N° 104 – Juin 2007

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Les questionnaires à choix multiples
- ✓ Les carrés anti-magiques
- ✓ Une séance sur la numération et les courbes en section européenne

	60	15	13	14	44	55	49	1	**251**
	58	4	51	50	20	9	63	11	**266**
	17	47	29	30	27	39	52	12	**253**
	18	46	38	36	31	26	23	41	**259**
	21	43	37	32	28	33	7	57	**258**
	22	42	25	34	40	35	5	59	**262**
	53	61	54	45	16	8	2	24	**263**
	3	6	10	19	48	56	64	62	**268**
255	**252**	**264**	**257**	**260**	**254**	**261**	**265**	**267**	**256**

Un carré pas tout à fait magique

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

- ✓ Bloc-notes 1
- ✓ Jeux et Problèmes 11

Articles

- ✓ Les questionnaires à choix multiples 15
  Sylvie LANAUD
- ✓ Les carrés anti-magiques 25
  Michel LAFOND
- ✓ Une séance sur la numération et les courbes en section européenne 37
  David MAGNIEN

Editorial

Prenez une feuille, c'est l'interro !

Exactement, vous, là-bas, oui, vous tous. Vous croyez que les vacances sont là et que vous allez vous la couler douce parce que le mois de juillet arrive ? Que nenni, messeigneurs et gentes dames, tout au contraire…

Et d'abord : à la Japonaise ! Je n'ai pas résisté au plaisir de l'ambiguïté, espérant que ces messieurs y ont cru. Si c'est le cas, honte à vous d'avoir pensé au farniente sur l'île de Tokaido entouré par de belles geishas : il s'agissait bien sûr du QCM à la japonaise qu'évoque Sylvie Lanaud dans son article sur les questionnaires à choix multiples. L'un des arguments avancés par l'auteur en faveur de ce que d'aucuns qualifient à tort de gadget, est qu'il y a la possibilité pour les élèves en délicatesse avec la langue française de se concentrer sur le contenu mathématique plutôt que sur l'expression correcte des résultats. Si vous avez des élèves dans ce cas (ce dont je ne doute pas) vous serez sans doute sensible à cet argument, ainsi qu'à la possibilité pour eux de développer des stratégies (par exemple : éliminer les réponses fausses, deviner la bonne réponse en estimant les ordres de grandeur, etc.) Et finalement, comme Sylvie ne donne pas les résultats des QCM, vous pourrez rêver aux geishas (désolé mesdames) en répondant aux questionnaires !

Et qu'on ne me rétorque pas que la Feuille de Vigne reste japonaise en proposant des Sudoku comme jeux de plage ; tout d'abord, le Sudoku a largement dépassé ses frontières d'origine et fait tourner plus d'une tête non nippone, ensuite essayez donc le casse-tête de Michel Lafond et on en reparlera plus tard. Pour les plus coriaces, il y a un second problème, hé, hé… Mais Michel sait aussi nous ravir sans nous faire souffrir (j'en prendrai pour preuve les fables géométrico-animalières du dernier numéro) et c'est encore le cas ici ; si vous voulez des destinations inconnues, de l'aventure, explorez (je cite) « la géographie du terrain d'un carré anti-magique » ; attention cependant, il y a quelques dangers en banlieue, en particulier la grande couronne (et en plus, c'est plein de maths). Nous verrons dans les numéros suivants si Michel s'en est sorti indemne (car il promet la suite de l'aventure), et s'il saura maintenir jusqu'au bout son refus de l'obscurantisme.

Si les destinations exotiques vous intéressent encore et que vous n'avez pas les moyens de partir, visitez avec David Magnien Moscou, Bangkok et Buenos-Aires. Certes, il y fait atrocement froid ou horriblement chaud, mais vous verrez que l'Argentine n'est pas si désagréable au mois de mars ; et le plus formidable avec l'agence de voyage IREM, c'est qu'on parle l'anglais partout ! Du moins dans le texte de David ; n'est-ce pas le cas dans la réalité ? Et puis, sans blague, même si vous restez à la plage cet été, essayez donc de répondre en anglais au questionnaire (dictionnaire autorisé).

Vous verrez, si vous vous attelez à toutes ces tâches, l'été sera vite passé, après avoir virtuellement visité le Japon, Moscou, la banlieue, … Et à septembre pour de nouvelles destinations !

François Dussinge

SOLUTIONS DU RALLYE MATHEMATIQUE DE BOURGOGNE 2007

1 – AFFICHAGE DIGITAL

99% des équipes abordent ce problème, qui a bien inspiré tout le monde. La réussite est bien faible cependant puisque 7 équipes sur 71 seulement trouvent la bonne réponse : 644.

Solution

Raisonnons en fonction des deux premiers chiffres de l'affichage, lorsqu'ils sont distincts. Les nombres de possibilités sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

Deux premiers chiffres	Nombre de possibilités	Deux premiers chiffres	Nombre de possibilités
01	$4\times 7=28$	13	$4\times 7=28$
02	$4\times 7=28$	14	$4\times 7=28$
03	$4\times 7=28$	15	$4\times 7=28$
04	$4\times 7=28$	16	$5\times 7=35$
05	$4\times 7=28$	17	$5\times 7=35$
06	$5\times 7=35$	18	$5\times 7=35$
07	$5\times 7=35$	19	$5\times 7=35$
08	$5\times 7=35$	20	$4\times 7=28$
09	$5\times 7=35$	21	$4\times 7=28$
10	$4\times 7=28$	23	$4\times 7=28$
12	$4\times 7=28$		

Ainsi, par exemple :

- si les deux premiers chiffres sont 01, le chiffre suivant peut être 2, 3, 4 ou 5 puisqu'on ne peut avoir un affichage des minutes supérieur ou égal à 60 et, dans chaque cas il reste 7 possibilités pour le chiffre de droite en évitant les répétitions, puisque trois chiffres sont déjà utilisés ;
- si les deux premiers chiffres sont 06, le chiffre suivant peut être 1, 2, 3, 4 ou 5, et dans chaque cas, il reste encore 7 possibilités pour le dernier.

Les autres cas s'étudient de la même manière.

Cela donne un total de $28\times 13+35\times 8$, soit **644 possibilités.**

2 – LE CALENDRIER

90% des équipes fouillent dans ce calendrier avec une réussite assez modeste : 61% seulement. La plupart du temps, les réponses justes sont cependant bien argumentées.

Solution

Si l'on considère le rang d'un jour de l'année (compté de 1 à 365 pour une année normale, de 1 à 366 pour une année bissextile), **à chaque jour de la semaine est associé un reste différent de ce rang dans la division par 7**. C'est la remarque fondamentale.

Récapitulons les renseignements de l'énoncé dans le tableau suivant.

Jour	Année normale		Année bissextile	
	Rang du jour	Reste dans la division par 7	Rang du jour	Reste dans la division par 7
5 janvier	5	5	5	5
11 février	42	0	42	0
24 avril	114	2	115	3
30 juillet	211	1	212	2
3 octobre	276	3	277	4
23 décembre	357	0	358	1
1er avril	91		92	

Les 6 dates de l'énoncé correspondent à 6 jours différents de la semaine, donc à 6 restes différents dans la division par 7. Cela élimine la possibilité d'une année normale (le 0 étant présent deux fois). Dons **l'année est bissextile**.

D'autre part, aucun des 6 jours n'est un dimanche, et les 6 restes sont, dans le désordre, 0, 1, 2, 3, 4, 5. On en déduit que le dimanche correspond au reste 6 (qui est le seul reste absent), donc le lundi correspond au reste 0, le mardi au reste 1, etc.

Comme le 1er avril est le 92ème jour d'une année bissextile, il correspond au reste 1.

Conclusion : **le 1er avril est un mardi.**

3 – EN FAMILLE

Cette famille (pas si nombreuse) n'a pas beaucoup inspiré les participants : 38 équipes seulement abordent le problème. Sur les 10 d'entre elles qui trouvent la bonne réponse, les arguments ne sont pas toujours convaincants, puisque l'on se contente souvent d'admettre qu'il y a 3 enfants sans preuve véritable.

Solution

Notons n le nombre d'enfants, s la somme des âges des enfants, p la somme des âges des parents.

Ainsi la moyenne des âges des parents est $\frac{p}{2}$, celle des âges des enfants est $\frac{s}{n}$, celle de tous les membres de la famille est $\frac{s+p}{n+2}$.

Les données de l'énoncé conduisent au système :

$$\begin{cases} \frac{s+p}{n+2} = 14 \\ \frac{p}{2} = 13{,}5\frac{s}{n} \end{cases} \qquad (n,\ s \text{ et } p \text{ entiers naturels non nuls}).$$

Cela équivaut à $\begin{cases} p = \frac{27s}{n} \\ s = 14(n+2) - \frac{27s}{n} \end{cases}$, soit, après simplification : $\begin{cases} p = \frac{27s}{n} \\ s = \frac{14n(n+2)}{n+27} \end{cases}$.

D'autre part, les âges étant non nuls et tous différents :

- l'âge du plus jeune est supérieur ou égal à 1 ;
- l'âge du suivant est supérieur ou égal à 2 ;
- … ;
- l'âge de l'aîné est supérieur ou égal à *n*.

Il en résulte une inégalité sur la somme des âges des enfants : $s \geq 1+2+\ldots+n$.
La somme $a = 1+2+\ldots+(n-1)+n$ se calcule ainsi :

$2a = (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n-1+2)+(n+1) = (n+1)\times n$, donc $a = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit : $s \geq \frac{n(n+1)}{2}$, soit $\frac{14n(n+2)}{n+27} \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Simplifions par *n*, et chassons les dénominateurs ; on en déduit : $28(n+2) \geq (n+1)(n+27)$, soit encore : $n^2 \leq 29$. On en tire finalement : $\boxed{n \leq 5}$: il n'y a pas plus de 5 enfants.

Un balayage permet de conclure :

n	1	2	3	4	5
$s = \frac{14n(n+2)}{n+27}$	1,5	3,86…	7	10,83…	15,3125

Comme *s* doit être entier, la seule possibilité est : $\boxed{n = 3 \text{ et } s = 7}$.

Ainsi, il y a 3 enfants, et la somme de leurs âges est égale à 7.

Les trois âges étant non nuls et distincts, la seule possibilité est 1, 2, et 4.

Conclusion : il y a 3 enfants dont les âges respectifs sont : **1, 2 et 4 ans.**

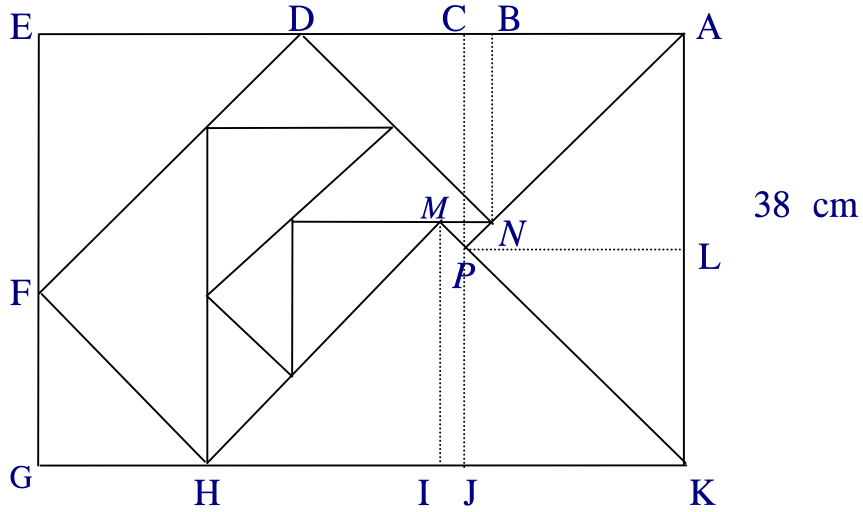
4 – TRIANGLES - RECTANGLE

Rappelons que tous les candidats devaient traiter les exercices 4, 5 et 6.

93 équipes abordent cet exercice. 57 équipes trouvent la bonne longueur, mais assez peu font une démonstration. Trop d'équipes se contentent de mesurer la longueur à partir de la figure supposée être à l'échelle, et de faire la proportion !

Solution

Il y a des tas de pistes, avec plus ou moins de calculs. Certains n'ont pas hésité à utiliser la trigonométrie, et quelques uns se sont perdus corps et biens dans le dédale des triangles (des Bermudes ?). Peu ont réussi à éviter l'usage des radicaux.



Effectivement, les longueurs de tous les segments de la figure ci-dessus peuvent être calculées, et certains ont trouvé par exemple que $ED = 23$ et $FG = 15$.

Mais ce n'est pas nécessaire si on utilise à fond la symétrie du triangle rectangle isocèle.

Ainsi, si on pose MN $= 2x$, alors puisque AK$=$ 38 par hypothèse, on a successivement :

$JK = PL = CA = KL = LA = 19.$

$HI = KI = KJ + JI = 19 + x.$

$DB = AB = AC - CB = 19 - x.$

$ED + GH = EF + FG = EG = 38.$

Donc, le double de la longueur mesure :

$$\begin{aligned} EA+GK &= ED+DB+BA+GH+HI+KI \\ &= (ED+GH)+(DB+BA)+(HI+KI) \\ &= 38+2\times(19-x)+2\times(19+x) = 114 \end{aligned}$$

et la longueur mesure la moitié de 114, soit **57 cm**.

5 – LE TOIT

119 équipes abordent cet exercice. 33 équipes seulement trouvent l'aire, avec la bonne conversion en mètres carrés, et l'arrondi demandé.

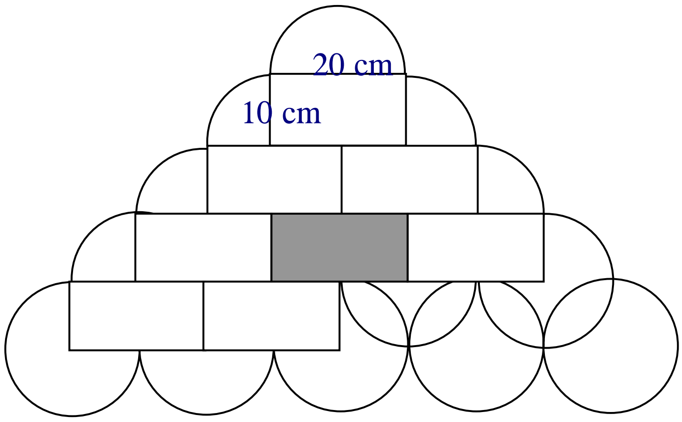
Solution

Bien sûr, il faut d'abord chercher combien le toit possède de rangées de tuiles.
On trouve facilement que 1 + 2 + 3 + … + 36 = 666.

Voir dans le corrigé de l'exercice 3 la démonstration de :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il y a donc 36 rangées de tuiles.
Ensuite il faut se préoccuper des recouvrements.
Des tas de découpages sont possibles, le plus simple étant celui-ci :

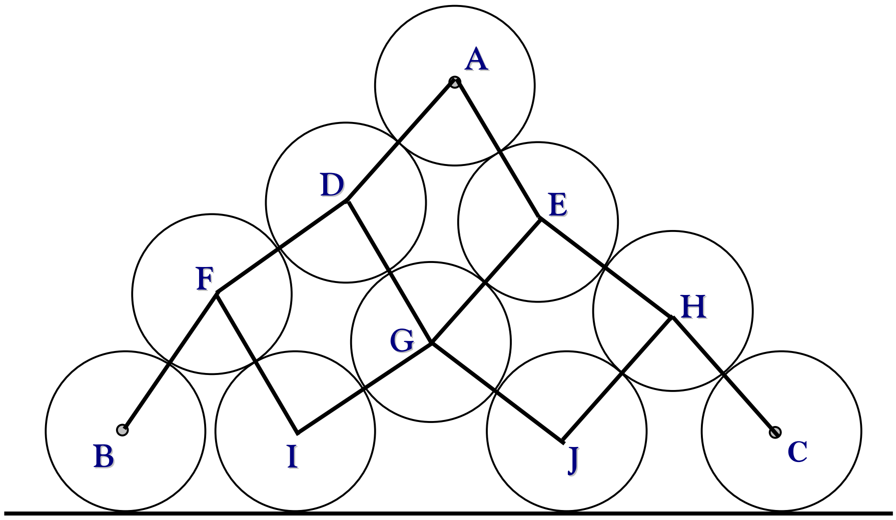


Considérons des rectangles de 10 cm sur 20 cm comme celui en grisé ci-dessus.
En les disposant comme sur la figure, on recouvrira une bonne partie du toit, précisément :
$(1 + 2 + 3 + \ldots + 35) \times (10 \times 20) = (666 - 36) \times 200 = 126000$ cm^2.
Restent les bords, soit $2 \times 36 = 72$ quarts de tuile aux bords (gauche et droit) et les 36 demi tuiles du bas, ce qui fait 36 tuiles entières d'aire $\pi \times 10^2$ cm^2.
L'aire du toit est donc égale à $126000 + 3600\pi = 137309{,}73\ldots$ cm^2.
Un mètre carré c'est (100 cm)^2 soit 10000 cm^2.
L'aire du toit est donc égale à 13,730973… cm^2 soit **près de 14 m^2**.

6 – CAVE A VIN

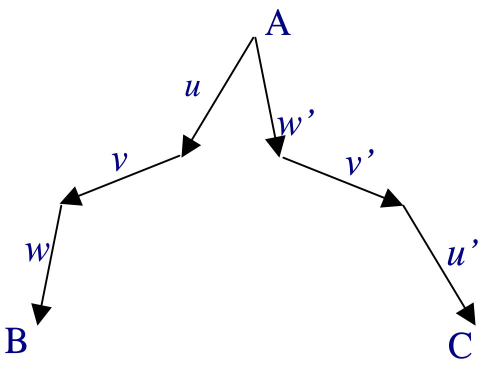
69 équipes abordent cet exercice. Mais, surprise ! Aucune ne démontre que le triangle ABC est isocèle ! La plupart se contentent de dire que puisque ça marche avec trois bouteilles (une au-dessus de deux autres), ça doit marcher avec dix bouteilles…
Certaines équipes font appel à la notion de force, ou d'équilibre en physique pour affirmer que la stabilité de l'échafaudage garantit l'égalité AB = AC…
Très peu d'équipes remarquent la présence de nombreux parallélogrammes ce qui était la clé de la démonstration.

Solution



Les 12 segments de la figure ci-dessus sont égaux à deux fois le rayon d'une bouteille. On a donc trois losanges : *ADGE*, *DFIG* et *EGJH*.
Les losanges sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HJ} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{w}'$.
De même $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{v}'$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GI} = \vec{v}$.
Par ailleurs, les triangles *FBI*, *GIJ* et *HJC* sont isocèles (symétrie).
Les segments [*FB*] et [*FI*] sont donc symétriques par rapport à la verticale passant par *F*.
De même, [*GI*] et [*GJ*] sont symétriques par rapport à la verticale passant par *G*, et [*HJ*], [*HC*] sont symétriques par rapport à la verticale passant par *H*.
Donc le vecteur $\overrightarrow{FB} = \vec{w}$ est le symétrique du vecteur $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{w}'$.
De même le vecteur $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{u}'$ est le symétrique du vecteur $\overrightarrow{HJ} = \vec{u}$.

On a donc la figure :



dans laquelle les couples de vecteurs $(\vec{u}, \overrightarrow{u}')$, $(\vec{v}, \overrightarrow{v}')$ et $(\vec{w}, \overrightarrow{w}')$ sont symétriques par rapport à la verticale, et où $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}' + \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u}' = \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{w}'$.
C'est la symétrie des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui entraîne l'égalité des longueurs : *AB* = *AC*.
On aurait le même résultat avec un empilement de 1 + 2 + 3 + …+ n bouteilles.

7 – DITES 34
50 équipes abordent cet exercice et 29 équipes en viennent à bout. Certaines démonstrations sont parfaites, d'autres sont plus ou moins complètes.

Solution

Combien de nombres consécutifs doit-on multiplier pour obtenir N = 34********34 ?

Ce n'est pas précisé, on sait qu'il y en a plusieurs.

C'est moins de 5, car parmi 5 entiers consécutifs, il y a nécessairement un multiple de 5 et deux nombres pairs, le produit se terminerait alors par 0.

Le nombre de facteurs est compris entre 2 et 4.

Deux facteurs, ce n'est pas possible, car le produit de deux entiers consécutifs se termine toujours par 0, 2 ou 6. (Examiner les 10 cas possibles : 0×1, 1×2, 2×3, … 9×0).

Quatre facteurs, ce n'est pas possible, car le produit de quatre entiers consécutifs est toujours un multiple de 4 (et même de 8) or d'après le critère de divisibilité par 4, N n'est pas multiple de 4.

N est donc le produit d'exactement 3 entiers consécutifs. Lesquels ?

$N = m(m+1)(m+2)$ est plus grand que m^3 et plus petit que $(m+2)^3$.

De plus, N est compris entre 340000000034 et 349999999934.

Donc on a les inégalités $m^3 < N \leq 349999999934$ et $340000000034 \leq N < (m+2)^3$.

D'où l'encadrement $6978 \leq m \leq 7047$.

Par ailleurs, m doit de terminer par 2 ou par 7 (en effet ***2 × ***3 × ***4 se termine bien par 4, ainsi que ***7 × ***8 × ***9, les autres cas donnant la terminaison 0 ou 6).

Cela ne laisse que 14 possibilités : de $6982 \times 6983 \times 6984$ ou $6987 \times 6988 \times 6989$ Jusqu'à $7042 \times 7043 \times 7044$ ou $7047 \times 7048 \times 7049$.

Une seule convient à cause de la terminaison 34, et c'est :

$$\mathbf{7037 \times 7038 \times 7039 = \underline{34}86163718\underline{34}}.$$

8 – SOMME TOUTE

48 équipes abordent ce problème, apparemment diabolique, mais dont la résolution ne mobilisait que des connaissances de … Quatrième (majoration et critère de divisibilité par 9) !

Il y a quelques bonnes solutions pourtant parmi les 32 équipes qui trouvent la bonne réponse : 9.

Solution

Notons respectivement a la somme des chiffres de 2007^{2007}, b la somme des chiffres de a, et c la somme des chiffres de b. Il s'agit de déterminer ce nombre c.

Remarquons tout d'abord que la somme des chiffres d'un entier naturel non nul est elle-même non nulle ; c'est évident car cette somme d'entiers positifs ne peut être nulle que si tous les entiers sont nuls.

D'autre part, 2007 étant multiple de 9, il en résulte que 2007^{2007} l'est aussi ; il en résulte que a est multiple de 9, ainsi que b et c, d'après le classique critère de divisibilité par 9.
Ainsi, le nombre cherché c est un multiple de 9 strictement positif.

Nous allons procéder par des majorations, en observant que si un entier s'écrit en base dix à l'aide de n chiffres, comme chaque chiffre est inférieur ou égal à 9, la somme de ses chiffres est inférieure ou égale à $9n$.

- Comme $2007 < 10000 = 10^4$, il en résulte que $2007^{2007} < (10^4)^{2007} = 10^{8028}$; on en déduit que le nombre de chiffres de 2007^{2007} est inférieur ou égal à 8028, donc $a \leq 9 \times 8028$, soit $\boxed{a \leq 72252}$.
- D'après ce qui précède, a s'écrit avec au plus 5 chiffres, donc $b \leq 9 \times 5$, soit $\boxed{b \leq 45}$.
- c est la somme des chiffres de b, qui n'excède pas 45 ; parmi tous les entiers compris entre 1 et 45, la somme des chiffres maximale est obtenue pour le nombre 39, et cette somme vaut 12.
  Donc $\boldsymbol{c \leq 12}$.

Ainsi, c est un multiple de 9 non nul qui ne dépasse pas 12 ; la seule possibilité est $c = 9$.

Conclusion : la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 2007^{2007} est égale à **9**.

9 – UN DRÔLE DE PATRON

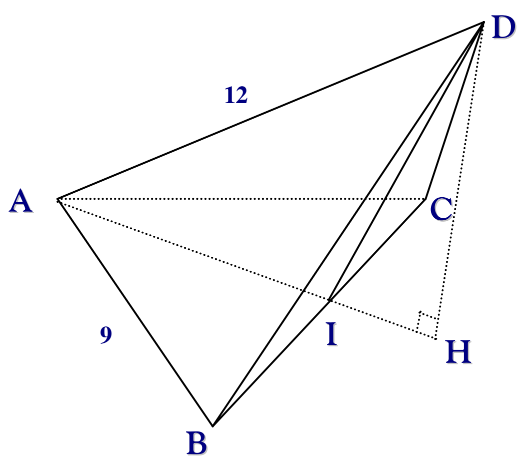
Cet exercice a relativement bien inspiré les candidats, puisque 62 équipes sur 84 l'abordent. Cependant, le volume correct n'est trouvé et justifié que par 10 d'entre elles.

Solution

Sur le tétraèdre reconstitué, on a d'après le théorème des milieux appliqué au triangle du patron (en cm) :

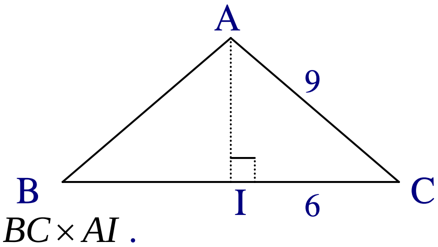
$AB = AC = BD = CD = 9$;

$BC = AD = 12$.



Le volume d'une pyramide est calculé par la formule : $\frac{1}{3}\times\text{Base}\times\text{Hauteur}$.

Considérons comme base le triangle *ABC*, notons *I* le milieu de [*BC*], *H* le projeté orthogonal de *D* sur le plan (*ABC*). La hauteur correspondante de la pyramide est alors *DH*.



- Calcul de l'aire de la base *ABC*

Le triangle *ABC* est isocèle en *A*, donc son aire est $\frac{1}{2}BC\times AI$.

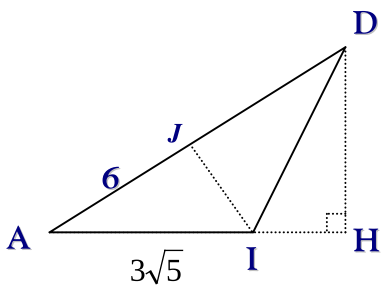
On calcule *AI* par le théorème de Pythagore : $AI=\sqrt{AC^2-IC^2}$, soit $AI=\sqrt{9^2-6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Ainsi : aire $(ABC)=\frac{1}{2}\times12\times3\sqrt{5}$, soit : $\boxed{\text{aire }(ABC)=18\sqrt{5}}$.

- Calcul de la hauteur *DH*

Les égalités $AB=AC$, $DB=DC$, $IB=IC$ montrent que les points *A*, *D*, *I* sont équidistants de *B* et *C* donc sont situés dans le plan médiateur de ce segment. Ainsi le plan médiateur du segment [*BC*] est le plan (*ADI*).

La droite (*DH*) qui est orthogonale au plan (*ABC*) est en particulier orthogonale à la droite (*BC*) contenue dans ce plan. Il en résulte que la droite (*DH*) est contenue dans le plan orthogonal à (*BC*) qui passe par *D*, à savoir le plan médiateur (*ADI*). Cela montre que les quatre points *A*, *D*, *I*, *H* sont coplanaires.



Raisonnons dans le plan qu'ils forment (voir figure ci-dessus). On a $AD=12$, $AI=3\sqrt{5}$ et $DI=3\sqrt{5}$ (par un calcul analogue à celui de AI dans le triangle *DBC*.

Nous pouvons calculer *DH* en appliquant deux fois le théorème de Pythagore, mais il est plus rusé d'écrire de deux manières l'aire du triangle isocèle *AID*, en faisant intervenir le milieu *J* de [*AD*] :

$IJ=\sqrt{AI^2-AJ^2}=\sqrt{45-36}=3$, et aire $(ADI)=\frac{1}{2}AD\times IJ=\frac{1}{2}AI\times DH$, d'où $AD\times IJ=AI\times DH$. On en tire : $DH=\frac{AD\times IJ}{AI}=\frac{12\times3}{3\sqrt{5}}$, soit $DH=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

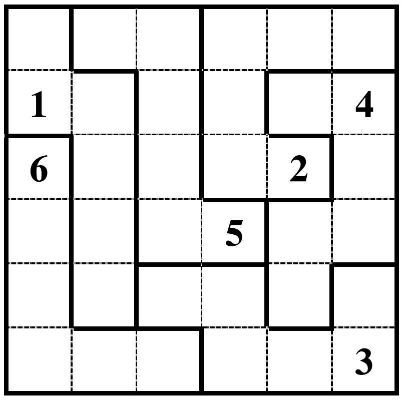
- Calcul du volume *V* de la pyramide

$V=\frac{1}{3}\times$ aire $(ABC)\times DH=\frac{1}{3}\times18\sqrt{5}\times\frac{12}{\sqrt{5}}$, soit $\boxed{V=72}$.

La pyramide a pour volume **72 cm^3**.

Jeux et Problèmes

JEU - 54.



Résoudre la variante de SUDOKU ci-contre :

Dans chaque ligne, chaque colonne et chaque DOMAINE on doit voir {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

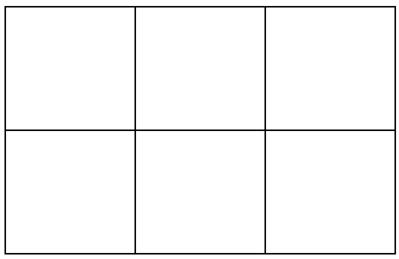
On rappelle que dans un bon sudoku, la solution est unique.

PROBLÈME - 54.

Démontrer que dans] 0 ; + ∞ [si on a $a^b = b^c = c^a$ alors $a = b = c$.

Solutions

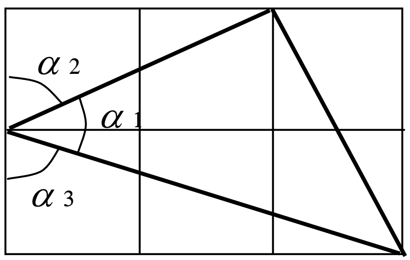
JEU - 53



En traçant sur la grille ci-contre trois segments, démontrer sans le moindre calcul la belle formule :

$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \pi$$

Sur la figure ci-contre on a :



$\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$ (à cause du triangle rectangle isocèle)
donc tan (α_1) = 1 ou $\tan^{-1}$ (1) = α_1 ;
par ailleurs, tan (α_2) = 2 ou $\tan^{-1}$ (2) = α_2
et tan (α_3) = 3 ou $\tan^{-1}$ (3) = α_3

Comme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ on a bien : $\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \pi$ CQFD.

PROBLÈME - 53

Démontrer simplement dans R$^+$ l'implication : $x^3+\frac{1}{x^3}=18 \quad \Rightarrow \quad x^5+\frac{1}{x^5}=123$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18 \quad \Rightarrow \quad x^5+\frac{1}{x^5}=123$$

On a : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$ donc $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=18$ (1)

Posons $X = x+\frac{1}{x}$ (1) s'écrit alors X^3 - 3 X -18 = 0 (E)

Ou encore $(X-3)(X^2+3X+6)=0$ qui n'a dans R que la solution $X = 3$.

Or $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$ entraîne :

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-5x^3-10x-\frac{10}{x}-\frac{5}{x^3}=X^5-5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-10X$$

donc puisque $X = 3$: $x^5+\frac{1}{x^5}=3^5-5\times 18-10\times 3 = 123$. CQFD.

<u>Remarque</u> : Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le résultat précédent ne marche pas car (E) a deux solutions complexes : $X=\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$ pour lesquelles on vérifie que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=X^5=\frac{-123\mp i\sqrt{15}}{2}$.

Voici à propos de ce problème, deux solutions de Daniel REISZ

Si on veut que x et $\frac{1}{x}$ soient solutions de l'équation du second degré $x^2-Sx+P=0$, il faut que $S = x+\frac{1}{x}$ et $P=1$.

Donc : $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=S^3-3S=18$.

Or $S^3-3S-18=(S-3)(S^2+3S+6)=0$ implique <u>$S = 3$</u> (seule solution réelle).

Première solution (la plus élégante) :

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)=S^5-5\times 18-10S=243-90-30=123$$

Deuxième solution (moins élégante, mais à peine plus longue) : $x^2-3x+1=0$

a pour racines $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Alors : $x^2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ $x^4=\frac{47+21\sqrt{5}}{2}$ $x^5=\frac{123+55\sqrt{5}}{2}$

et de même : $1\frac{1}{x^5}=\frac{123-55\sqrt{5}}{2}$

D'où $x^5+\frac{1}{x^5}=\frac{246}{2}=123$.

Robert Ferachoglou a envoyé une solution au problème 53, non mentionnée car identique aux autres.

Les questionnaires à choix multiples

Sylvie LANAUD, collège Bachelard à Dijon

Depuis quelques années, on entend parler de Questionnaires à Choix Multiples (QCM) en mathématiques. Notre formation ne nous a pas habitués ni préparés à leur utilisation. C'est sans doute pourquoi nous hésitons à les pratiquer.
L'an dernier, dans mon établissement, avec un collègue, nous avons commencé à les intégrer à notre enseignement sous différentes formes. Après un premier bilan, plutôt positif, je vais essayer de vous fournir quelques pistes qui permettront, je l'espère, à certains, de se lancer.

QCM, QU'EST-CE EXACTEMENT ?

Sous le même nom se cachent différentes formes de questionnaires à choix multiples. Elles ont toutes leurs avantages et leurs inconvénients selon le niveau auquel on s'adresse et selon ce que l'on veut en faire.
Voici un classement rangé dans un ordre décroissant d'exigence de ces différents QCM.

- QCM à la Japonaise
- QCM avec justifications (dans l'esprit de ce qui pourra être demandé au baccalauréat)
- QRM : QCM à réponses multiples
- QRU : QCM à réponse unique
- QCM : vrai – faux – omission

Que de sigles et de qualificatifs ! Attendez, vous allez voir, ce n'est pas si compliqué.
Personnellement, je n'utilise pas les deux premiers au collège mais ils peuvent être pertinents au lycée. Ainsi, je vais les présenter brièvement et ne pas en tirer de conclusion ou de conseils.

1. QCM À LA JAPONAISE

Pour répondre, l'élève doit faire l'exercice avec calculs et raisonnements, seule la rédaction lui est épargnée. Le principal intérêt de ce type de QCM réside dans le fait que l'élève qui a des difficultés d'expression peut répondre et ne se retrouve pas

pénalisé comme il peut l’être avec un énoncé classique. Ce genre d’exercice peut s’avérer judicieux dans un devoir en temps limité.
L'exemple qui suit provient du bulletin vert n° 462 de l'APMEP. La formulation a été quelque peu adaptée : il a été donné en 1990 au concours national d'entrée dans les universités publiques nippones.

Dans cet énoncé, les lettres majuscules maigres A, B, C ... jusqu'à T désignent l'un des symboles suivants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -. On demande de déterminer pour chacune le symbole correspondant. Aucune justification n'est à donner.

Soit λ une constante. On considère la parabole Π_λ d'équation : $y = - x^2 + \lambda x + \lambda^2$.

1. Trouver les coordonnées $x = \frac{\lambda}{A}$, $y = \frac{B\lambda^2}{C}$ du sommet de Π_λ. Ce point est situé sur une courbe $y = Dx^2$.
2. Soit Δ la droite joignant les deux points U(-1, 1) et V(2, 4). Pour que Π_λ et Δ aient au moins un point commun, il faut et il suffit que l'on ait $\lambda \geq \frac{G}{H}$.
3. Lorsque $\lambda = EF$, Π_λ et Δ ont un point commun unique de coordonnées (JK, L).
   Lorsque $\lambda \geq EF$, Π_λ et Δ ont un point commun unique de coordonnées $(\frac{M}{N}, \frac{P}{Q})$.
4. Pour que Π_λ et le segment [UV] aient deux points communs distincts, il faut et il suffit que $\frac{R}{S} < \lambda \leq T$.

2. *QCM AVEC JUSTIFICATIONS*

Dans un premier temps, l'élève se prononce sur la véracité de quelques affirmations puis doit justifier soit par une démonstration (réponse vraie), soit par un contre-exemple (réponse fausse). Il s’agit en fait d’évaluer des questions de cours ou de réinvestir des idées de démonstrations. Donner, dans un premier temps, le résultat à l’élève lui permet de se laisser guider et d’aller dans une direction bien précise. De plus, la notion de contre-exemple est fondamentale en mathématiques et il faut la pratiquer souvent pour que l’élève comprenne sa force pour nier une affirmation et ses limites lorsqu'il s'agit de prouver une assertion pour tout *x*.

Exemple :

Exercice n°14 (enseignement obligatoire)

Partie I

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent alors aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :

(A) Toute suite bornée est convergente.
(B) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.
(C) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie II

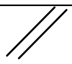
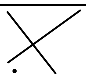
Pour chacune des propositions de la première partie, justifier la réponse donnée :
– dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
– dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

Banque exercices S 2005

3. QRM : QCM A REPONSES MULTIPLES

L'élève est averti que plusieurs solutions peuvent être correctes et qu'il peut donner plusieurs réponses. C'est une formule assez déstabilisante à mon goût. L'élève ne sait pas combien de réponses sont à valider et il peut difficilement procéder par élimination.
Chaque fois que j'ai essayé d'en utiliser, les élèves ont été déconcertés car, quand ils pensaient avoir répondu à la question, ils n'étaient pas sûrs d'avoir terminé l'exercice. Je joins cependant un exemple que j'ai donné en sixième.

Exemple :

Enoncé	A	B	C	D
Je suis un nombre entier :	4	4,2	3,0	1,01
Mon chiffre des dizaines est 3 :	123	30	12,3	352
10 x 2,4 =	2,40	24,0	20,4	2,04
2,8 + 5,2 =	7,10	7	8,10	8
7 – 2,4 =	5,4	4,4	4,6	5,6
Je suis compris entre 4 et 4,1 :	4,01	4,11	3,99	4,001
Je suis supérieur à 7 :	6,5	6,9	7,6	10
1 dm est égal à :	10 cm	10 m	0,1 cm	0,1 m
Les droites ci-contre sont : 	Parallèles	Sécantes	Perpendiculaires	Rien
Les droites ci-contre sont : 	Parallèles	Sécantes	Perpendiculaires	Rien
M est sur le cercle de diamètre [AB]. Le triangle MAB peut être :	Isocèle en M	Equilatéral	Rectangle en M	Quelconque

On retrouvera la dernière question, dans une formulation différente, au paragraphe suivant.

4. QRU : QCM A REPONSE UNIQUE

L'élève est averti que la question ne comporte qu'une seule solution correcte. Je propose en général des QRU avec 4 (ou 5) possibilités de réponse. Ainsi on élimine partiellement le facteur "chance" et on ne se perd pas dans une multitude d'affirmations qui n'aurait aucun sens. Ce système de la réponse unique permet à l'élève d'élaborer une stratégie : celui-ci commence par supprimer certaines réponses fausses puis une dernière réflexion un peu plus poussée amène la conclusion.
En activité en classe, on travaille la façon de raisonner : la notion d'élimination de réponses farfelues favorise plus tard la remise en question de l'élève face à ses propres résultats, et permet à l'enseignante que je suis de faire travailler, par

exemple, les ordres de grandeur pour certains calculs, les questions de cours, l'entraînement au calcul littéral, …
En évaluation sommative, il faut clairement annoncer le barème. En principe, j'accorde 1 point pour la réponse exacte, ½ point si deux mauvaises réponses sont barrées, 0 s'il n'y a pas de réponse et -½ si la réponse est fausse (toutefois j'applique rarement ce dernier cas de figure).

Ordre de grandeur

En sixième, notamment, c'est un bon moyen de faire réfléchir à l'ordre de grandeur. En effet, il est difficile de travailler cette notion en laissant les élèves répondre librement, sans indiquer le résultat attendu : leurs réponses sont trop nombreuses et trop différentes.
Dans les opérations, on peut éliminer une ou deux réponses en utilisant l'ordre de grandeur du résultat puis on termine :

- avec la dernière décimale pour les sommes, différences ou produits
- avec le nombre de décimales pour certains produits
- avec la valeur du produit (inférieur ou supérieur au nombre multiplié selon la position du deuxième facteur par rapport à 1).

Exemples et quelques commentaires :

	Opération	Résultat a	Résultat b	Résultat c	Résultat d
1	**55485 + 45268**	46453	100755	100753	10753
2	**59,32 + 18,9**	98,22	88,22	78,22	68,22
3	**10223 – 5,6772**	10217,3228	121,3228	12,3228	10217,6772
4	**7598 - 600**	6998	1008	992	7002

Pour la première opération, l'élève évalue la somme (environ 100 000) et conclut grâce à la valeur de l'unité (ici 3).

	Opération	Résultat a	Résultat b	Résultat c	Résultat d
5	**15,3 x 29,4**	49,52	449,257	449,82	4765,52
6	**2,5 x 3,4**	8,555	8,5	25,2	2,15

Pour le produit **5**, l'élève effectue de tête 15 x 30 soit environ 450 puis il sait que le résultat ne peut avoir plus de deux chiffres après la virgule ou que le chiffre des unités d'un produit est le produit des chiffres des unités : il peut alors conclure par le résultat **c**.

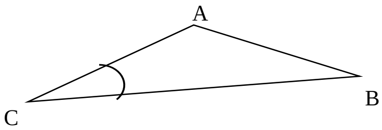
	Opération	Résultat a	Résultat b	Résultat c	Résultat d
7	**59,2 x 0,95**	590,24	46,24	61,24	5,24
8	**75,3 x 1,21**	91,113	7,113	65,113	762,113
9	**5,1 x 0,8**	4,19	5,18	4,273	4,08

Pour le produit **7**, l'élève évalue le produit à environ 59 : il élimine les réponses **a** et **d**. Puis comme **59,2** est multiplié par un nombre inférieur à 1, le produit est plus petit que **59,2** : il s'agit de 46,24.

Questions de cours

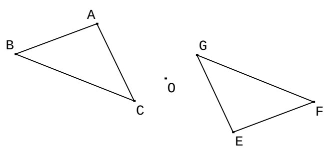
Lors d'une évaluation, c'est un moyen de poser des questions de cours sans faire appel à un apprentissage "par cœur". Quand l'élève retrouve le mot de vocabulaire qu'il cherchait, c'est assez rassurant. De plus, comme le QRU est proposé en début de devoir surveillé, il permet à l'élève de "se mettre en conditions" pour aborder les questions qui demandent plus de réflexion. C'est une sorte d'échauffement. Dans ce type de QCM, seule la bonne réponse est récompensée ce qui valorise l'élève travailleur mais en difficulté.

Exemple en sixième :

Enoncé	**A**	**B**	**C**	
L'angle indiqué est :	$A\hat{B}C$	$B\hat{A}C$	$A\hat{C}B$	
Il est :	Aigu	Droit	Obtus	

Il s'agit de questions de cours très simples mais qui permettent une évaluation rapide et surtout permettent au professeur de comprendre la confusion possible qui existe dans la notation (de l'angle ici -position du sommet au milieu-).

Exemple en cinquième (créé par mon collègue Yannick Plumet) :

Enoncé	**Réponses**		
	a	b	c
Si C est le symétrique de B par rapport à A alors	AB = BC	A est le milieu de [BC]	B est le milieu de [AC]
Un triangle équilatéral a	1 centre de symétrie	3 axes de symétrie et 1 centre de symétrie	3 axes de symétrie et aucun centre de symétrie
La figure ci-contre a 	3 axes de symétrie	1 centre de symétrie	1 axe de symétrie et 1 centre de symétrie
Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle en A. E, F et G sont les symétriques de A, B et C par rapport à O. 	Le triangle EFG est isocèle en E	Le triangle EFG est isocèle en F	Le triangle EFG est isocèle en G

Exemples en quatrième :

Enoncé	A	B	C	D
Le centre du cercle inscrit est le point d'intersection des	médianes	médiatrices	bissectrices	hauteurs
Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des	médianes	médiatrices	bissectrices	hauteurs
Le centre de gravité est le point d'intersection des	médianes	médiatrices	bissectrices	hauteurs
L'orthocentre est le point d'intersection des	médianes	médiatrices	bissectrices	hauteurs

Enoncé	A	B	C	D
ABC est un triangle rectangle en A.	$AB^2 = AC^2 + BC^2$	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	On ne sait pas
ABC est un triangle rectangle en A. Le centre de son cercle circonscrit est :	A	B	C	Le milieu de [BC].
M est sur le cercle de diamètre [AB]. Le triangle MAB est toujours :	Isocèle en M	Equilatéral	Rectangle en M	Quelconque

Remarquez la formulation différente pour cette dernière question qui rend la réponse unique (cf. paragraphe 3. QRM).

Enoncé	A	B	C	D
L'opposé de – 4 est	+ 4	¼	- ¼	- 4
L'inverse de – 4 est	+ 4	¼	- ¼	- 4
Le produit d'un nombre et de son inverse est égal à	On ne sait pas	- 1	0	+ 1

Calcul littéral

Au collège, une étape importante et difficile est le calcul littéral. On peut ainsi travailler de nombreuses notions :

- vérification d'égalités avec des valeurs données

Exemple en cinquième ou en quatrième (selon la formulation) :

Enoncé	a	b	c	d
L'égalité $5y - 1 = 4y$ est vraie si	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
L'équation $3x + 7 = 2x - 1$ a pour solution	$x = -8$	$x = -8/5$	$x = 8/5$	$x = 8$

- calcul d'expressions connaissant la valeur de la variable

Exemple en cinquième et/ou quatrième :

Enoncé	**a**	**b**	**c**	**d**
Si $t = 2$, alors $3t - 5$ est égal à	0	27	- 2	1
Si $p = 3$, alors $1 + 2p$ est égal à	24	3	7	10
Si $x = 7$, alors $3x - 2$ est égal à	23	19	21	17
Si $d = 4$, alors $1200 - 25d$ est égal à	1100	100	1300	1000
Si $a = 0{,}5$, alors a^2 est égal à	1	2,5	0,25	2

- traduction en langage mathématique d'un énoncé écrit en langage courant

Exemple en quatrième :

Enoncé	**A**	**B**	**C**	**D**
Dans une basse-cour, il y a x lapins et y poules. Au total, le nombre de pattes est :	$x + y$	$2x + 4y$	$4x + 2y$	$2x + 2y$
Si dans une classe, il y a 25 élèves dont x filles, alors le nombre de garçons est :	$x + 25$	$25 - x$	$x - 25$	$25x$

- développement d'expressions

Exemple en quatrième :

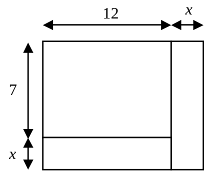
Enoncé	**A**	**B**	**C**	**D**
Lorsque l'on développe et réduit $5(x - 9)$ on obtient :	$5x + 45$	$5x - 9$	$5x - 45$	$x - 45$

- réduction d'expressions

Exemple en cinquième et/ou quatrième :

Enoncé	**A**	**B**	**C**	**D**
x désigne un nombre. L'expression réduite de $5x + x$ est :	$6x^2$	$5x$	$6x$	$5x^2$
a désigne un nombre. L'expression réduite de $7a - a$ est :	$8a$	$7a$	a	$6a$

- tout le calcul littéral

Enoncé	A	B	C	D
On choisit un nombre x. On le double puis on ajoute 5. On obtient :	$2(x + 5)$	$(2x) + 5$	$(x+2) +5$	$x/2 + 5$
 Figure 1				
Le périmètre de la figure 1 est	$2(12x + 7x)$	$2(19 + 2x)$	$2(7\times12+x^2)$	$2\times12\times7\times x^2$
L'aire de la figure 1 est	$7x \times 12x$	$7\times12\times x^2$	$12x^2 + 7x^2$	$(12+x)(7+x)$

Cette approche est intéressante avec les élèves. En effet, certains sont intuitifs et parviennent souvent à résoudre des problèmes par tâtonnement. Là, ils sont obligés de s'investir dans le calcul littéral alors que dans d'autres situations ils auraient pu l'éviter. Aussi, pour les élèves pas très à l'aise en général, on propose des solutions, des réponses ce qui, a priori, leur simplifie la tâche.

On le voit à travers ces exemples, les utilisations des QRU sont multiples et on peut les pratiquer sous de nombreuses formes. Veillez toutefois lors de l'élaboration à ne pas donner trop de réponses farfelues, ce qui n'aurait pas de sens.

5. QCM : VRAI – FAUX – OMISSION

C'est le plus simpliste sous sa forme : l'élève répond vrai ou faux ou il s'abstient.
L'absence de réponse est prévue et doit être clairement signifiée à l'élève.
Malgré son aspect très simple, il permet de travailler sur toutes les idées erronées (et nombreuses !) que les élèves peuvent avoir sur différentes notions.
Après une préparation individuelle en classe, le professeur lance une correction à l'oral, à laquelle les élèves participent activement : chacun donne son avis en essayant de l'étayer d'arguments persuasifs. L'avantage principal de ce type de QCM est que toute la classe participe et que dans un premier temps il n'y a pas de rédaction précise. De plus, on prouve régulièrement que la majorité n'a pas toujours raison et qu'il faut se méfier des leurres. Un autre point non négligeable est l'utilisation du contre-exemple notamment en géométrie où on peut affiner les définitions. Par exemple, à l'arrivée en sixième, presque tous les élèves sont persuadés qu'un carré n'est pas un losange ni un rectangle ; qu'un nombre entier n'a pas de virgule ; qu'on divise toujours le plus grand par le plus petit et bien

d'autres idées reçues. Les discussions permettent une prise de conscience de l'élève, une patiente construction de sa pensée.

Exemple en quatrième

	Enoncé	**Vrai**	**Faux**	**On ne peut pas répondre**
1.	Si un quadrilatère a deux cotés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme.			
2.	Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.			
3.	Si un parallélogramme a deux cotés opposés de même longueur, alors c'est un losange.			
4.	Si un parallélogramme a deux diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.			
5.	Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré.			

6. CONCLUSION

Au même titre que d'autres techniques, je pense que les QCM peuvent apporter leur contribution à la construction d'une pensée mathématique pour nos élèves. De plus, mis à part les connaissances qu'ils nécessitent pour y répondre, on peut les utiliser pour leur côté stratégie de raisonnement. Ils montrent aussi les erreurs que l'élève peut faire et ainsi lui permettent probablement de les éviter. Pour finir, ils offrent "une façon ludique de faire des maths" ce qui, en collège, reste un élément important dans notre enseignement.

Les carrés anti-magiques

Michel LAFOND,

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS

- Qu'est-ce qu'un carré anti-magique ?

Un carré est dit anti-magique **d'ordre *n*** s'il contient $n \times n$ cases, et les entiers de 1 à n^2 (un entier par case) de telle sorte que les n sommes en lignes, les n sommes en colonnes et les deux sommes en diagonales constituent ***2n* + 2 entiers consécutifs**.

(Lorsque les $2n + 2$ sommes sont constantes, le carré est dit magique, et lorsque les $2n + 2$ sommes sont toutes différentes, le carré est dit hétéromagique. Le carré anti-magique est donc un cas particulier de carré hétéromagique.)

Il n'y a pas de carré anti-magique pour $n = 2$ ou $n = 3$ (**Exercice 1**), mais à partir de l'ordre 4, de tels carrés existent, comme le montreront les différents articles à paraître.

Voici un carré anti-magique d'ordre 4 (noté C_4) dans lequel les sommes vont de 29 à 38 :

	5	6	3	15	**29**
	14	12	7	2	**35**
C_4	13	8	4	9	**34**
	1	10	16	11	**38**
31	**33**	**36**	**30**	**37**	**32**

Figure **1**

Comme dans toute la suite, les sommes seront indiquées en gras dans les marges, la somme de la diagonale NE-SO sera indiquée en bas à gauche, et la somme de la diagonale NO-SE sera indiquée en bas à droite. On notera respectivement ces sommes $d_1(n)$ où d_1 et $d_2(n)$ ou d_2. Ici $d_1 = 31$ et $d_2 = 32$.
Les $2 \times 4 + 2 = 10$ sommes de C_4 constituent l'ensemble :

$$\Sigma_4 = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38\}.$$

Ce sont bien des entiers consécutifs.

On remarque sur cet exemple que les sommes diagonales d_1 et d_2 sont consécutives. Nous imposerons pour toute la suite cette <u>contrainte supplémentaire</u> :

<u>Les deux sommes diagonales doivent être aussi proches que possible</u>.

Nous verrons que si n est pair on peut choisir $d_2(n) = d_1(n) + 1$, et que si n est impair on peut choisir au mieux $d_2(n) = d_1(n) + 2$. Un carré anti-magique qui vérifie cette contrainte [écart entre les sommes diagonales égal à 1 ou 2] sera qualifié de "**standard**".

Le carré C_4 ci-dessus est standard.

Je vous propose en **<u>Exercice 2</u>**, de construire un carré anti-magique d'ordre 5.

Il existe un algorithme de construction que nous allons en partie développer. Pour cela, donnons les notations qui seront utilisées dans tous les articles sur le sujet.

II. CALCULS PRELIMINAIRES

Dans toute la suite, nous utiliserons les <u>notations</u> suivantes :

n	ordre (ou dimension) du carré. C'est le nombre de cases du côté.
C_n	un carré anti-magique standard d'ordre n.
λ	la constante $4n + 8$
C	la constante $(n + 4)^2$
intrus	les deux constantes λ et C.
Σ_n	ensemble des sommes du carré C_n
m	somme minimale de Σ_n.
N, E, S, O	les 4 points cardinaux
d_1 ou D_1	somme diagonale NE-SO. (On notera $d_1(n)$ s'il y a risque de confusion)
d_2 ou D_2	somme diagonale NO-SE. (On notera $d_2(n)$ s'il y a risque de confusion)
$[y - - z]$	représente, si y et z sont deux entiers naturels avec $y \leq z$, l'ensemble des entiers consécutifs depuis y jusqu'à z. on convient que $[y - - z] = \varnothing$ lorsque $y < z$.
$\lfloor x \rfloor$	partie entière du réel x. [entier arrondi inférieur]
T	application $x \to C - x = (n + 4)^2 - x$
$\oplus$	addition ensembliste : si x est un entier et E un ensemble, $x \oplus E = \{x + e \ ; \ e \in E\}$

Commençons par examiner quel peut être l'ensemble Σ_n des $2n + 2$ entiers constituant les sommes d'un carré anti-magique d'ordre n (noté C_n).
Par définition, l'ensemble Σ_n des $2n + 2$ sommes des lignes, colonnes et diagonales de C_n peut s'écrire en notant m la plus petite des sommes :

$$\Sigma_n = \{m, m+1, m+2, m+3, ---, m+2n, m+2n+1\} = [m- - m+2n+1].$$

Les n sommes en lignes, comme les n sommes en colonnes ont un total égal à la somme des entiers de 1 à n^2 c'est-à-dire $S = \frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$
La somme des éléments de Σ_n vaut donc : $2S + d_1 + d_2 = n^2 (n^2 + 1) + d_1 + d_2$ où d_1, d_2 sont les deux sommes diagonales.
La somme des éléments de Σ_n vaut aussi

$$m + (m + 1) + (m + 2) + --- + (m + 2n + 1) = (n + 1)(2m + 2n + 1)$$

D'où l'égalité $n^2 (n^2 + 1) + d_1 + d_2 = (n + 1)(2m + 2n + 1)$ qui permet de tirer :

$$d_1 + d_2 = (n + 1)(2m + 2n + 1) - n^2 (n^2 + 1) \qquad (1)$$

Or $d_1 + d_2$ (qui est la somme de deux éléments de Σ_n) est au moins égale à la somme des deux plus petits éléments de Σ_n et au plus égale à la somme des deux plus grands éléments de Σ_n. Donc on a l'encadrement

$$2m + 1 \leq d_1 + d_2 \leq 2m + 4n + 1 \qquad (2)$$

Si on remplace dans (2) $d_1 + d_2$ par sa valeur tirée de (1), on trouve :

$$2m + 1 \leq (n + 1)(2m + 2n + 1) - n^2 (n^2 + 1) \leq 2m + 4n + 1$$

qui se simplifie en : $n^4 - n^2 - 3n \leq 2\,mn \leq n^4 - n^2 + n$.
On divise par n pour obtenir :

$$n^3 - n - 3 \leq 2\,m \leq n^3 - n + 1.$$

Or $2m$ est pair et les deux bornes de l'encadrement sont impaires, on peut donc affirmer :

$$n^3 - n - 2 \leq 2\,m \leq n^3 - n. \qquad (3)$$

Ce qui ne laisse que deux possibilités pour m :

$$m = \tfrac{1}{2} (n^3 - n) - 1 \quad \text{ou} \quad m = \tfrac{1}{2} (n^3 - n) \qquad (4)$$

Dans la suite nous choisirons la première possibilité, à savoir :

$$m = \frac{n^3 - n}{2} - 1 = \frac{n^3 - n - 2}{2}.$$

A partir de (1), avec le choix qui vient d'être fait, on devra donc avoir :

$$\mathbf{d_1+d_2}=(n+1)(2m+2n+1)-n^2(n^2+1)=(n+1)(n^3-n-2+2n+1)-n^2(n^2+1)=\mathbf{n^3-1}.$$

Si n est pair, $n^3 - 1$ est impair, et on pourra réaliser $d_1 + d_2 = n^3 - 1$ en prenant : $d_1 = \frac{1}{2} (n^3 - 2)$ et $d_2 = \frac{1}{2} n^3$ qui sont deux entiers consécutifs ($d_2 = d_1 + 1$).
Si n est impair, $n^3 - 1$ est pair, et on ne pourra pas réaliser $d_1 + d_2 = n^3 - 1$ en prenant deux entiers consécutifs, mais si on veut minimiser l'écart entre d_1 et d_2, on pourra prendre dans ce cas :

$$d_1 = ½\ (n^3 - 3) \text{ et } d_2 = ½\ (n^3 + 1) \text{ qui vérifient } d_2 = d_1 + 2.$$

En résumé :

> Il s'agira de prouver pour $n \geq 4$, l'existence d'un carré anti-magique C_n qui aura pour sommes :
>
> $\Sigma_n = \{m, m+1, m+2, m+3, \text{- - -}\ m+2n, m+2n+1\}$ où $m = \dfrac{n^3 - n - 2}{2}$,
>
> et qui sera standard, c'est-à-dire dont les deux sommes diagonales seront
>
> $$d_1 = \frac{n^3 - 2}{2} \text{ et } d_2 = \frac{n^3}{2} \qquad \text{si } n \text{ est pair}$$
>
> $$d_1 = \frac{n^3 - 3}{2} \text{ et } d_2 = \frac{n^3 + 1}{2} \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

III. LES GRANDES LIGNES DE L'ALGORITHME

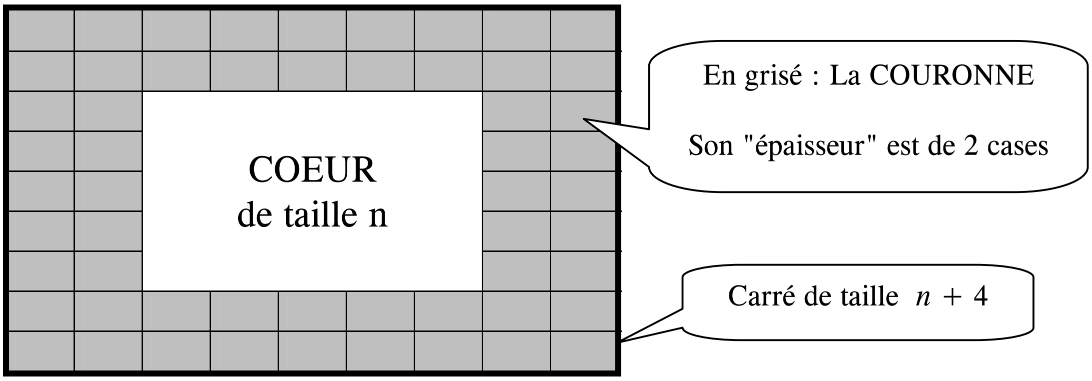
Il ne faut pas s'attendre, comme pour les carrés magiques traditionnels, à des "formules" donnant le contenu de la case (i ; j) du carré C_n. L'algorithme que je décrirai est une récurrence qui permet seulement de passer de l'ordre n à l'ordre $n + 4$.

Comme la récurrence ne fonctionne que pour n suffisamment grand, il faudra l'amorcer en donnant explicitement les carrés anti-magiques d'ordre 4, 5, 6 etc.
On a donné C_4 en figure 1. C'est un bon début.

Pour le passage de l'ordre n à l'ordre $n + 4$, la technique utilisée sera la technique des enceintes qui a déjà fait ses preuves dans la construction des carrés magiques traditionnels, et qui consiste à entourer un carré anti-magique standard d'ordre n légèrement modifié, par une double enceinte de cases, gagnant ainsi 4 lignes et 4 colonnes. Pourquoi une double enceinte, et pas une simple enceinte ? Simplement parce qu'avec une double enceinte, on a environ deux fois plus de liberté pour les choix des éléments constituant l'enceinte, ce qui facilite grandement le respect des contraintes liées au caractère anti-magique.

L'algorithme consiste à fabriquer, à partir d'un carré standard C_n connu, un carré de même taille C'_n qui constituera le "**cœur**", lequel sera entouré d'une "**couronne**".

Détaillons un peu la géographie du terrain d'un carré anti-magique **d'ordre *n* + 4** :



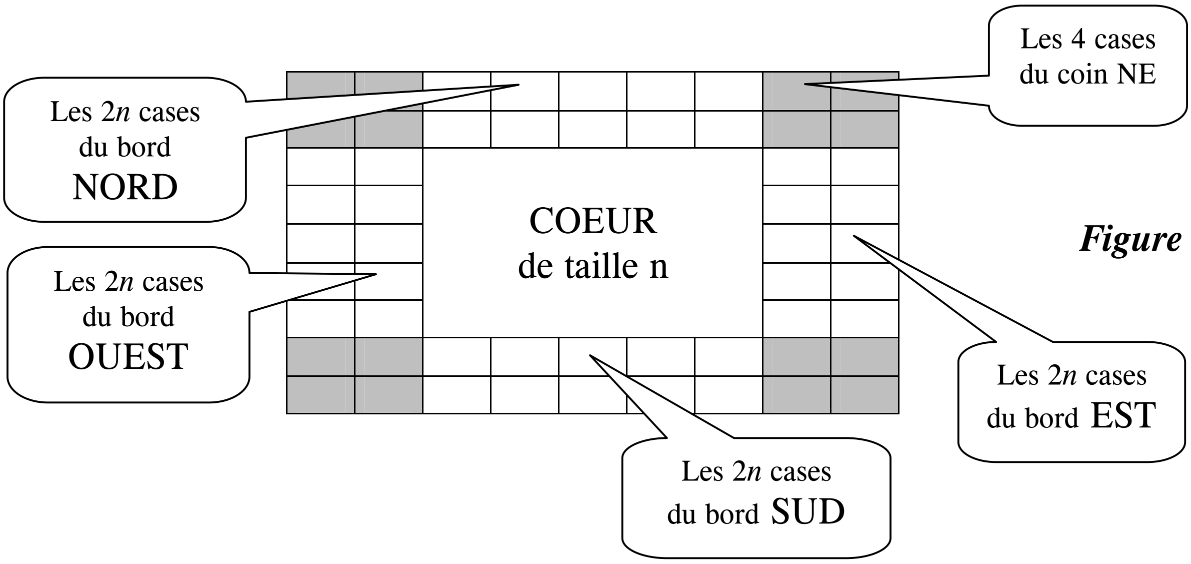
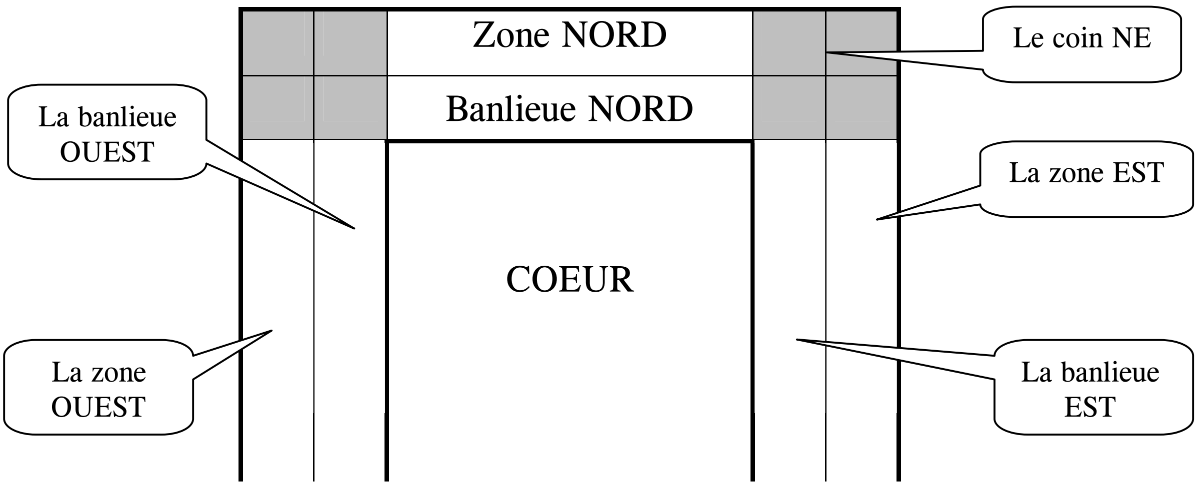


Figure 2

Chaque bord est divisé en deux parties, la partie intérieure (la plus proche du cœur, appelée "**banlieue**") et la partie extérieure appelée "**zone**". Exemples :



Pour ce premier article, j'expose simplement sur un exemple, la récurrence, que j'appelle **EXTENSION**.
Nous allons effectuer une telle extension, en vue de construire C_8.

IV. EXEMPLE D'EXTENSION : DU CARRE C_4 AU CARRE C_8

On part du carré anti-magique <u>standard</u> C_4 vu dans la figure 1, et pour lequel on a :

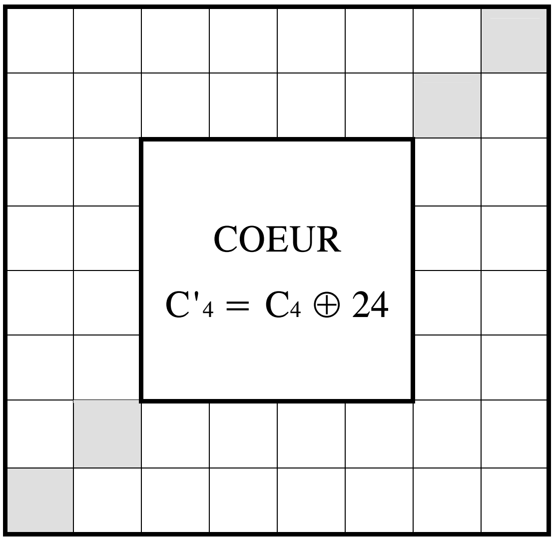
Ensemble des 10 sommes : $\Sigma_4 = [29 - - 38]$

Sommes diagonales : $d_1 = 31$ et $d_2 = 32$

On veut arriver au carré C_8 pour lequel il nous faut (Voir l'encadré à la fin du § II)

$m = 251$ et $\Sigma_8 = [251 - - 268]$ $d_1(8) = D_1 = 255$ et $d_2(8) = D_2 = 256$.

Géométriquement, on aura ceci :



C_8

***Figure* 3**

Dans C_8 on doit placer tous les entiers de 1 à $8^2 = 64$.

La **<u>couronne</u>** est le domaine quadrillé situé entre le carré de côté 4 et le carré de côté 8 de la figure 3 ci-dessus. La couronne doit contenir $8^2 - 4^2 = 48$ entiers.

Décidons de placer dans cette couronne les entiers "extrêmes", c'est-à-dire les 24 entiers de 1 à 24 et les 24 entiers de 41 à 64.

Notons Γ = **[1 - - 24]** $\cup$ **[41 - - 64]** l'ensemble des 48 entiers de la couronne.

Dans le carré intérieur de la figure 3, qu'on appellera le "**cœur**", devront se trouver les 16 entiers de 25 à 40. Pour préserver le caractère anti-magique du cœur, nous construisons ce cœur en ajoutant à tous les entiers de C_4 la constante $\boldsymbol{\lambda = 24}$. On obtient ainsi un carré qu'on notera $C'_4 = C_4 \oplus 24$, dont les 10 sommes constituent l'ensemble $\Sigma'_4 = \Sigma_4 \oplus (24 \times 4) = [29 - - 38] \oplus 96 = [125 - - 134]$ et dont les deux sommes diagonales sont $31 + 96 = 127$ et $32 + 96 = 128$. On peut voir C'_4 dans la figure 4 ci-dessous.

Si on compare Σ'_4 avec l'objectif $\Sigma_8 = [251 - - 268]$ $D_1 = 255$ et $D_2 = 256$, on voit qu'en ajoutant la constante 128 dans les 4 cases vides de chaque ligne, colonne et diagonale de la figure 3, (par exemple les 4 cases grisées), on transformera $\Sigma'_4 = [125 - -134]$ en $\Sigma'_4 \oplus 128 = [253 - - 262]$, ce qui réalisera une bonne partie de l'objectif, dont les deux diagonales :

$$127 + 128 = 255 = D_1 \text{ et } 128 + 128 = 256 = D_2.$$

$C'_4 = C_4 \oplus 24$

	29	30	27	39	**125**
	38	36	31	26	**131**
	37	32	28	33	**130**
	25	34	40	35	**134**
127	**129**	**132**	**126**	**133**	**128**

***Figure* 4**

Les 48 entiers de $\Gamma = [1 - - 24] \cup [41 - - 64]$ à placer dans la couronne, peuvent se répartir en <u>23 paires</u> {1 ; 63}, {2 ; 62}, {3 ; 61}- - - {22 ; 42}, {23 ; 41}, auxquelles il faut ajouter 24 et 64 ("**<u>Les deux intrus</u>**") qu'on placera en bas à droite (voir figure 5).

Ces 23 paires sont toutes de la forme $\{x\ ;\ 64 - x\}$, et en plaçant 20 de ces paires à l'emplacement des doubles flèches de la figure 5, on aura dans les 4 lignes centrales, les 4 colonnes centrales et les deux diagonales la constante additive souhaitée ($128 = 2 \times 64$) assurant l'obtention des 10 sommes de [253 - - 262] (en gras dans la figure 5).
La différence entre $\Sigma_8 = [251 - - 268]$ et $\Sigma'_4 = [125 - -134] \oplus 128 = [253 - - 262]$ représente l'ensemble des 8 sommes qui restent à obtenir. Ce sont les 8 sommes de l'ensemble {251, 252, 263, 264, 265, 266, 267, 268} = [251 - - 252] ∪ [263 - - 268].

Ces 8 sommes devront être réalisées aux "bords" de C_8, c'est-à-dire en S1, S2, - - - S8 de la figure 5.

Il va falloir faire le choix de l'ordre pour imposer
$\{S1, S2, --- S8\} = \{251, 252, 263, 264, 265, 266, 267, 268\}$.

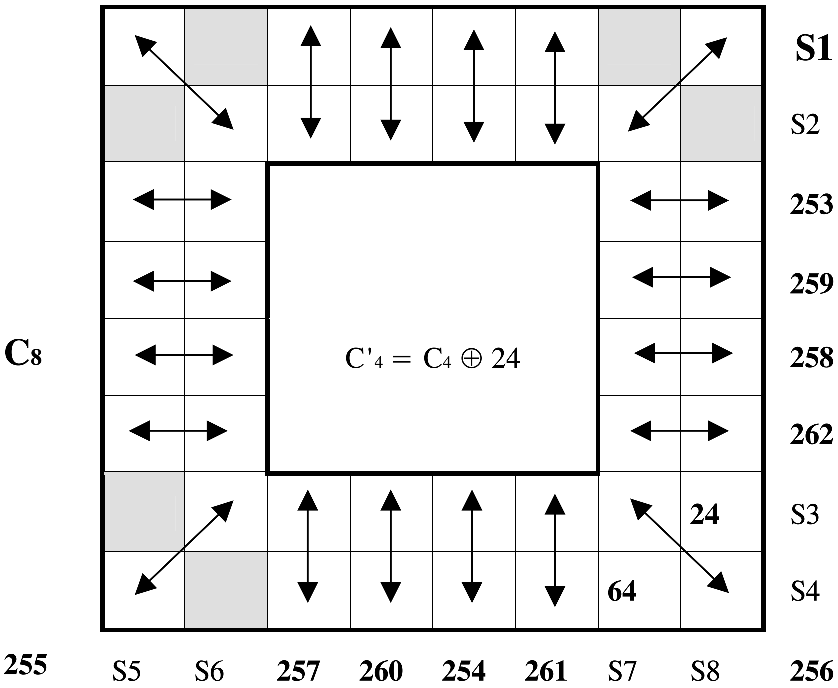


Figure **5**

Il y a un impératif : on doit avoir $S1 + S2 + S3 + S4 = S5 + S6 + S7 + S8$.

(La démonstration facile de ce résultat est laissée au lecteur, c'est l'<u>**Exercice 3**</u>.
La démonstration générale sera faite lors d'articles ultérieurs)

On choisira ici :
$S1 = 251$; $S2 = 266$; $S3 = 263$; $S4 = 268$; $S5 = 252$; $S6 = 264$; $S7 = 265$; $S8 = 267$ parmi bien d'autres choix possibles.

Plaçons arbitrairement les paires $\{1 ; 63\}$, $\{2 ; 62\}$, $\{3 ; 61\}$ et $\{4 ; 60\}$ dans les coins et les deux intrus 24 et 64 en bas à droite (Voir Figure 6), et supposons choisies les 16 paires de bords (horizontales ou verticales) à la place des doubles flèches de la figure 5.

$8 + 2 + 16 \times 2 = 42$ nombres sont donc placés dans la couronne.

Il restera $48 - 42 = 6$ nombres à placer dans les six cases de la couronne qui n'ont pas encore été affectées (en grisé dans la Figure 5).
<u>Ces 6 nombres sont ceux des $23 - (4 + 16) = 3$ paires non utilisées</u>.

Nommons $X_1, X_2, --- X_6$ les contenus des 6 cases (en grisé dans la figure 6) pour lesquelles le choix n'a pas encore été fait.
Ces 6 nombres doivent constituer 3 paires $\{x, 64 - x\}$.

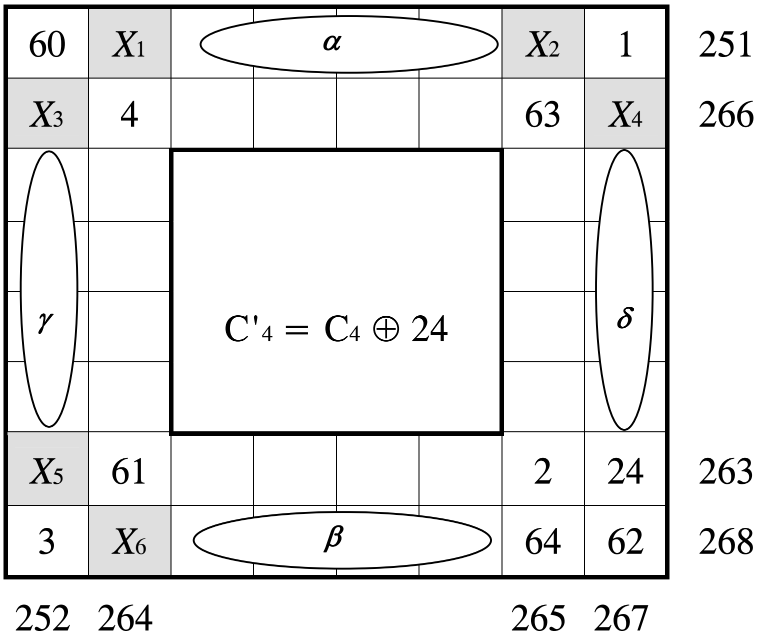


***Figure* 6**

Cela fait beaucoup d'inconnues, aussi on va "globaliser" la situation en n'envisageant dans un premier temps, que des sommes d'inconnues situées dans des domaines géométriques remarquables, à savoir les domaines rectangulaires de 4 cases chacun, entourés d'une ellipse dans la figure 6. Ces domaines sont appelés "zones" et on note α, β, γ, δ les sommes des 4 entiers des zones respectives Nord, Sud, Ouest et Est.
En ce qui concerne le bord nord, puisqu'on mettra 4 paires verticales dans les 8 cases (Voir Figure 5), les 4 cases situées sous l'ellipse de somme α [formant ce qu'on appelle La "banlieue NORD"] auront une somme égale à $4 \times 64 - \alpha$. Il en est de même pour l'ouest, où les 4 cases situées à droite de l'ellipse de somme γ (La "banlieue OUEST") auront une somme égale à $4 \times 64 - \gamma$, etc.

Bref, la somme des 4 éléments d'une banlieue quelconque est égale au complément à 256 de la somme des 4 éléments de la zone associée.

Finalement les 10 inconnues X_1, X_2, - - - X_6, α, β, γ, δ vérifient le système des 8 équations traduisant le respect des 8 sommes (S1, S2 - - - S8) = (251, 266, 263, 268, 252, 264, 265, 267) en marges de la figure 6.

Ce système comporte 4 équations pour les 4 lignes et 4 équations pour les 4 colonnes de la couronne.

Ce système est :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + 61 + \alpha = 251 \\ X_3 + X_4 + 67 + 256 - \alpha = 266 \\ X_5 + 87 + 256 - \beta = 263 \\ X_6 + 129 + \beta = 268 \\ X_3 + X_5 + 63 + \gamma = 252 \\ X_1 + X_6 + 65 + 256 - \gamma = 264 \\ X_2 + 129 + 256 - \delta = 265 \\ X_4 + 87 + \delta = 267 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + \alpha = 190 \\ X_3 + X_4 - \alpha = -57 \\ X_5 - \beta = -80 \\ X_6 + \beta = 139 \\ X_3 + X_5 + \gamma = 189 \\ X_1 + X_6 - \gamma = -57 \\ X_2 - \delta = -120 \\ X_4 + \delta = 180 \end{cases}$$

On en tire successivement :

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 133$
$X_5 + X_6 = 59$
$X_1 + X_3 + X_5 + X_6 = 132$
$X_2 + X_4 = 60$ donc $X_1 + X_3 = 73$

Il y a de nombreuses solutions, même avec la condition que les 6 inconnues X_i soient composées de 3 paires $\{x\ ;\ 64 - x\}$.
Une possibilité est $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = (15, 49, 58, 11, 53, 6)$.
On a bien les 3 appariements : $15 + 49 = 58 + 6 = 11 + 53 = 64$.

Les X_i permettent de tirer de (S) : $\alpha = 126$; $\beta = 133$; $\gamma = 78$ et $\delta = 169$.
Ce n'est pas fini ! Car il faut maintenant trouver comment exprimer α, β, γ, et δ comme sommes de 4 termes pris dans 4 paires différentes parmi les 16 paires ci-dessous qui restent disponibles. (Les paires sont en colonne). Toute la difficulté est concentrée dans ce choix :

5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	18	19	20	21	22	23
59	57	56	55	54	52	51	50	48	47	46	45	44	43	42	41

Une solution est :

$\alpha = 55 + 44 + 13 + 14 = 126$
$\beta = 56 + 48 + 10 + 19 = 133$
$\gamma = 21 + 22 + 17 + 18 = 78$
$\delta = 59 + 57 + 41 + 12 = 169$

Il faut bien vérifier que ces 16 éléments sont dans 16 paires différentes pour garantir l'appariement futur des zones avec les banlieues (Voir Figure 5)

Les 4 éléments utilisés pour la zone α sont cerclés dans le tableau ci-dessus.
Il n'y a plus qu'à mettre dans l'ellipse de α ("La zone α"), les 4 entiers 55 ; 44 ; 13 ; 14 dans un ordre quelconque, et à compléter (par complément à 64) les 4 cases situées juste dessous, c'est à dire la banlieue NORD.

On procède de même pour β, γ, et δ dans leurs zones respectives et dans leurs banlieues respectives de la figure 6.
Remarquons qu'on peut, dans un bord donné, échanger les paires à condition de conserver leur orientation. Par exemple, au NORD, on peut sans risque, échanger les couples (13 ; 51) et (14 ; 50).
Cela engendre $(4\,!)^4 = 331776$ carrés anti-magiques d'ordre 8 différents…

On aboutit enfin au carré C_8 de la figure 7 ci-dessous :

***Figure* 7**

C_8

	60	15	13	14	44	55	49	1	**251**
	58	4	51	50	20	9	63	11	**266**
	17	47	29	30	27	39	52	12	**253**
	18	46	38	36	31	26	23	41	**259**
	21	43	37	32	28	33	7	57	**258**
	22	42	25	34	40	35	5	59	**262**
	53	61	54	45	16	8	2	24	**263**
	3	6	10	19	48	56	64	62	**268**
255	**252**	**264**	**257**	**260**	**254**	**261**	**265**	**267**	**256**

Les sommes vont

de 251 à 268

$\boldsymbol{d_2 = d_1 + 1}$

Vous pouvez, avec un peu de patience, construire de la même manière, à partir de C_8, un carré anti-magique d'ordre 12.

Nous donnerons un tel carré dans le prochain article, ainsi qu'un algorithme général de passage de n à $n + 4$ (dans le cas $n = 4k$, le plus simple).

Une séance sur la numération et les courbes en seconde section européenne

David Magnien, Lycée Hilaire de Chardonnet, Chalon-sur-Saône

Dans notre lycée on aime les sections européennes : la section SES-Anglais est implantée depuis quelques années, la section SVT-Anglais a ouvert ses portes cette année scolaire, on attend l'an prochain un collègue historien ayant obtenu la certification, et on réfléchit déjà à une section impliquant les mathématiques. Les élèves qui choisissent cette option facultative ont une heure supplémentaire en langue et une heure supplémentaire dans la Discipline Non Linguistique (ou DNL), où l'enseignant leur fait un cours intégralement dans la langue de la section. Le but de la DNL est non seulement de donner aux élèves un vocabulaire spécifique à la discipline dans une autre langue, mais aussi et surtout de favoriser la pratique de l'oral.

Les élèves ne sont pas forcément regroupés dans une même classe, et ne sont pas forcément très nombreux : la section européenne SVT-Anglais en seconde comptait pour cette première année une douzaine d'élèves provenant de trois classes différentes ; mais pour faciliter le fonctionnement des emplois du temps, beaucoup d'élèves de la section proviennent de la seconde 4. Le groupe ainsi constitué est homogène, et les élèves ont déjà en tête une orientation scientifique, ce qui permet de leur donner des activités pointues.

J'ai passé ma certification Anglais en mai 2006 avec ma collègue de SVT Aline Burat. Nous enseignons tous les deux, à dessein, en seconde 4. Elle devait s'absenter pour un stage en janvier 2007, et m'a demandé si je voulais la remplacer pour cette heure. Elle m'a suggéré de faire une séance sur les grands nombres et les courbes. Avec la section européenne, elle étudiait le système solaire, et voulait travailler sur les distances et les dimensions des planètes ; elle avait prévu de leur proposer une activité où les élèves devraient demander à un de leurs camarades les caractéristiques d'une planète, pour reconstituer la « carte d'identité » de chaque astre. En classe entière avec la seconde 4, elle étudiait les caractéristiques des différents milieux naturels, et les courbes de température et d'hygrométrie tenaient une place importante dans son cours. Le sujet qu'elle me proposait s'insérait donc très bien dans sa progression tout en me permettant de faire des maths. Elle prévint les élèves de ma venue.

L'activité que j'ai élaborée est donc décomposée en deux parties plus ou moins indépendantes : l'une sur la numération, l'autre sur les graphiques. Dans la première, mon but est de faire lire des nombres aux élèves, mais aussi de leur en faire écrire, pour les faire parler et pratiquer. On explique le principe de la numération décimale, puis on expose les spécificités du système de notation anglo-saxon : virgules tous les trois chiffres, point remplaçant la virgule, et surtout les noms des grandes unités numériques qui diffèrent des nôtres. On insiste en particulier sur l'utilisation de l'échelle courte, par opposition à l'échelle longue en France.

Petit aparté historique pour les lecteurs de la Feuille de Vigne : depuis Nicolas Chuquet au XV^{e} siècle et Pelletier au milieu du XVI^{e}, les unités de grands nombres (million, billion, trillion…) correspondent à des puissances de 10 qui progressent de 6 en 6 : un million = $10^{1\times 6}$, un **bi**llion = $10^{2\times 6}$, un **tri**llion = $10^{3\times 6}$, etc. Ou encore, elles désignent les puissances successives de 1 000 000. C'est l'échelle longue (le terme vient de Chuquet), à laquelle on intercalera les milliards (10^{6+3}), **bi**lliards ($10^{2\times 6+3}$), **tri**lliards ($10^{3\times 6+3}$), etc. Parallèlement, au cours du XVII^{e} siècle, le groupement des chiffres par 3 conduit à l'élaboration de l'échelle courte, basée elle sur des puissances de 10 multiples de 3, ou encore sur les puissances de 1 000 : un million = $1\ 000^2$, un billion = $1\ 000^3$, un trillion = $1\ 000^4$, etc. Il n'y a plus besoin des noms en *–ard* pour combler les vides.

Comme son aînée, l'échelle courte naît en France, puis se répand en Italie et dans les colonies du Nouveau Monde (Amérique du Nord, Brésil) et y devient la norme au cours du XIX^{e} siècle. L'Angleterre suit toujours l'échelle longue. C'est au XX^{e} siècle que la fixation des règles grammaticales et linguistiques va bouleverser ces principes, qui jusqu'alors n'étaient que des conventions consensuelles. Si tous les pays sont d'accord sur la valeur d'un million, au-delà, on peine à trouver un terrain d'entente : le mot *milliard* n'est pas en usage partout, est adopté puis tombe en désuétude, puis revient, le mot *billion* change plusieurs fois de sens. La Conférence des Poids et Mesures française propose le retour à l'échelle longue en 1948, entériné par le Journal Officiel en 1961. C'est en 1974 que le Royaume Uni officialise l'usage de l'échelle courte, rejoignant les Etats-Unis qui l'avaient adoptée depuis plusieurs générations. Depuis, on a développé et internationalisé les préfixes *méga-, giga-, péta-, micro-, nano-* etc. sur lesquels tous les pays s'entendent. Pour des raisons de timing, je n'ai pas intégré cet exposé dans ma séance ; d'ailleurs, ce n'est pas du tout le but d'une section européenne, qui doit, rappelons-le, favoriser l'expression orale des élèves, et pas la verbosité technique de l'enseignant.

La seconde partie aurait pu commencer par un exposé théorique sur les systèmes de coordonnées du plan, qui donne beaucoup de vocabulaire (axes, coordonnées, point…). Mais pour ne pas trop privilégier l'aspect théorique, j'ai voulu insérer ce mini cours dans un exercice de tracé de courbes de températures et de lecture graphique. Je commence donc par donner des tableaux de températures en introduction, que les élèves devront exploiter dans le II à l'aide du vocabulaire donné dans le I : comparaison, maximum et minimum.

Lors de la séance, la première partie se passe correctement, mais lentement : il est 8 heures, et les élèves – tous assez bons – ne sont pas motivés pour parler tout de suite. Qui plus est, même si j'en connais plus de la moitié, j'en vois certains pour la première fois, et ils restent circonspects face à un nouveau professeur. Les autres redécouvrent leur prof de maths sous un autre jour. J'ai donc du mal à les faire s'exprimer et lire les nombres terriblement longs que je leur ai réservés. La seconde partie leur plaît plus, puisque la plupart du vocabulaire anglais sur les repères, ayant des racines latines, est très proche du vocabulaire français. Pendant l'exploitation des différentes courbes, j'ai le temps de donner oralement du vocabulaire sur la croissance et la comparaison de nombres et de fonctions, ainsi que du vocabulaire de position (au-dessus, avant, tout à gauche, etc.). Le travail donné pour la fois suivante est de finir l'activité, que ma collègue a vue avant la séance et qu'elle corrigera.

Il était primordial de préparer des polycopiés pour que les élèves aient le moins possible de choses à écrire, et puissent avoir le temps de s'exprimer oralement. Une activité d'échanges sur les températures aurait pu être également intéressante : diviser la classe en deux groupes, leur donner le même cours théorique sur les repères mais des données différentes, et une fois les courbes tracées, leur faire décrire leur courbe aux élèves de l'autre groupe, ce qui permettait de réinvestir le vocabulaire vu précédemment. Mais pour ma première séance en classe européenne, j'ai opté pour la prudence avec une activité que je pouvais contrôler de bout en bout et où je pouvais laisser la parole quand bon me semblait. J'ai eu la chance d'avoir des élèves intéressés qui sont un peu sortis de leur mutisme – je comprends les plaintes de nos collègues linguistes ! – et qui se sont attelés à la tâche laborieusement ; le travail de tracé des courbes a d'ailleurs servi à certains de prétexte pour ne pas participer à l'oral. A ce titre, la première partie sur la numération a mieux rempli son office. Mais les notions mathématiques abordées dans la partie graphique sont plus intéressantes et les ont plus intéressés.

Writing and spelling numbers in English

A number is composed of ***digits*** that are .... The place of these digits set the value of the number: our system is a ***positional system*** or *place value notation.*

Write these numbers with words:
1 : ....10 : .... 100 : .... 1 000 : ....

When a number has more than 3 digits, you can use a ***comma*** to split the number into groups of 3 digits: 10,000 ; 7,546,931; 145,000,121, ... This is a widespread convention in English-speaking countries (except South Africa).

Write these numbers with words:
10,000 : ....   100,000 : ....
1,000,000 : ....

To name numbers, English-speaking countries use the *short scale system*, based upon a one thousand unit. To put it briefly, **the number 1,000,000,000 is read *one billion*, the number 1,000,000,000,000 is read *one trillion, and so on*** (you multiply by one thousand each time you move up one unit in the scale of numbers).

The system in use in France is called the *long scale system*, and is based upon a one million unit.

Write these numbers with words :

546,121: ....

27,889,126 : ....

1,002,430,291 : ....

2,000,000,000,030 : ....

Note : these names are mostly used in a scientific context; in everyday life, and in economics in particular, 1,000,000,000,000 is read *one thousand billion*, as we often do in France.

A number has an integer part and a decimal part: to separate the two, most English-speaking countries use a ***dot or period***. Thus, a price of two and a half euros will be written .... €.

Names of digit places :

6,047,891.325

....
....
....

Drawing a curve – functions

Below is a *table* with the average temperatures of three cities: Moscow, Bangkok and Buenos Aires.

	Average Temperature	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	Jun.
Moscow	5.3	-7.5	-6.7	-1.4	6.4	12.8	17.1
Bangkok	28.5	26.7	28.2	29.5	30.5	30.0	29.5
Buenos Aires	17.7	24.6	23.3	21.7	17.7	14.6	11.5

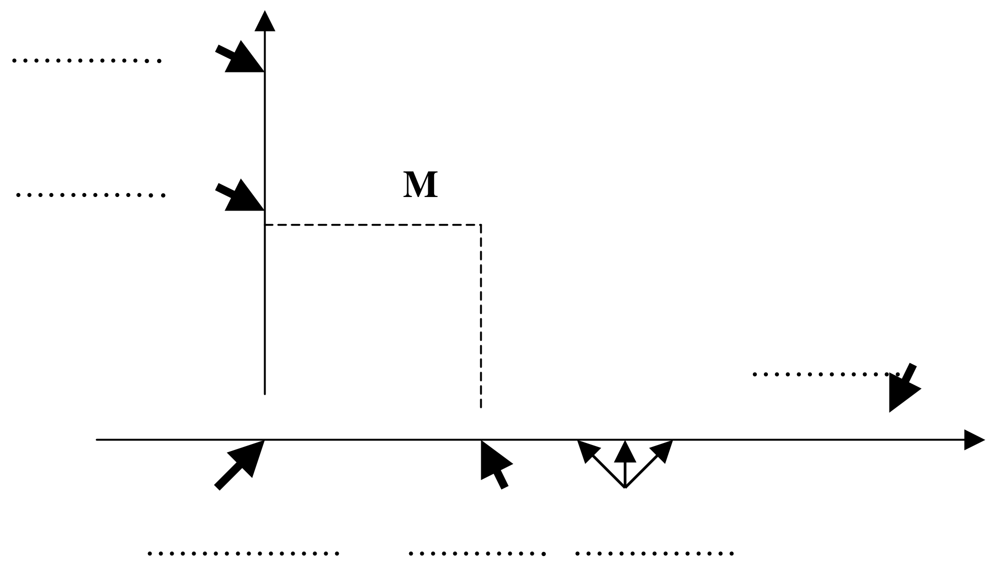
	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Moscow	18.4	16.5	10.8	5.0	-1.6	-5.5
Bangkok	29.1	28.8	28.5	28.2	27.4	26.2
Buenos Aires	11.1	12.6	14.5	17.5	20.2	23.4

(source: Rika Nempyo - Chronological Scientific Tables – from http://web-japan.org/stat/stats/01CEN15.html)

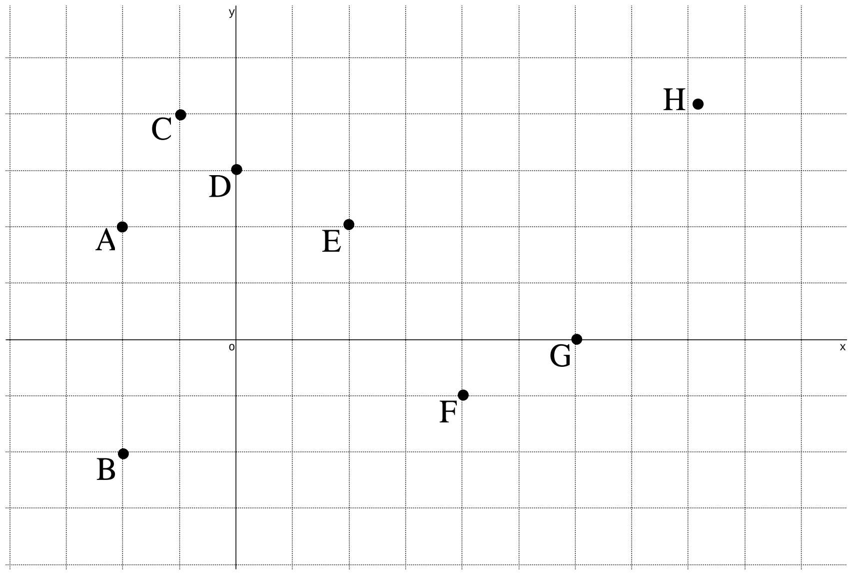
We will draw a *curve* of temperatures for each city.

I. Coordinates

In an *orthonormal basis,* a *point* can be located by its …………………….. These are two numbers which control its horizontal position (the ……………………….) and its vertical position (the ……………………….). We can read them on the *x-axis* and the *y-axis*.

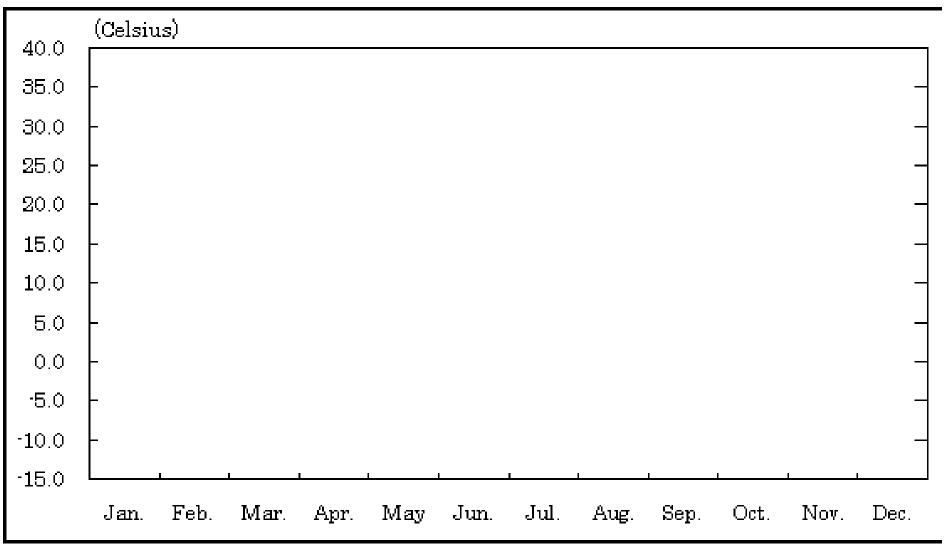


Exercise : find the coordinates of the following points:



II. Curves

Use the table to draw the temperature curves for each city below: plot 12 points for each, and link them with a curved line. Use a different colour for each city.



1) Which city has the highest temperatures? Which city has the lowest temperatures?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Find the highest and lowest temperatures for each city.

Moscow:...................... Bangkok:........................... Buenos Aires: ....

3) What can you say about Bangkok's curve? Is it the same for Moscow?
....
....

4) What can you say about the temperatures of Buenos Aires?
....
....

Les solutions seront données dans un prochain numéro.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Sylvie LANAUD
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
0411 B 07793

DEPOT LEGAL :
n° 179 – 1er semestre 2007

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem