ce avec KL = MA puisque
(BKL) = (BMA) = (C_1MA) = (C_1AB)
d'où (BLC) = (B_1AC) + (C_1AB). (3)



Peut-on ajouter une autre condition ? Par exemple la similitude des triangles :

Si $\widehat{BAC}$ est non droit donc MNAP n'est qu'un parallélogramme, les triangles NMA et ABC ne sont pas semblables $\widehat{BAK} \neq \widehat{ACB}$. (MA) non orthogonal à (BC). La longueur AM reportée en KL ne détermine pas une parallèle sur laquelle se trouverait A'.
$\frac{A'H}{BC}$, $\frac{PA}{BA}$ et $\frac{C'J}{BA}$ n'ont pas de raison d'être égaux.

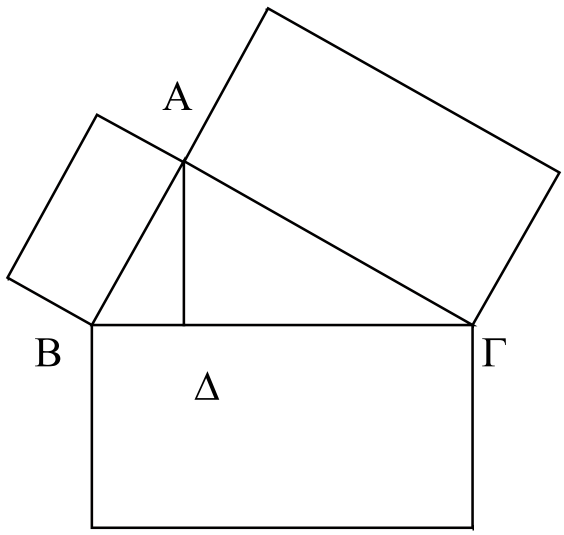


A'BC, ABC' et ACB' sont semblables mais l'aire de A'BC ne peut pas être égale à l'aire de LBC (somme des aires ABC' et ACB').
Ce qui, en quelque sorte, établit la réciproque de la relation de Pythagore.

ANNEXE

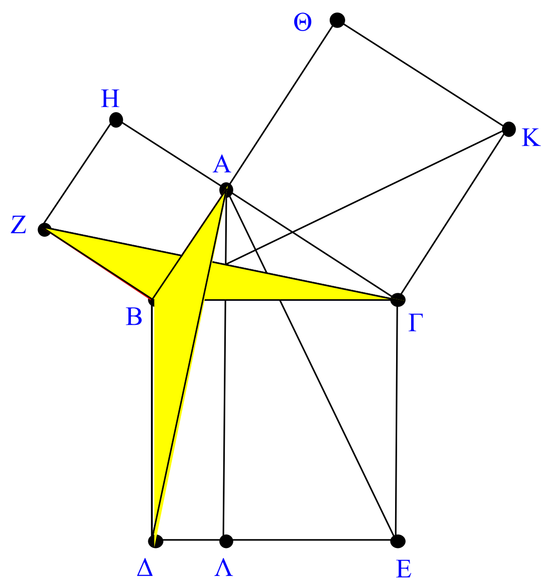
(texte des propositions d'Euclide traduites littéralement par F. PEYRARD)

PROPOSITION XXXI du livre VI. (parfois appelée Pythagore généralisé)
Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprènent l'angle droit.
Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ ; je dis que la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés ΒΑ, ΑΓ.
Menons la perpendiculaire ΑΔ.



PROPOSITION XLVII livre I. (théorème dit de Pythagore)
Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit ; je dis que le quarré du côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΘΓ ; et par le point Α conduisons ΑΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.



Collisions sur une barre (1/2)

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny
zim.moreau.mann@wanadoo.fr

À l'instant $t = 0$, cent fourmis, assimilées à des points mobiles, se déplacent sur une barre, disons d'un mètre. Elles avancent à vitesse constante −la même pour toutes : disons un mètre en quarante secondes− font instantanément demi-tour à chaque fois qu'elles rencontrent une autre fourmi et poursuivent aveuglément jusqu'à ce qu'elles tombent à l'une des extrémités de la barre.
Au bout de combien de temps toutes les fourmis seront-elles tombées ?

Je laisse aux amateurs le plaisir de chercher un peu cette énigme, à laquelle on peut répondre sans aucun calcul. Il est surprenant d'apprendre que, malgré la multitude des conditions initiales possibles, on peut apporter à ce problème une réponse simple, que je donne en note[1].

Je dois à Jean-Luc Schmitt l'idée de prolonger cette énigme. On peut en effet poser les questions suivantes :

1. Quel est le nombre moyen de collisions avant que toutes les fourmis ne tombent ?
2. Quel est le nombre moyen de collisions occasionnées par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute ?
3. Quelle est la distance moyenne parcourue par la $k^{ème}$ fourmi avant sa chute ?

---

[1] Au bout de quarante secondes, toutes les fourmis seront tombées. Pour s'en rendre compte, imaginons que chaque fourmi est porteuse d'un message, qu'elle transmet instantanément à chaque rencontre avec une autre fourmi. Imaginons maintenant le cheminement des messages : tous sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme ! Tous les messages, donc toutes les fourmis, seront tombés au bout de quarante secondes.
On peut même être plus précis : à l'aide d'un arrêt sur image effectué à l'instant $t = 0$, repérons, en parcourant la barre de la gauche vers la droite, la première fourmi se dirigeant vers la droite : elle est à une distance d_1 du bord droit. Parcourons maintenant la barre de la droite vers la gauche : la première fourmi se dirigeant vers la gauche est à une distance d_2 du bord gauche. Le raisonnement précédent nous permet d'affirmer que la dernière fourmi (qui n'est pas nécessairement l'une des précédentes), tombera à l'instant $t = \max(d_1 / v, d_2 / v)$, c'est-à-dire pour notre exemple $t = \max(40d_1, 40d_2)$.

Cet article répond successivement à ces trois questions.
La question 1 peut faire l'objet d'une activité en classe avec une bonne Terminale S.
La question 3 peut être traitée jusqu'à la relation (7) si l'on suppose que les mobiles sont initialement équirépartis. Il peut alors être intéressant de représenter à l'aide d'un ordinateur la fonction qui à k associe la distance moyenne parcourue par le $k^{ème}$ mobile pour découvrir la réponse :

> *Dans ce cas, la distance moyenne parcourue par le $k^{ème}$ mobile avant sa chute est, avec une bonne approximation, égale à 2 fois la distance qui sépare initialement le mobile du bord le plus proche.*

Il me faut ici remercier Gilles Bousquet, à qui je dois de stimulants échanges, et de très précieux conseils ...

1. Nombre moyen de collisions

1.1. Considérations préliminaires

Retenons le principe de la solution à l'énigme, proposée en note. Ce principe nous sera fort utile par la suite :

Si l'on ne peut différentier les n mobiles, une collision est assimilable à un croisement.

Autrement dit, une configuration initiale étant donnée, il revient au même de compter le nombre total de collisions entre les fourmis (avec les hypothèses précédentes), que de compter le nombre total de croisements, en supposant désormais que les fourmis se croisent sans se heurter. Il découle de cette remarque que le nombre de collisions dépend seulement de la liste des directions initiales, et non des positions initiales.

1.2. Le calcul

Nous considérons dans tout ce qui suit que **les 2^n directions initiales possibles des fourmis sont équiprobables**. Déterminer le nombre total moyen de collisions revient, d'après les considérations précédentes, à calculer le nombre moyen de croisements entre messages (voir la note 1). Notons F_n ce nombre et considérons :

Cr_k, la variable aléatoire égale au nombre de croisements occasionnés par le $k^{ème}$ message.

On a alors :

$$F_n = \frac{1}{2}\left(E\left(Cr_1\right) + E\left(Cr_2\right) + \cdots + E\left(Cr_n\right)\right)$$

Il nous faut en effet diviser par 2 pour ne pas compter 2 fois un croisement entre deux fourmis.
Introduisons également :

D_{k-1} la v.a. égale au nombre de fourmis (de messages) initialement orientées vers la droite parmi les $k-1$ premières.

G_{n-k} la v.a. égale au nombre de fourmis initialement orientées vers la gauche parmi les $n-k$ dernières.

$k-1$ fourmis "avant". *D_{k-1} : le nombre de fourmis initialement orientées à droite parmi ces $k-1$ fourmis*	*la $k^{ème}$ fourmi*	*$n-k$ fourmis "après".* *G_{n-k} : le nombre de fourmis initialement orientées à gauche parmi ces $n-k$ fourmis.*

Si le $k^{ème}$ message est initialement orienté vers la gauche, il croisera D_{k-1} messages avant sa chute, alors que s'il est initialement orienté vers la droite, il croisera G_{n-k} messages avant de tomber.
On en déduit d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(Cr_k = i\right) = \tfrac{1}{2} P\left(D_{k-1} = i\right) + \tfrac{1}{2} P\left(G_{n-k} = i\right)$$

D'où en multipliant par i et en effectuant la somme pour i variant de 1 à $n-1$:

$$E\left(Cr_k\right) = \tfrac{1}{2} E\left(D_{k-1}\right) + \tfrac{1}{2} E\left(G_{n-k}\right)$$

Or d'après nos hypothèses concernant les directions initiales, D_{k-1} et G_{n-k} suivent des lois binomiales de paramètres respectivement $(k-1, \tfrac{1}{2})$ et $(n-k, \tfrac{1}{2})$, donc :

$$E\left(Cr_k\right) = \frac{1}{4}(k-1+n-k) = \frac{n-1}{4}$$

On remarque au passage que ce nombre est indépendant de k. Il est maintenant aisé de conclure :

$$F_n = \frac{1}{2}\left(E\left(Cr_1\right) + E\left(Cr_2\right) + \cdots + E\left(Cr_n\right)\right) = \frac{n\left(n-1\right)}{8}$$

> Si n fourmis sont initialement disposées sur la barre, le nombre moyen de collisions avant que toutes ne tombent est $\frac{n(n-1)}{8}$.

1.3. Remarques complémentaires

Il est pratique de représenter par un 0 (resp. un 1) une fourmi dirigée vers la gauche (resp. la droite). Une configuration à un instant donné, s'il on ne s'intéresse qu'aux directions des fourmis, est alors représentée par une suite de 0 et de 1 (ex. avec $n=7$: 1101001).
Nous retrouvons aisément par ce moyen le fait qu'une collision ($1|0 \to 01$) est assimilable à un croisement ($10 \to 01$) si l'on ne peut différentier les fourmis. Nous remarquons de plus que le nombre de 0 (resp. de 1) n'est pas modifié lors d'une collision. Si nous tenons compte des fourmis déjà tombées, le nombre de 0 (resp. de 1) reste donc constant au cours du temps. Ainsi, s'il y a initialement i "0" (et donc $n-i$ "1"), alors i fourmis tomberont à gauche, et $n-i$ tomberont à droite.
Nous pouvons préciser encore un peu. Puisque les fourmis font demi-tour à chaque rencontre (collision), elles conservent leurs rangs au cours du mouvement, c'est-à-dire que la fourmi qui occupe le rang k initialement est toujours comprise entre les fourmis qui occupaient (qui occupent) les $(k-1)^{ème}$ et $(k+1)^{ème}$ rangs initialement. Donc, s'il y a initialement i "0" et $n-i$ "1", alors les i premières fourmis tomberont à gauche et les $n-i$ dernières à droite.

2. Nombre moyen de collisions par mobile

Notons C_k la variable aléatoire égale au nombre de collisions occasionnées par le $k^{ème}$ mobile. L'espérance $E(C_k)$ de cette variable aléatoire est alors le nombre moyen de collisions que nous cherchons.

2.1. Loi de probabilité de la v.a. C_k

Considérons la configuration initiale 1 1 0 **0** 1 0 0 0 et intéressons-nous au nombre de collisions pour la $4^{ème}$ fourmi figurée en gras. Puisqu'il y a cinq 0, nous savons (voir 1.3) que la $4^{ème}$ fourmi va tomber à gauche ($5 \geq 4$). Les premières configurations sont, sans tenir compte de l'ordre des rebonds qui n'importe pas dans le calcul du nombre de collisions et en laissant visibles les fourmis qui ont chuté aux extrémités :

1 1 0 **0** 1 0 0 0
1 0 1 **0** 0 1 0 0
0 1 0 **1** 0 0 1 0
0 0 1 **0** 1 0 0 1
0 0 0 **1** 0 1 0 1
0 0 0 **0** 1 0 1 1
0 0 0 **0** 0 1 1 1

Tout se passe comme si les 1 glissaient vers la droite et les 0 vers la gauche (remarquer les diagonales qui apparaissent).
Les directions (0 ou 1) des fourmis ne peuvent changer que lors d'une collision (10 $\rightarrow$ 01). Un 1 ne peut donc passer à droite du $k^{ème}$ mobile que si ce mobile est un 0, le passage du 1 correspondant alors à deux rebonds (1**0** $\rightarrow$ 0**1** $\rightarrow$ 0**1**0 $\rightarrow$ 0**0**1). Le passage de p 1 correspondra alors à $2p$ rebonds.

Si le $k^{ème}$ mobile est initialement un 1, il devra d'abord entrer en collision avec les mobiles qui sont à sa droite (c'est le cas si l'on sait qu'il tombera finalement à gauche) pour devenir un 0 et ainsi laisser passer les 1. Le passage de p 1 occasionne alors $2p+1$ rebonds.

Notons p le nombre de 1 initialement à gauche du $k^{ème}$ mobile et j le nombre de 0 initialement à sa droite.

p "1" à gauche	*le $k^{ème}$ mobile*	*j "0" à droite*

Le nombre de 0, sans compter le $k^{ème}$ mobile qui est éventuellement un 0, est $j+k-1-p$.

D'après l'analyse précédente :

- Le $k^{ème}$ mobile tombera à gauche après $2p$ collisions si et seulement s'il est initialement un 0, s'il a initialement p 1 à sa gauche et s'il y a au total au moins k 0. Cette dernière condition s'écrit $j+k-1-p+1 \geq k$ soit $j \geq p$ (les 1 de gauche doivent pouvoir prendre la place de 0 à droite).
  Ces trois conditions sont remplies dans $\binom{k-1}{p} \times \sum_{j \geq p} \binom{n-k}{j}$ configurations initiales possibles (choix des places des p 1 à gauche et d'au moins p places pour les 0 à droite).
- Le $k^{ème}$ mobile tombera à gauche après $2p+1$ collisions si et seulement s'il est initialement un 1, s'il a initialement p 1 à sa gauche et s'il y a au total au moins k 0. Cette dernière condition s'écrit $j+k-1-p \geq k$ soit $j \geq p+1$.
  Ces trois conditions sont remplies dans $\binom{k-1}{p} \times \sum_{j \geq p+1} \binom{n-k}{j}$ configurations initiales possibles (choix des places des p 1 à gauche et d'au moins $p+1$ places pour les 0 à droite).

Les nombres de configurations initiales correspondant aux cas où le $k^{ème}$ mobile tombera à droite s'obtiennent de manière semblable, ou bien en utilisant la symétrie

du problème (un 0 en $k^{ème}$ position rebondira en moyenne autant de fois qu'un 1 en $(n-k+1)^{ème}$ position, il suffit donc d'échanger $k-1$ et $n-k$).
On obtient ainsi les résultats suivants, où nous avons procédé à un petit changement d'indice :

Si $p \leq \min(k-1, n-k)$ alors :

$$P\left(C_k = 2p\right) = \frac{1}{2^n}\left\{\binom{k-1}{p}\sum_{i\geq 0}\binom{n-k}{p+i} + \binom{n-k}{p} \times \sum_{i\geq 0}\binom{k-1}{p+i}\right\} \qquad (1)$$

$$P\left(C_k = 2p+1\right) = \frac{1}{2^n}\left\{\binom{k-1}{p}\sum_{i\geq 0}\binom{n-k}{p+1+i} + \binom{n-k}{p} \times \sum_{i\geq 0}\binom{k-1}{p+1+i}\right\} \qquad (2)$$

Ces deux probabilités sont nulles si $p > \min(k-1, n-k)$.

Les deux paragraphes qui suivent (2.2 et 2.3) ne nous seront pas indispensables mais figurent à titre de remarques.

2.2. Convergence en loi des variables aléatoires $C_k = C_{k,n}$

C_k représente le nombre de collisions auxquelles est soumis le $k^{ème}$ mobile avant sa chute lorsqu'il y a initialement *n* mobiles. C_k est donc une variable aléatoire qui dépend de *k*, mais aussi de *n*. Rétablissons ce *n* que nous avions omis pour ne pas alourdir les notations et notons désormais $C_k = C_{k,n}$. Nous allons montrer que $C_{k,n}$ converge en loi, quand *n* tend vers l'infini, vers une variable aléatoire $C_{k,\infty}$ dont la loi de probabilité a une expression simple. Il nous faut pour cela déterminer la limite quand *n* tend vers l'infini d'une expression telle que

$$\frac{1}{2^n}\left\{\binom{k-1}{p}\sum_{i\geq 0}\binom{n-k}{p+i} + \binom{n-k}{p} \times \sum_{i\geq 0}\binom{k-1}{p+i}\right\}.$$

Fixons *k*. Nous pouvons supposer $k-1 \leq n-k$, c'est-à-dire $k \leq (n+1)/2$, puisque cette inégalité sera nécessairement vérifiée pour *n* grand.

Pour tout *p* nous pouvons écrire $\binom{n-k}{p} = O\left(n^{k-1}\right)$ car $p \leq k-1$, et $\sum\limits_{i=p}^{k-1}\binom{k-1}{i}$ est indépendant de *i* donc $\binom{n-k}{p} \times \sum\limits_{i=p}^{k-1}\binom{k-1}{i} = O\left(n^{k-1}\right)$.

D'autre part $\binom{k-1}{p}$ est indépendant de *n* et $p-1 \leq k-2$ (puisque $p \leq k-1$) donc :

$$\sum_{i=p}^{n-k}\binom{n-k}{i} = 2^{n-k} - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{n-k}{i} = 2^{n-k} + O\left(n^{k-2}\right) = 2^{n-k} + O\left(n^{k-1}\right)$$

et donc :

$$P\left(C_{k,n}=2p\right)=\frac{1}{2^n}\left\{\binom{k-1}{p}2^{n-k}+O\left(n^{k-1}\right)\right\}=2^{-k}\binom{k-1}{p}+O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$$

De la même façon nous pouvons établir que

$$P\left(C_{k,n}=2p+1\right)=2^{-k}\binom{k-1}{p}+O\left(\frac{n^{k-2}}{2^n}\right)=2^{-k}\binom{k-1}{p}O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$$

d'où ce résultat :

> Les variables aléatoires $C_{k,n}$ convergent en loi vers la variable aléatoire $C_{k,\infty}$ dont la loi de probabilité est donnée par :
>
> $$P(C_{k,\infty}=2p)=P(C_{k,\infty}=2p+1)=2^{-k}\binom{k-1}{p} \text{ pour } 0\le p\le k-1$$

2.3. Interprétation de la loi limite

Pour interpréter les relations précédentes en terme de $C_{k,n}$, il faut que k soit petit devant n. On peut alors considérer que la probabilité pour que le $k^{ème}$ mobile tombe à droite est négligeable par rapport à la probabilité pour qu'il tombe à gauche, la deuxième série (les $n-k$ mobiles initialement sur sa droite) devenant en quelque sorte infranchissable. Remplaçons cette deuxième série par un mur :

$$k-1 \textit{ mobiles} \;\Big|\; \begin{matrix}\textit{le } k^{ème} \textit{ et}\\ \textit{dernier mobile}\end{matrix} \;\Big\|\; \textit{mur}$$

Nous inspirant de l'analyse précédente nous voyons que :

- Le $k^{ème}$ mobile tombera après $2p$ collisions si et seulement s'il est initialement un 0 et que p mobiles à sa gauche sont des 0, ce qui correspond à $\binom{k-1}{p}$ configurations initiales parmi les 2^k possibles.
- Le $k^{ème}$ mobile tombera après $2p+1$ collisions si et seulement s'il est initialement un 1 et que p mobiles à sa gauche sont des 0, ce qui correspond à $\binom{k-1}{p}$ configurations initiales également.

Dans ce cas de figure nous avons donc bien $P(C'_k=2p)=P(C'_k=2p+1)=2^{-k}\binom{k-1}{p}$, ainsi :

Considérer que $P(C_{k,n} = 2p) = P(C_{k,n} = 2p+1) \approx 2^{-k} \binom{k-1}{p}$ revient à considérer que la deuxième série est un mur infranchissable.

2.4. $E(C_k)$: premier résultat asymptotique

Les résultats précédents permettent d'établir une expression théorique de $E(C_k)$ qui est, rappelons-le, le nombre moyen de collisions du $k^{ème}$ mobile :

$$E(C_k) = \sum_{p \geq 0} \{(2p)P(C_k = 2p) + (2p+1)P(C_k = 2p+1)\}$$

Nous obtenons une expression bien peu engageante … Nous pouvons néanmoins, partant des relations et $P(C_{k,n} = 2p) = 2^{-k}\binom{k-1}{p} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$ et $P(C_{k,n} = 2p+1) = 2^{-k}\binom{k-1}{p} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$ précédemment établies pour k fixé, donner à $E(C_k)$ une expression bien plus satisfaisante pour l'intuition. Nous obtenons en effet en utilisant ces relations :

$$E(C_k) = 2^{-k}\sum_{p=0}^{k-1}(2p+2p+1)\binom{k-1}{p} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$$

$$E(C_k) = 2^{-k} \times 4\sum_{p=0}^{k-1} p\binom{k-1}{p} + 2^{-k}\sum_{p=0}^{k-1}\binom{k-1}{p} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$$

Or pour tout entier m : $\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i} = 2^m$ et $\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i} = m2^{m-1}$, d'où

$$E(C_k) = 2^{-k} \times 4(k-1)2^{k-2} + 2^{-k}2^{k-1} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)$$

et donc :

$$\boxed{E(C_k) = k - \tfrac{1}{2} + O\left(\frac{n^{k-1}}{2^n}\right)}$$

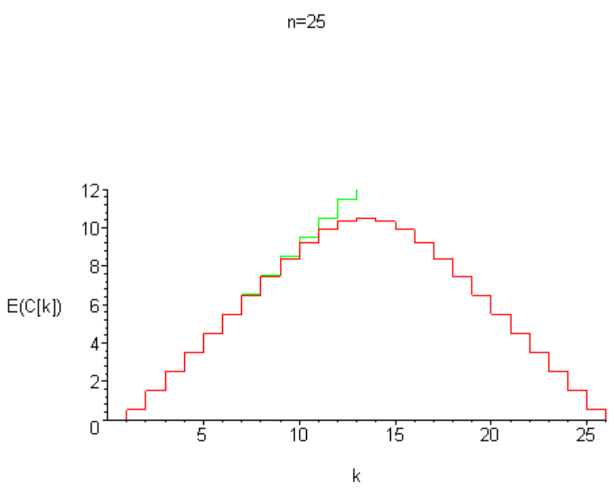
La fonction $k \mapsto E(C_k)$ est donc sensiblement linéaire pour les petites valeurs de k, et dans ce cas il y a approximativement 1 choc de plus en moyenne par rang.
Si nous avions distingué le cas où le $k^{ème}$ mobile est initialement un 0 du cas où il est initialement un 1, nous aurions obtenu de la même façon, toujours pour les petites valeurs de k :

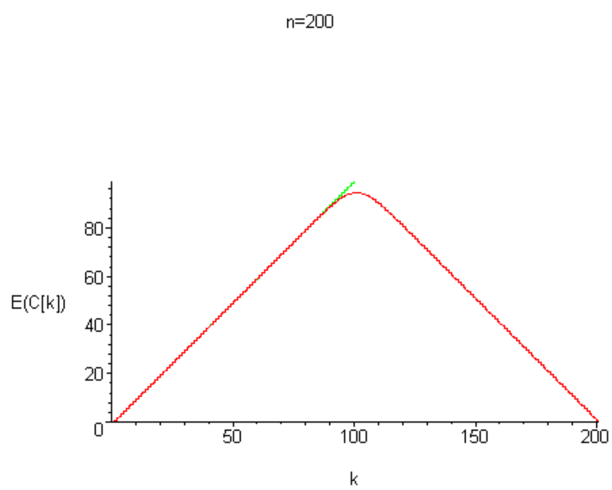
Si le $k^{ème}$ mobile est initialement un 0, il occasionne en moyenne approximativement $k-1$ collisions.
Si le $k^{ème}$ mobile est initialement un 1, il occasionne en moyenne approximativement k collisions.

Le $-\frac{1}{2}$ qui apparaît dans la formule ci-dessus s'explique donc en considérant que l'on fait une moyenne arithmétique des nombres k et $k-1$.

Remarquons néanmoins que le résultat asymptotique que nous avons obtenu n'est justifié que si k est fixé et n est grand. Il ne nous informe en rien sur la valeur de $E(C_k)$ si k est de l'ordre, par exemple, de $n/4$.

L'expression exacte de $k \mapsto E(C_k)$ étant bien peu manipulable, nous utilisons des représentations graphiques pour tenter d'appréhender le comportement de cette fonction. Nous donnons ci-dessous sur le même graphique les représentations des fonctions $x \mapsto E(C_{[x]})$ et $x \mapsto [x] - \frac{1}{2}$ pour $n = 25$ et $n = 200$.





Nous constatons graphiquement que l'approximation $E(C_k) \approx k - \frac{1}{2}$, justifiée pour les valeurs fixées de k, valeurs petites devant n, semble être valable −à une symétrie près− pour presque toutes les valeurs de k ; seules quelques valeurs centrales de k conduisant à des valeurs de $E(C_k)$ sensiblement différentes de $k - \frac{1}{2}$.

Ces observations vont être justifiées par les deux paragraphes qui suivent.

2.5. Une expression plus simple pour $E(C_k)$

Nous utiliserons dans notre calcul la relation suivante, dite de Chu-Vandermonde. Cette relation a été établie pour la première fois, semble-t-il, par le mathématicien chinois Chu Chi-kie avant 1303. (Il n'y a pas de faute de frappe, ceci nous ramène bien au tout début du XIV^e siècle).

Nous adoptons dans ce qui suit la double convention suivante :

$$\sum_{i=j}^{k} x_i = 0 \text{ si } k < j \text{ et } \binom{n}{i} = 0 \text{ si } i < 0 \text{ ou } n < 0 \text{ ou } i > n.$$

Relation de Chu-Vandermonde (i , p, m et m' sont des entiers) :

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p}\binom{m'}{p+i} = \binom{m+m'}{m+i} \qquad (A.1)$$

Cette relation sera démontrée en annexe.

On a par définition

$$E(C_k) = \sum_{p\geq 0} \left\{(2p)P(C_k = 2p) + (2p+1)P(C_k = 2p+1)\right\}$$

En utilisant les relations (1) et (2) et en procédant à quelques petites réorganisations on peut écrire :

$$E(C_k) = S(k) + S(n-k+1)$$

avec $$S(k) = \frac{1}{2^n}\left\{2\sum_{p\geq 1}\sum_{i\geq 0} p\binom{n-k}{p} + \left\{\binom{k-1}{p+i} + \binom{k-1}{p+1+i}\right\} + \sum_{p\geq 0}\sum_{i\geq 0}\binom{n-k}{p}\binom{k-1}{p+1+i}\right\}$$

or $\binom{k-1}{p+i} + \binom{k-1}{p+1+i} = \binom{k}{p+1+i}$ et $p = (n-k)\binom{n-k-1}{p-1}$, d'où en posant $r = p-1$:

$$S(k) = \frac{1}{2^n}\left\{2(n-k)\sum_{i\geq 0}\sum_{r\geq 0}\binom{n-k-1}{r}\binom{k}{r+2+i} + \sum_{i\geq 0}\sum_{p\geq 0}\binom{n-k}{p}\binom{k-1}{p+1+i}\right\}$$

En utilisant la relation de Chu-Vandermonde $(A.1)$ on obtient donc :

$$S(k) = \frac{1}{2^n}\left\{2(n-k)\sum_{i\geq 0}\binom{n-1}{n-k+1+i} + \sum_{i\geq 0}\binom{n-1}{n-k+1+i}\right\}$$

puis en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux :

$$S(k) = \frac{1}{2^n}\left\{(2n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n-1}{i}\right\}$$

On en déduit :

$$E(C_k) = S(k) + S(n-k+1) = \frac{1}{2^n}\left\{(2n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n-1}{i} + (2k-1)\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{n-1}{i}\right\} \qquad (3)$$

L'identité de Vandermonde nous a ainsi permis de nous débarrasser des peu manipulables sommes doubles. En utilisant la relation $\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1} - \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-1}{i}$ dans (3) nous obtenons après quelques réarrangements :

$$E(C_k) = k - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\left\{2(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-2} -(2k-1)\binom{n-1}{k-1}\right\} \quad (4)$$

Nous pouvons encore tirer parti des propriétés des coefficients binomiaux pour rendre cette formule un peu plus présentable :

Si nous posons $B(n,k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$ nous avons la relation :

$$2B(n-1,k-1) = B(n,k) - \binom{n-1}{i} \quad (5)$$

En effet :

$$\begin{aligned}
2B(n-1,k-1) &= 2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{k} + \sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\left\{\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right\} - \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} - \binom{n-1}{k} \\
&= B(n,k) - \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

Cette relation nous permet de modifier un peu le terme entre crochets de (4) :

$$\begin{aligned}
2(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n-1}{i} - (2k-1)\binom{n-1}{k-1} &= (n-2k+1)\times 2B(n-1,k-2) - (2k-1)\binom{n-1}{k-1} \\
&= (n-2k+1)\left\{B(n,k-1) - \binom{n-1}{k-1}\right\} - (2k-1)\binom{n-1}{k-1} \\
&= (n-2k+1)B(n,k-1) - n\binom{n-1}{k-1} \\
&= (n-2k+1)B(n,k-1) - k\binom{n}{k} \text{ car } n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

On en déduit une autre expression pour $E(C_k)$:

$$\boxed{E(C_k) = k - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\left\{(n-2k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i} - k\binom{n}{k}\right\} \quad (6)}$$

Nous avons mis en évidence le terme $k - \frac{1}{2}$ *apparu en* 2.4. *Ceci va nous permettre* $-$*dans la seconde partie de cet article qui paraîtra dans le prochain numéro*$-$ *d'évaluer l'erreur commise dans l'approximation* $E(C_k) \approx k - \frac{1}{2}$. *Il nous faudra pour cela recourir à l'analyse afin de majorer et même de donner un équivalent de cette erreur. Nous serons ainsi en mesure de justifier ce que les graphiques précédents laissent déjà deviner : l'approximation est excellente sauf pour quelques valeurs centrales. Nous aborderons enfin le troisième de nos problèmes :*

Quelle est la distance moyenne parcourue par la $k^{ème}$ *fourmi avant sa chute ?*

De façon surprenante, ce troisième problème va s'avérer plus simple que le précédent.

Annexe

$(A.1)$	Relation de Chu-Vandermonde (i, p, m et m' sont des entiers) : $$\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m'}{p+i}=\binom{m+m'}{m+i}$$

Preuve :

Cette relation est une variante de la relation plus classique, appelée formule de convolution de Vandermonde :

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m'}{i-p}=\binom{m+m'}{i}$$

Cette dernière relation s'obtient en dénombrant les parties de i éléments dans un ensemble E de $m+m'$ éléments. Si E est partitionné en deux sous-ensembles (A de m éléments et B de m' éléments), les parties de E possédant i éléments peuvent avoir 0, ou 1, …, ou i éléments dans A, ce qui établit la relation précédente (rappelons les conventions utilisées ici : $\binom{n}{i}=0$ si $i<0$ ou $n<0$ ou $i>n$).

Pour établir la relation souhaitée nous remarquons que :

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m'}{m'+p-i}=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m'}{i-p}==\binom{m+m'}{i}$$

La première égalité résulte de la symétrie des coefficients binomiaux et la seconde de la formule de convolution de Vandermonde. D'où en posant $r=m'-i$:

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m'}{r+p}=\binom{m+m'}{i}=\binom{m+m'}{m+m'+i}=\binom{m+m'}{m+r}$$

La propriété $(A.1)$ est ainsi démontrée.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Pascale AMP
Jean-Claude ANDRIEUX
Patrick GABRIEL
Sylvie LANNAUD
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
0411 B 07793

DEPOT LEGAL :
n° 178 – 1er semestre 2007

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem