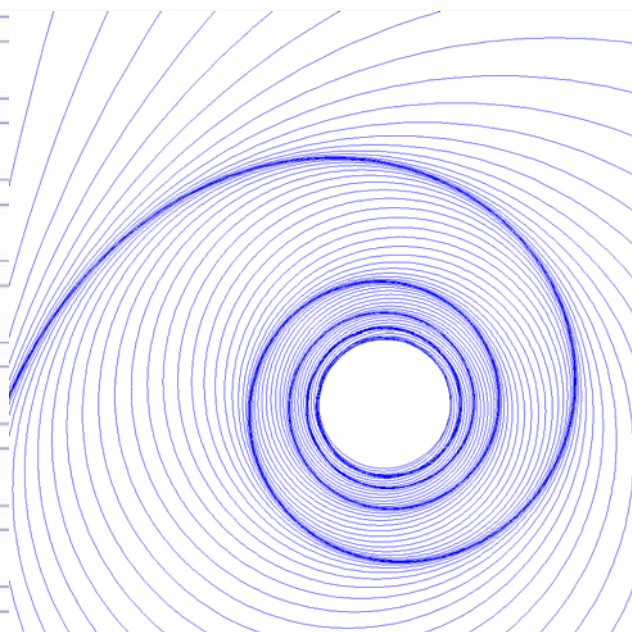


# *Feuille de Vigne*

*Irem de Dijon*

✓ *File la laine, filent les jours... Filent les routes... et filent les tortues ! ou comment rencontrer une clothoïde*

✓ *Effet de levier : comment gagner plus en investissant moins ?*



© *Irem de Dijon – 2011*

# *Sommaire*

---

✓ Agenda	1
✓ Jeux et Problèmes	3

## *Articles*

✓ File la laine, filent les jours... Filent les routes... et filent les tortues ! ou comment rencontrer une clothoïde	<i>Alain MASCRET</i>	5
✓ Effet de levier : comment gagner plus en investissant moins ?	<i>Jean-Marie THOMASSIN</i>	15

# Éditorial

---

Enchanté,

Bien sûr, je le suis d'être amené à écrire l'édito de cette 119<sup>e</sup> Feuille de Vigne après quelques temps d'absence. Mais je l'ai été surtout par le charme des magiciens mathématiciens qui présentent leurs numéros :

- Dans ses jeux et problèmes, M. Lafond vous propose un jeu arithmétique et un problème de géométrie. Quant à moi je vous suggère :

Pour ce qui est du jeu,

la méthode de l'informaticien, produire un programme et laisser travailler l'ordinateur ;

la méthode du sondeur, enquêter au cas par cas auprès des quelques  $6 \times 10^9$  d'êtres humains qui peuplent notre planète, en laissant les 4 milliards de cas restant pour quelques extraterrestres ;

la méthode du matheux, réfléchir un peu bien installé dans son fauteuil.

Pour ce qui est du problème,

la méthode du physicien qui consiste à changer d'unité (peser pour mesurer) : découper dans une taule d'épaisseur uniforme la figure plongée dans deux récipients pleins d'eau chacun des deux triangles puis peser l'eau qui a respectivement débordé ;

la méthode du matheux, réfléchir allongé sur notre plage préférée, rafraîchi par le souffle d'un éventail exotique en plumes de paon authentiques.

- La clothoïde de A. Mascret, vous la trouverez au coin de la rue puis, suite à une erreur d'aiguillage, la voilà qui réapparaît pour finir en apothéose, plumes de paon qui fait la roue en couverture de ce numéro. Seul le chatoiement des couleurs y manque, faute de sous, euh d'euros, sans doute, pauvre IREM désargenté.

- Mais suivez J.M. Thomassin, et vous verrez avec l'effet levier, on pourra peut-être en redresser les finances, celles dont J.F. Mugnier nous avait fait prendre conscience dans le précédent edito, que depuis quelques années elles s'étaient fortement dégradées.

Mais j'y pense, et sans vouloir justifier le financier, la part de l'effet massue n'est évoquée qu'en fin de ce dernier article et je suis sûr que prochainement une feuille de vigne suivra qui le prendra en compte en vous guidant dans les arcanes des probabilités et du risque modélisé.

Bon vent à vous tous et pensez à emporter cette feuille avec vous sur la plage car je crains que la suivante prévue pour avant l'été ne vous parvienne finalement que à la saison des feuilles mortes.

Longue vie à la feuille de vigne et à notre IREM préféré.

Patrick GABRIEL

# *Agenda*

---

Rallye mathématique des collèges (21 & 71)

Voir les comptes rendus sur le site : <http://rallyemath.u-bourgogne.fr/>

---

Rallye mathématique des lycées de Bourgogne

Voir les comptes rendus sur le site :  
<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/RallyeLycees.html>

---

Le jeudi 5 ou le mercredi 25 mai 2011, de 9h à 15h30, journée d'activité  
*"Mathématiques et Art"*

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/>

---

Le jeudi 19 mai 2011, de 9h15 à 17h,  
stage *"Mathématique et Histoire des arts"*

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/>

---

Du 22 au 24 juin 2011, l'IREM organise à l'IUFM départemental le  
colloque international de la Commission Inter-IREM COPIRELEM  
sur le thème

*"Faire des mathématiques à l'école :  
de l'activité de l'élève à la formation des enseignants"*

Voir le site pour tout renseignement : <http://www.colloquecopirelem.fr/>

---



# Jeux et Problèmes

---

Michel LAFOND  
mlafond001@yahoo.fr

## JEU - 69.

Réaliser l'égalité  $a^b \times c^d \times e^f = g^h \times i^j$ , sachant que  
 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

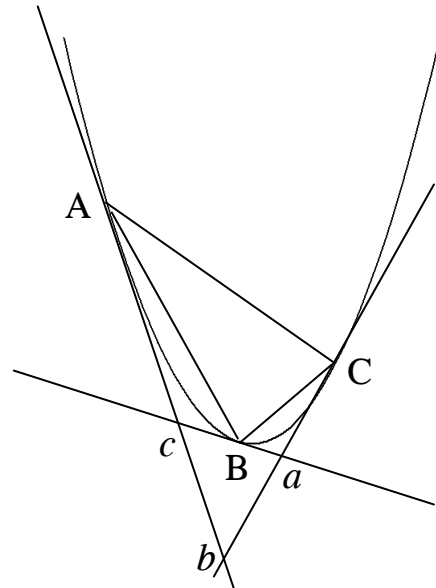
## PROBLÈME - 69.

Étant données trois tangentes à une parabole, A, B, C sont les points de contact.

(voir figure ci-contre).

Démontrer que :

$$\text{Aire (ABC)} = 2 \text{ Aire (abc)}.$$



---

## Solutions

## JEU - 68.

Soient :

$$A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$B = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

A-t-on  $A = B$  ?

*Solution :*

La réponse est oui avec la calculette, et rigoureusement :

On pose  $a = \sqrt{11+2\sqrt{29}}$  et  $\bar{a} = \sqrt{11-2\sqrt{29}}$

On a :  $\bar{a}^2 = 11-2\sqrt{29}$  d'où  $16-2\sqrt{29} = \bar{a}^2 + 5$

Donc  $B = a + \sqrt{\bar{a} + 5 + 2\sqrt{5}\bar{a}} = a + \sqrt{(\sqrt{5} + \bar{a})^2} = a + \bar{a} + \sqrt{5}$

$$B = \sqrt{5} + \sqrt{(a + \bar{a})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{a^2 + \bar{a}^2 + 2a\bar{a}}$$

Mais  $a^2 + \bar{a}^2 = 22$  et  $a\bar{a} = \sqrt{5}$  donc  $B = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} = A$ .

### PROBLÈME - 68.

Démontrer que si  $p$  est un nombre premier, alors la partie entière de  $\frac{(p-1)!}{p}$  est paire.

*Solution :*

On sait que  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ . C'est le théorème de Wilson.

Cela prouve que  $k = \frac{(p-1)! + 1}{p}$  est un entier.

Si  $p = 2, k = 1$

Si  $p > 2, p$  est impair alors que  $(p-1)!$  est pair.  $k$  est encore impair comme son numérateur.

Et pour finir, en notant  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$ ,  $k = \frac{(p-1)! + 1}{p}$  peut s'écrire

$(p-1)! = kp - 1$  donc :

$$\left\lfloor \frac{(p-1)!}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kp - 1}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k - \frac{1}{p} \right\rfloor = k - 1 \text{ qui est pair. CQFD.}$$



# *File la laine, filent les jours...*

## *Filent les routes... et filent les tortues !*

### *ou comment rencontrer une clothoïde*

---

*Alain MASCRET, collègue la Champagne, Gevrey-Chambertin*

*Résumé* : La clothoïde est une solution trouvée pour raccorder des lignes de chemin de fer ou des portions de route afin d'éviter des problèmes d'accélération ou de décélération brutale dans les virages.

Les élèves d'un club informatique de collège rencontrent par hasard une clothoïde et d'autres courbes apparentées. Ils cherchent à expliquer les phénomènes observés.

*Mots clés* : Clothoïde ; raccordement ; langage *logo* ; représentation des courbes en informatique ; motivation à la recherche.

Le 25 novembre dernier, Xavier Lefort, professeur à l'IUT de Saint Nazaire est venu à l'IREM parler de la façon de dessiner les virages des voies de chemin de fer. Le principal problème qui se pose, en supposant la voie sur un plan horizontal, provient de ce que l'accélération normale d'un mobile est proportionnelle à la courbure de sa trajectoire.

Essayons de raccorder deux tronçons rectilignes par un arc de cercle (Figure 1). La courbure est nulle sur la première droite, passe brutalement à la courbure du cercle au point de raccordement et redevient, tout aussi brutalement, nulle au deuxième point de raccordement. Il s'en suit des désagréments pour le voyageur, pouvant aller, si la vitesse est suffisante, jusqu'au déraillement du train, l'accélération normale d'un mobile étant également proportionnelle au carré de sa vitesse.

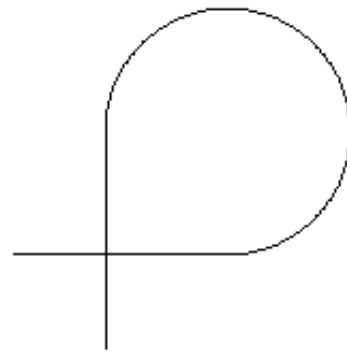


Figure 1

Il faut donc faire varier la courbure de la trajectoire de façon régulière. Une courbe dont la courbure est proportionnelle à l'abscisse curviligne ferait bien l'affaire. Cette courbe existe, c'est la clothoïde.

À titre d'exemple voici, figure 2, un virage à 270°, réalisé avec deux arcs de clothoïde. Ce tracé peut être utilisé dans un échangeur d'autoroute, le problème étant le même que pour les voies de chemin de fer.

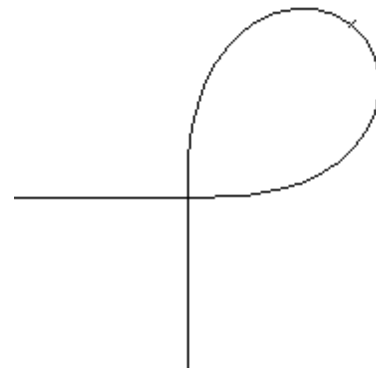


Figure 2

Dans la pratique, seuls les arcs de clothoïde sont utilisés mais, bien sûr, il est intéressant de voir à quoi ressemble la courbe complète.

En voici (figure 3) une représentation.

Elle possède un centre de symétrie qui est aussi son point d'inflexion. C'est en ce point que se font les raccordements puisqu'en ce point la courbure est nulle. En s'éloignant de ce point, la courbure augmente et tend vers l'infini. La courbe s'enroule indéfiniment autour de deux points asymptotes ce qui fait ressembler ses extrémités à deux pelotes de laine.

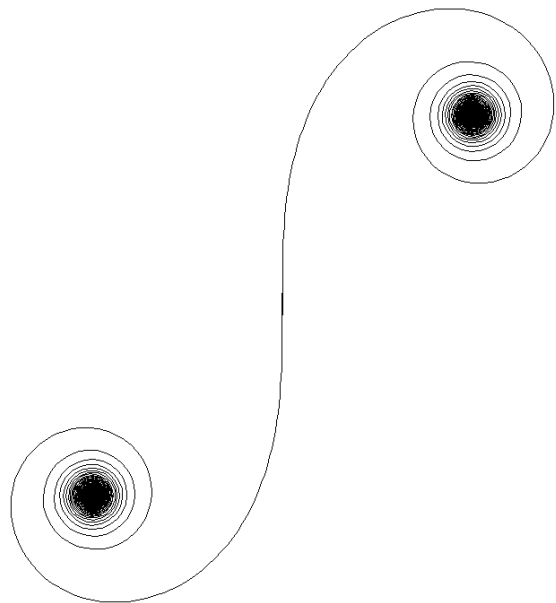


Figure 3

C'est de là que provient son nom. En effet, Clotho, *la fileuse*, était l'une des trois Moires de la mythologie grecque. Son rôle consistait à filer la vie des humains symbolisée par un fil. Elle présidait à leur naissance tandis que sa sœur Lachesis, *la destinée*, leur « dispensait les biens et les maux ». Quant à son autre sœur Atropos, *l'implacable*, elle coupait le fil le moment venu...

La conférence de Xavier Lefort m'a rappelé ma première rencontre avec une clothoïde et c'est ce dont je vais vous parler maintenant. Remontons le fil du temps, environ vingt ans en arrière. Nous sommes en club informatique. Les élèves utilisent le langage *logo* et veulent tracer un cercle.

Tout d'abord, présentons le langage *logo* en quelques mots.

Le *logo* permet, entre autre chose, de dessiner sur l'écran de l'ordinateur en pilotant une « tortue téléguidée » représentée par un petit triangle. La tortue est munie d'un crayon qu'on peut baisser ou lever. Si le crayon est levé, la tortue se déplace sans tracer.

Voici un minimum d'instructions de base pour comprendre la suite :

( :*n* désigne un nombre. Les deux points l'indiquent à *logo* )

```
av :n   La tortue avance de :n pas ( :n pixels ).
re :n   La tortue recule de :n pas.
tg :n   La tortue tourne à gauche de :n degrés.
td :n   La tortue tourne à droite de :n degrés.
lc       La tortue lève son crayon.
bc       La tortue baisse son crayon.
```

Programmer en *logo*, consiste à étendre le nombre d'instructions compréhensibles par la machine en utilisant l'instruction « pour ». En général, dès la première séance, un élève de sixième est capable de faire dessiner un rectangle à la tortue.

Pour rectangle

```
av 150   tg 90
av 50     tg 90   # Le dièse permet de commenter les
av 150   tg 90   # instructions si nécessaire.
av 50     tg 90   # Cette dernière instruction n'est pas
                  indispensable mais replace la tortue
                  dans sa position de départ.
```

fin

Au club informatique de mon collègue, les élèves voulaient pouvoir dessiner des cercles. Pour cela, l'idée est de faire avancer « un peu » la tortue puis de la faire tourner « un peu » et de recommencer. Ce qui nous donne :

Pour cercle1

```
av 1      # La tortue avance de 1 pas.
tg 1      # La tortue tourne à gauche de 1°.
cercle1   # La tortue refait la même chose.
```

fin

Il est tout à fait possible qu'une procédure s'appelle elle-même. Le langage *logo* accepte la récursivité. Les jeunes élèves aussi, à condition de ne pas leur dire que c'est difficile ! ... Bien sûr, il faut apprendre à l'utiliser. La procédure *cercle1* va boucler indéfiniment car elle n'a pas de test d'arrêt. Il faudra l'arrêter « à la main ».

À partir de cette idée, en utilisant des variables et en introduisant un test d'arrêt, les élèves vont tenter d'améliorer cette procédure qui deviendra par exemple :

```
Pour cercle2 :d :a :c      # :d, :a et :c sont des variables locales
si :c > 0                    # :c sert de compteur
  [av :d                     # pour le test d'arrêt.
  td :a                      # :c est décrémenté à chaque
  cercle2 :d :a :c - 1] # appel de la procédure cercle2
fin                          # qui se termine quand :c = 0.
```

Ce travail d'amélioration va se faire à travers de nombreux essais, chacun cherchant de son côté et comparant ses résultats à ceux de ses camarades. Toujours est-il que sur l'un des écrans, au grand étonnement des élèves et de leur professeur apparaît une clothoïde ! Que s'est-il passé ?

La question intéresse beaucoup les élèves qui trouvent cette spirale bizarre plus esthétique qu'un banal cercle et voudraient bien la dessiner sur leur écran. L'erreur est vite repérée, non pour la corriger, mais pour la reproduire ! Au lieu de conserver à la variable `:a` sa valeur quand il rappelle récursivement la procédure, l'élève lui a ajouté 1. Autrement dit, l'avant-dernière ligne de la procédure est devenue :

```
cercle2 :d :a + 1 :c - 1 ]
```

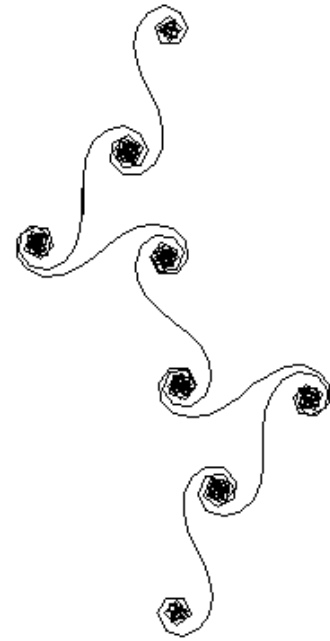


Figure 4 (spirale 10 1 7 720)

À chaque appel récursif de la procédure, la tortue tourne d'un angle plus grand, donc son virage est plus serré. C'est un peu comme si le « cercle » changeait à chaque étape, son rayon devenant de plus en plus petit. Plus étonnant encore, la tortue revient sur ses pas et passe indéfiniment d'une « pelote » à l'autre si la procédure n'a pas de test d'arrêt. C'est beaucoup plus motivant à dessiner qu'un cercle !

Aussi chacun se met-il à programmer sa spirale, en lui apportant sa petite touche personnelle, c'est-à-dire en ajoutant à la variable `:a` un autre nombre que 1. Si nous avons bien compris, nous allons obtenir des spirales plus ou moins grandes ou plus ou moins serrées. Mais ce n'est pas du tout ce qui apparaît ! Par exemple, en ajoutant 7, le dessin obtenu est celui de la figure 4, qui comporte 8 « pelotes » !

Aussitôt les élèves se mettent à la recherche de figures toutes plus étonnantes les unes que les autres. Pour faciliter cette recherche, nous ajoutons une nouvelle variable `:k` correspondant à la valeur ajoutée à l'angle `:a` à chaque appel de la procédure.

Celle-ci devient :

```
Pour spirale :d :a :k :c
  si :c > 0
    [av :d
     td :a
     spirale :d :a +:k :k :c - 1]
```

fin

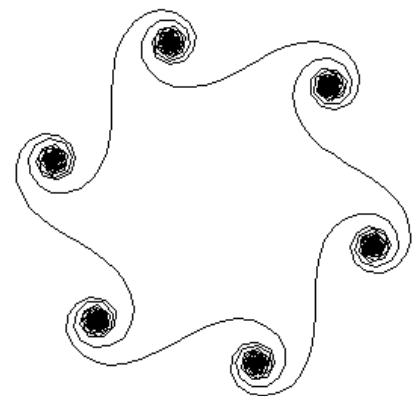


Figure 5 (spirale 10 1 3 720)

Il est possible de classer les formes qui apparaissent sur les écrans. Nous retrouvons, bien sûr, les cercles pour  $k=0$  et les clothoïdes pour  $k=1$ . Parfois le motif est cyclique, comme sur la figure 5 ou périodique comme sur la figure 6. Nous comprenons bien que ces différentes formes dépendent des variables  $a$  et  $k$ , mais la façon dont elles en dépendent nous paraît mystérieuse. Il va falloir examiner de plus près ce qui se passe et reprendre notre étude depuis le début.

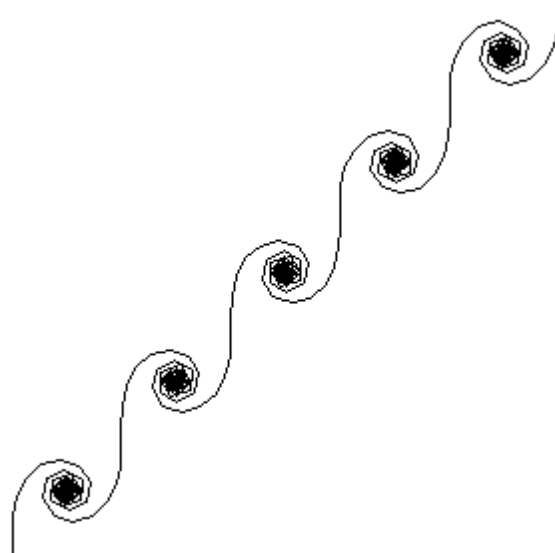


Figure 6 (spirale 10 3 6 720)

Repartons de notre procédure `cercle2` et examinons ce qu'elle trace vraiment. L'appel `cercle2 1 1 360`, par exemple, demande à la tortue de faire un pas et de tourner à droite et de répéter cette opération 360 fois. La tortue a donc tracé, non pas un cercle, mais un polygone de 360 côtés. La preuve en image (figure 7) : `cercle2 100 72 5` trace un polygone régulier de 5 côtés de longueur 100. La tortue revient à sa position de départ après avoir tourné de  $5 \times 72^\circ$ .

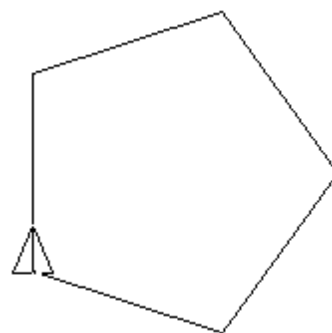


Figure 7 (cercle2 100 72 5)

Ceci n'est pas spécial à *logo*, tous les logiciels de dessins sur ordinateur font de même car les « points » des écrans sont des pixels et sont en nombre fini. S'ils sont assez nombreux, notre œil est trompé. Sur les figures qui illustrent cet article les pixels sont nettement visibles.

Revenons à notre clothoïde, elle possède deux points asymptotes, les centres des « pelotes ». Ce qui veut dire qu'elle se rapproche indéfiniment de ces points sans les atteindre. En ce qui concerne notre représentation, la tortue fait des pas de longueur constante quelle que soit sa proximité des points asymptotes. Finalement ce que trace la tortue n'est pas plus une clothoïde qu'un polygone régulier n'est un cercle ! Tant que la tortue est suffisamment loin des points asymptotes, notre représentation est acceptable, comme celle du cercle. Mais auprès de ces points c'est différent. D'ailleurs sur la figure 2, on voit seulement deux taches noires qui ne nous renseignent guère sur le comportement de la tortue en ces points.

Pour mieux voir, faisons comme pour le cercle, augmentons la longueur du segment tracé et la valeur de l'angle  $:a$  dont tourne la tortue à chaque appel récursif comme sur la figure 8 qui correspond à l'appel : spirale 50 0 15 48. La pelote se réduit sur cette figure à quelques segments.

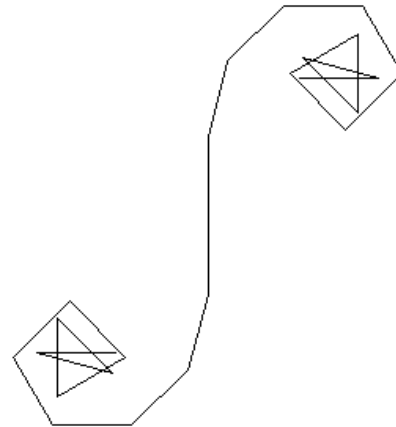


figure 8 (spirale 50 0 15 48)

Au douzième appel récursif, la tortue s'apprête à tracer un trait horizontal (figure 9). À la douzième étape, l'angle  $:a$  vaut  $12 \times 15^\circ = 180^\circ$ . Au treizième appel, le trait horizontal sera tracé et la tortue va faire demi-tour (figure 10). Elle va donc maintenant parcourir à nouveau les segments qu'elle a tracés, mais dans l'autre sens car tourner à droite de  $:a^\circ$  revient à tourner à gauche de  $(180 - :a)^\circ$ .

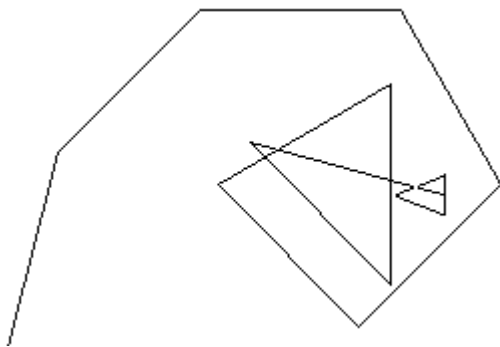


Figure 9 (spirale 100 0 15 12)

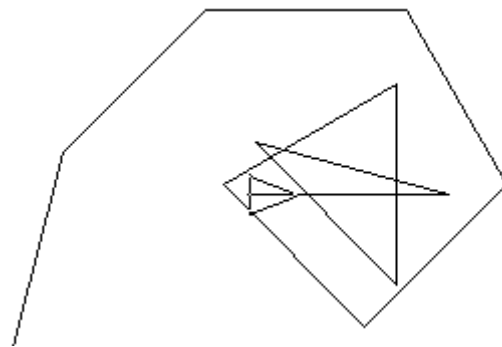


Figure 10 (spirale 100 0 15 13)

Bien entendu, si l'angle  $:a$  n'atteint jamais un multiple de  $180^\circ$ , d'autres phénomènes se produiront.

La figure 11 présente un motif périodique obtenu par l'appel : spirale 50 10 20 54. La tortue commence par tourner de  $10^\circ$ , puis à chaque étape de  $20^\circ$  de plus. À la neuvième étape, elle tourne à droite de :

$$10^\circ + 8 \times 20^\circ = 170^\circ$$

et à la dixième étape de :

$$10^\circ + 9 \times 20^\circ = 190^\circ,$$

c'est-à-dire de  $170^\circ$  à gauche. Elle va donc tracer un chemin symétrique de celui qu'elle a parcouru, par rapport au milieu du dixième segment.

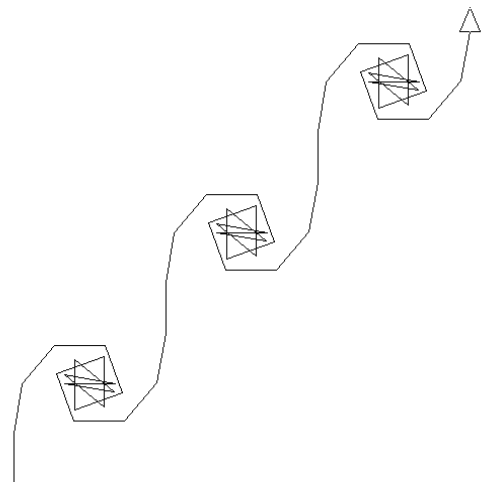


Figure 11 (spirale 50 10 20 54)

À la dix-neuvième étape, elle passera par le symétrique de son point de départ et tout pourra recommencer comme le montre la figure 12. Le tracé sera donc périodique. Si la tortue ne s'arrêtait pas, elle dessinerait une frise. En effet, la figure comporte deux centres de symétrie distincts : les milieux des dixième et dix-neuvième segments. (Pour avoir la frise complète, il suffit de faire reculer la tortue à partir de son point de départ, le milieu du premier segment est aussi un centre de symétrie).

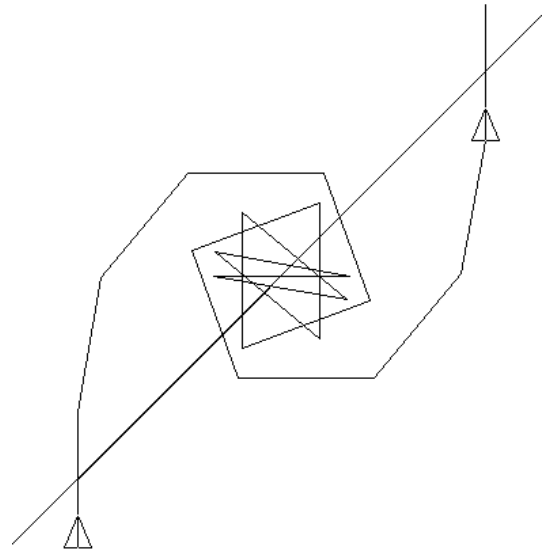


Figure 12 (spirale 100 10 20 19)

Examinons maintenant le cas d'un tracé cyclique comme celui de la figure 13 correspondant à l'appel : spirale 50 10 30 72. Après avoir dessiné six pelotes, la tortue revient à sa position de départ et tout recommence.

À la  $n^{\text{ième}}$  étape, la tortue tourne de  $10n + 30(n-1)$  modulo 360. Depuis son départ, elle a tourné de  $10n + 30 \frac{(n-1)n}{2}$  modulo 360. Ce dernier nombre est appelé cap de la tortue par *logo* et peut lui être demandé par la commande « cap ».

À la sixième étape la tortue tourne de  $160^\circ$  et à la septième étape de  $190^\circ$ , c'est-à-dire qu'elle commence à dérouler la première pelote, puisque  $:a$  vient de dépasser pour la première fois  $180^\circ$ .

À la douzième étape elle tourne de  $340^\circ$  et à la treizième étape de  $370^\circ$ , c'est-à-dire que  $:a$  dépasse  $360^\circ$  pour la première fois. Elle se trouve alors à mi-chemin entre deux pelotes. Son cap est de  $300^\circ$ , ce qui revient à dire qu'elle a tourné de  $60^\circ$  vers la gauche.

En répétant six fois ce processus, la tortue va arriver à sa soixante-douzième étape avec un cap de  $0^\circ$  et prête à tourner de  $10^\circ$ , comme au départ.

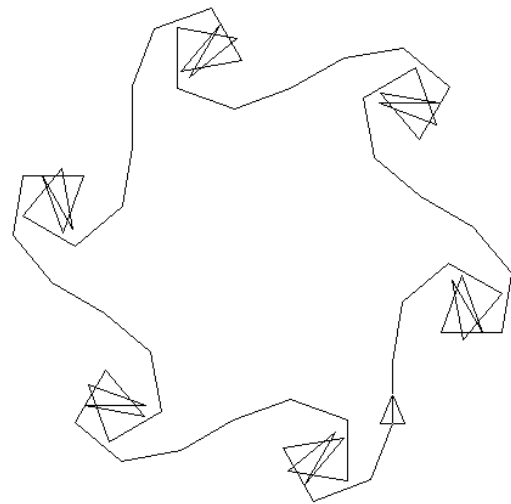


Figure 13 (spirale 50 10 30 72)

Il est possible d'expliquer de la même façon les motifs étranges comme ceux de la figure 3. Toutes les fois que  $:a$  dépasse  $180^\circ$  ou un multiple impair de  $180^\circ$ , la tortue

commence à sortir de la pelote qu'elle était en train de tracer. Toutes les fois que  $a$  dépasse un multiple de  $360^\circ$ , la tortue se trouve à mi-chemin entre deux pelotes. La tortue revient sur ses pas quand  $a$  est un multiple impair de  $180^\circ$ .

Les élèves du club informatique n'ont pas forcément trouvé ce que je viens d'exposer, mais je peux dire qu'ils ont cherché, parce que les dessins obtenus leur posaient un problème concret. Il fallait tenter d'expliquer pourquoi les formes étaient si différentes. Ils ont procédé expérimentalement, par essai et erreur. J'entendais des phrases du genre : « Si j'ai bien compris je devrais avoir 6 pelotes.... » et peu de temps après « Et bien non ! Je n'en ai que trois ! ». L'essentiel pour moi est qu'ils aient cherché et surtout qu'ils aient ressenti le besoin de chercher une explication. D'autre part, il est assez facile de modifier les procédures pour qu'en plus du dessin, elles nous donnent des informations sur la position et le cap de la tortue. De cette façon le langage *logo* aide les élèves à résoudre les problèmes qu'ils se posent.

Si vous voulez, vous aussi, voir se créer sous vos yeux les figures de cet article et faire, comme mes élèves du club informatique, vos propres expériences, je vous invite à venir sur le site [geowiki.u-bourgogne.fr](http://geowiki.u-bourgogne.fr). La page correspondante sera prête début mai 2011.

Examinons maintenant comment varie la courbure de la clothoïde. À chaque étape, il est possible de demander à la tortue de tracer le cercle qui a la même courbure et qui lui est tangent. Ce cercle s'appelle le cercle osculateur. Bien entendu, la tortue ne trace que des approximations de la clothoïde et de ses cercles osculateurs.

Comme d'habitude, pour mieux voir ce qui se passe, il faut lui faire tracer des segments assez longs et choisir un angle  $a$  assez grand. Sur la figure 14,  $a$  vaut, au départ,  $10^\circ$  et tous les segments tracés ont une longueur de 100 pas de tortue.

Pour obtenir un cercle de même courbure que la clothoïde, je fais tourner la tortue de l'angle  $a$  après chaque tracé d'un segment, jusqu'à ce qu'elle ait fait un tour complet. Comme  $a$  augmente à chaque étape, le nombre de segments diminue et mes cercles sont de moins en moins beaux. De cette façon, la figure obtenue est assez grossière mais l'approximation du cercle et celle de la clothoïde sont les mêmes.

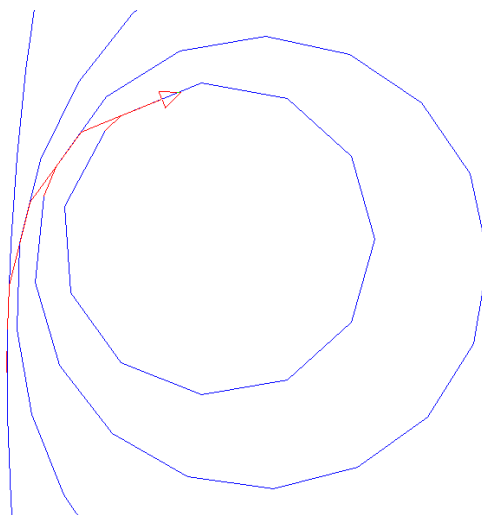


Figure 14

En se limitant à quatre cercles comme sur la figure 14, il est possible d'observer quelques propriétés des cercles osculateurs : ils sont tous deux à deux disjoints et la

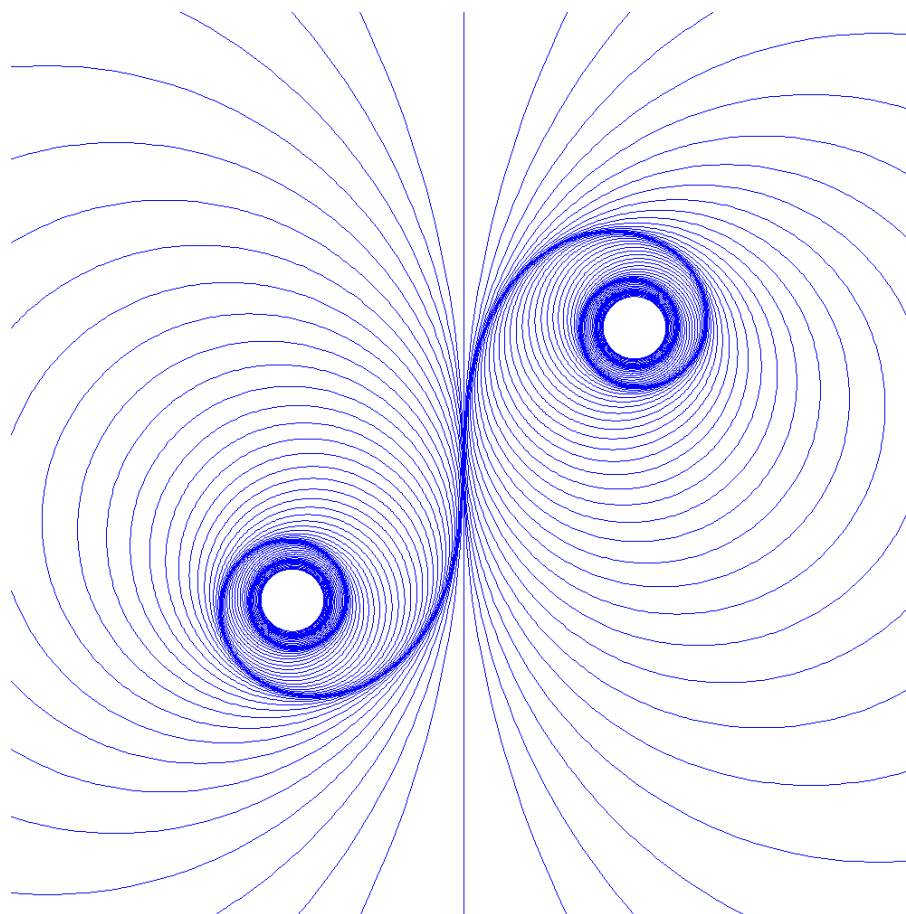


courbe les traverse au point de contact puisque ce contact est d'ordre trois comme pour la tangente en un point d'inflexion.

Pour rendre bien visible ce phénomène, j'ai fait en sorte que les cercles soient « tangents » au milieu de chaque segment de la « courbe ». La tortue avance de 50 pas, trace le cercle et termine ensuite le segment. Le segment de la « courbe » a donc une partie commune avec le « segment » du cercle, ce qui exprime, à la manière de *logo* le fait que le « cercle » est tangent à la « clothoïde ». Mais ces deux segments sont décalés. En conséquence, avant le point de contact, la courbe est à l'extérieur du cercle, tandis qu'après elle est à l'intérieur.

Pour améliorer la qualité de la figure, j'ai demandé à la tortue de tourner seulement de un demi-degré et d'adapter le segment qu'elle trace pour que la longueur du cercle tracé soit la même qu'avec la méthode précédente. De cette façon, le rayon du cercle est conservé mais son tracé est bien meilleur.

Le résultat devient nettement plus esthétique. Sur la couverture de ce numéro de la Feuille de Vigne, ainsi que sur la figure 15, la clothoïde n'est même pas tracée. Elle est cependant visible comme enveloppe de ses cercles osculateurs. J'ai arrêté la tortue bien avant les points asymptotes pour éviter les taches, encore plus gênantes que sur la figure 3.



N'oublions pas cependant qu'il ne s'agit, comme toujours, que d'une approximation. D'ailleurs, les cercles ne sont pas totalement lisses, ça se voit encore. Et même s'ils semblaient parfaits, il ne s'agirait que d'une meilleure approximation. Les logiciels de géométrie nous aident, mais nous devons essayer de comprendre leur façon de fonctionner. Sinon, nous risquons facilement de confondre le modèle informatique et la réalité.

### ***Bibliographie - Sitographie :***

Sur le langage logo, les livres de son concepteur Seymour Papert , en particulier :

- Jaillissement de l'esprit. Ordinateurs et apprentissage, Flammarion, 1981.
- L'enfant et la machine à connaître. Repenser l'école à l'ère de l'ordinateur, Dunod, 1994.
- Harold Abelson et Andrea diSessa : Turtle geometry : The computer as Medium for Exploring Mathematics, The MIT Press Series in Artificial Intelligence, Cambridge, Massachusett ; London, England, 1981 (À ma connaissance, toujours non traduit en français).

Sur la géométrie :

- Marcel Berger : Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob, Cassini, 2009. (Vous y trouverez une très jolie figure analogue à la figure 15, page 316. Elle est due à Étienne Ghys. Le livre parle de beaucoup d'autres choses de façon très intéressante).

Sur internet :

Les différentes versions actuelles du langage *logo*

Sur le site du groupe « logiciels de géométrie » de l'IREM de Dijon vous trouverez trois versions de ce langage, toutes libres et téléchargeables gratuitement ([geowiki.u-bourgogne.fr](http://geowiki.u-bourgogne.fr)). Personnellement, j'utilise avec mes élèves *Xlogo* qui est écrit en *java*. Il est donc possible d'une part de s'en servir sans rien installer sur son ordinateur, d'autre part de l'intégrer à un site. Toutes les figures de cet article ont été programmées dans ce langage (sans utiliser la primitive *cercle* que les vieux logos n'avaient pas). Son auteur est Loïc Le Coq qui en assure aussi la maintenance et a écrit un manuel de référence en ligne, lisible et muni d'un index bien pratique.

De nombreux sites vous proposent de vous guider dans l'apprentissage de *logo*. Je me contenterai de vous inviter à venir sur [geowiki.u-bourgogne.fr](http://geowiki.u-bourgogne.fr) et de poser vos questions aux membres du groupe. Il suffit pour cela de vous enregistrer.

Sur la clothoïde :

Vous verrez une animation montrant l'accélération normale de deux mobiles dans le cas d'un raccord droite-cercle et d'un raccord droite-clothoïde sur la page :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/clotho.html>

Le site contient de nombreuses animations illustrant des lois physiques.

Pour les propriétés mathématiques voir :

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/cornu/cornu.shtml>

Le site mathcurve est une véritable encyclopédie des courbes ! Il est dû à Robert Ferreol. La clothoïde est aussi appelée spirale de Cornu en mémoire du physicien français Alfred Cornu qui s'en servait pour calculer les intégrales de Fresnel. (Je précise, car un de mes élèves pensait que le nom de cette courbe provenait de sa forme qui rappelle une cornue !).

# *Effet de levier*

## *Comment gagner plus en investissant moins ?*

---

*Jean-Marie Thomassin, Lycée Carnot à Dijon*

*Résumé* : Par le biais d'un emprunt, un investisseur peut augmenter de manière importante, voire spectaculaire, le taux de rentabilité de son apport personnel. Ce processus, appelé effet de levier, décrit mathématiquement dans cet article, est souvent mis en œuvre dans des opérations spéculativement attirantes par les hauts rendements attendus.

*Mots clés* : effet de levier ; économie ; modélisation ; fonction ; fonction inverse ; fonction homographique ; quotient ; taux d'intérêt ; rentabilité ; profit ; pourcentages.

*Remarque préliminaire* : un des arguments essentiels mis en valeur par un banquier ou une société recherchant à lever des fonds est le taux d'intérêt (c'est-à-dire la rentabilité) que le client peut espérer du placement proposé. On considèrera donc, dans ce texte, que "gagner plus", c'est augmenter cette rentabilité.

Lorsqu'un acteur économique apporte un capital financier dans une opération à réaliser, il attend en retour un revenu pour le capital investi (c'est-à-dire des intérêts) que l'on appellera rentabilité financière. Lorsqu'une opération est réalisée, le plan de financement de cette opération peut soit ne prévoir que des fonds propres aux investisseurs (ou à l'entreprise) soit comporter une part de financement réalisée par des emprunts. On se propose, dans ce qui suit, d'analyser comment cette dernière part permet d'augmenter la rentabilité des fonds propres consacrés à cet investissement, la rentabilité étant calculée en pourcentage de ces fonds propres. C'est l'effet de levier.

### *I. Étude d'un exemple*

L'étude étant faite pour un même période de référence, quelle que soit la solution choisie, il ne sera pas fait mention de cette période, ce qui évitera des calculs d'intérêts composés qui n'enrichiraient pas l'exemple (si de tels calculs sont nécessaires, ils sont supposés avoir été faits préalablement).

#### *1. L'opération à financer*

Un acteur économique souhaite réaliser une opération d'investissement dans un actif nécessitant la somme de 100 000€ ; il en étudie le mode de financement. Il

espère obtenir, pour cet investissement, pour la période de référence, un revenu net égal à 8% de cette somme, c'est-à-dire 8 000€(dont il pourra disposer à sa guise). On parle, pour cette somme, de rentabilité économique (notée  $R_e$ ). Sur la même période, il peut obtenir un prêt au taux de 3%.

Il reste à trouver les 100 000€ Une part de cette somme sera réalisée par des apports en capitaux (ce sont les fonds propres apportés par l'investisseur), le reste sera financé par un emprunt. Les intérêts de cet emprunt seront déduits du revenu économique de l'investissement et le reste de ces 8 000€ sera consacré à la rémunération des capitaux propres investis dans l'opération.

La situation à étudier		
Somme nécessaire		100 000€
Rentabilité économique $R_e$	8%	8 000€
Taux de l'emprunt éventuel	3%	

### Exemples d'opérations :

- Achat d'une machine
- Achat d'un bien meuble ou immeuble nécessaire à l'entreprise
- Achat en bourse (actions, obligations, produits financiers, produits dérivés....)
- Achat spéculatif
- Achat d'une entreprise "faible" mais à fort potentiel.

### 2. Cas où l'apport en capital est de 100%

Il faut donc trouver des investisseurs apportant l'ensemble des 100 000€ nécessaires à l'opération. Le bénéfice, c'est-à-dire les 8 000€, revient intégralement aux investisseurs ; le rendement de cette opération est donc de 8%, il n'y a pas de miracle.

### 3. Cas où l'apport en capital est de 80%

Les investisseurs apportent donc, en capital, 80 000€ et les 20 000€ restant sont couverts par un emprunt au taux de 3%. Sur le revenu inchangé de 8 000€, il faut prélever les intérêts de cet emprunt, c'est-à-dire 600€. Il reste donc 7 400€ qui sont attribués aux investisseurs. Mais ceux-ci n'ont investi que 80 000€ et ils ont reçu la somme de 7 400€; le taux de rémunération réel des fonds propres n'est plus de 8% mais de  $7400 \times 100 / 80\ 000$  soit 9,25% ; il a augmenté, ce qui, pour les investisseurs, est intéressant ! (*Ils ont bénéficié d'une partie de la rémunération initiale de la part qu'ils n'ont pas apportée*)

## Résumé :

Opération à financer	Capital	100 000€	
	Rémunération	8 000€	8%
Part financée par l'emprunt	Somme	20 000€	20%
	Rémunération	600€	3%
Part financée en capital	Somme	80 000€	80%
	Rémunération	7 400€	9,25%

### 4. Cas où l'apport en capital est de 50%

Les investisseurs apportent donc, en capital, 50 000€ et les 50 000€ restant sont couverts par un emprunt au taux de 3%. Sur le revenu inchangé de 8 000€, il faut prélever les intérêts de cet emprunt, c'est-à-dire 1 500€. Il reste donc 6 500€ qui sont attribués aux investisseurs. Mais ceux-ci n'ont investi que 50 000€ et ont reçu la somme de 6 500€; le taux de rémunération réel des fonds propres n'est plus de 8% mais de  $6500 \times 100 / 50\ 000$  soit 13% ; il a encore augmenté, ce qui, pour les investisseurs, est de plus en plus intéressant ! (*Ils ont bénéficié d'une partie de la rémunération initiale de la part qu'ils n'ont pas apportée*)

### Résumé de la nouvelle situation financière :

Opération à financer	Capital	100 000€	
	Rémunération	8 000€	8%
Part financée par l'emprunt	Somme	50 000€	50%
	Rémunération	1 500€	3%
Part financée en capital	Somme	50 000€	50%
	Rémunération	6 500€	13%

### 5. Cas où l'apport en capital est de 20%

Les investisseurs apportent donc, en capital, 20 000€ et les 80 000€ restant sont couverts par un emprunt au taux de 3%. Sur le revenu inchangé de 8 000€, il faut prélever les intérêts de cet emprunt, c'est-à-dire 2 400€. Il reste donc 5 600€ qui sont attribués aux investisseurs. Mais ceux-ci n'ont investi que 20 000€ et ils ont reçu la somme de 5 600€; le taux de rémunération réel des fonds propres n'est plus de 8% mais de  $5600 \times 100 / 20\ 000$  soit 28% ; il a beaucoup augmenté, ce qui, pour les investisseurs est très intéressant ! (*Ils ont bénéficié d'une partie de la rémunération initiale de la part qu'ils n'ont pas apportée*)

### Résumé de la nouvelle situation financière :

Opération à financer	Capital	100 000€	
	Rémunération	8 000€	8%
Part financée par l'emprunt	Somme	80 000€	80%
	Rémunération	2 400€	3%
Part financée en capital	Somme	20 000€	20%
	Rémunération	5 600€	28%

#### 6. Cas où l'apport en capital est de 10%

Les investisseurs apportent donc, en capital, 10 000€ et les 90 000€ restant sont couverts par un emprunt au taux de 3%. Sur le revenu inchangé de 8 000€, il faut prélever les intérêts de cet emprunt, c'est-à-dire 2 700€. Il reste donc 5 300€ qui sont attribués aux investisseurs. Mais ceux-ci n'ont investi que 10 000€ et ils ont reçu la somme de 5 300€; le taux de rémunération réel des fonds propres n'est plus de 8% mais de  $5300 \times 100 / 10\,000$  soit 53%, ce qui, pour un investisseur un peu rapace est très intéressant !

### Résumé de la nouvelle situation financière :

Opération à financer	Capital	100 000€	
	Rémunération	8 000€	8%
Part financée par l'emprunt	Somme	90 000€	90%
	Rémunération	2 700€	3%
Part financée en capital	Somme	10 000€	10%
	Rémunération	5 300€	53%

#### 7. Récapitulation

Pour calculer la rentabilité financière de l'apport en capital qui a été effectivement réalisé par les investisseurs, on considère donc le revenu économique attendu de l'opération diminué des intérêts engendrés par l'emprunt réalisé ; cette somme sera le revenu attribué au capital investi en fonds propres ; on le compare à ce capital pour obtenir le taux de la rémunération financière ainsi dégagée. Les cas précédents sont résumés dans le tableau suivant :

Investissement à réaliser : 100 000€

Rémunération économique : 8%

Part en capital	Rémunération financière
100%	8%
80%	9,25%
50%	13%
20%	28%
10%	53%

On constate donc que, plus la part en capital investi est faible, plus la rémunération, en pourcentage du capital propre investi, est forte.

**Pour gagner plus, empruntez plus et faites travailler l'argent des ... autres.**

Autres exemples à proposer en exercice complémentaire : traiter le cas où la part en capital est de 5%, de 1%....

*Remarque* : On pourra éventuellement faire remarquer, par un calcul numérique simple, en ajoutant éventuellement une colonne au tableau précédent, que la rémunération brute perçue, quant à elle, sera décroissante (mais pour un apport personnel en diminution). Ce serait alors l'occasion pour les élèves d'observer la différence entre variation relative et variation absolue mais cela peut aussi nuire à l'objectif de l'activité qui est ici de maximaliser un taux d'intérêt.

## II. Modélisations

### 1. Modélisation de l'exemple précédent

On conserve les mêmes données : l'opération à réaliser nécessite 100 000€ le taux de rentabilité économique est de 8%, la rémunération de l'opération est donc de 8 000€. On veut déterminer le taux de rentabilité financière  $f(t)$  de l'investissement réalisé par un apport de  $t$  % (de la somme totale) en capital propre (ou capital initial), le reste de la somme nécessaire étant obtenue par un emprunt au taux de 3%.

Le capital propre investi est donc :  $1000t$ .

La somme empruntée à 3% est donc :  $1000(100 - t)$ .

La rémunération de cette somme est :  $30(100 - t)$ .

La rémunération du capital propre investi est donc :  $8000 - 30(100 - t) = 5000 + 30t$ .

Remarques : pour  $t = 100$ , on retrouve les 8000€ de la rentabilité économique, pour  $t > 0$ , on trouve une valeur inférieure à 8000€ mais à comparer à une mise en fonds propres inférieure à 100 000€ le maximum possible, et, pour  $t = 0$ , on peut quand même gagner 5000€.. (Ce dernier cas, peu moral, est souvent exclu par les réglementations). Dans toute la suite, on supposera :  $t > 0$ .

Le taux de rentabilité financière  $f(t)$  du capital réellement investi, exprimé en pourcentage de cet apport, est donc :

$$f(t) = \frac{5000 + 30t}{10t} = 3 + \frac{500}{t} \%$$

avec :  $0 < t \leq 100$ .

Pour  $t=0$ , le revenu est de 5000€ qu'on ne peut pas comparer à un capital inexistant...

Pour  $t=100$ , on retrouve le taux de 8%.

On a ainsi, sur l'intervalle  $]0 ; 100]$ , défini une fonction homographique  $f$  qui peut être facilement étudiée par les élèves, dès la classe de seconde. Elle est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0 ; 100]$  ; son minimum est donc  $f(100) = 8$ , ce qui est cohérent. Il n'y a pas de maximum mais cette dernière notion peut induire quelques remarques judicieuses. En dehors de cet intervalle, on peut mathématiquement l'étudier mais elle perd son sens économique ; on pourra, à ce sujet, faire une remarque sur les limites d'une modélisation mathématique.

On pourra construire et interpréter dans les termes du problème un tableau de valeurs pour cette fonction. Naturellement, une représentation graphique pourra illustrer le problème.

On pourra aussi, ayant fixé a priori un taux de rentabilité à atteindre, chercher la valeur de  $t$  correspondante et interpréter économiquement le résultat. En particulier, comment obtenir un taux de rentabilité de 100%, de 200% ?

On pourra de même, ayant fixé a priori un taux minimum de rentabilité à atteindre, chercher les valeurs de  $t$  correspondantes et interpréter économiquement le résultat.

On fera la liaison avec le cours d'économie qui, désormais, est destiné à tous les élèves de seconde.

## 2. Changement de capital

On a, dans ce qui précède, fait l'étude pour un montant particulier (100 000€) à financer ; on souhaite traiter le même problème dans un cadre un peu plus général où le montant de l'opération à financer est de  $K$ € ; les autres conditions sont inchangées :

**rémunération économique : 8% ; taux du prêt : 3%.**

On pourra proposer aux élèves de reprendre les calculs précédents avec d'autres capitaux, par exemple 700 000€ ou 1 200 000€ ; sans réécrire complètement ces calculs, on en fera apparaître les modifications. Les moyens modernes actuels peuvent faciliter ce genre d'activités.

On se propose, dans ce qui suit, de traiter le cas général où le capital à financer  $K$  a une valeur quelconque. On veut donc déterminer le taux de rentabilité financière  $f(t)$  de l'investissement réalisé par un apport en capital propre de  $t$  % de cette somme  $K$ , le reste de la somme nécessaire étant obtenue par un emprunt au taux de 3%.

Le capital investi est donc :  $C = 0,01tK$ .

La somme empruntée à 3% est donc :  $0,01(100 - t)K$ .



La rémunération à 3% de cette somme est :  $0,0003(100 - t)K$ .

La rémunération (économique) totale est :  $0,08K$ .

La rémunération du capital investi est :

$$R = 0,08K - 0,0003(100 - t)K = K(0,05 + 0,0003t).$$

Remarques : pour  $t = 100$ , on retrouve les  $0,08K$  € de la rentabilité économique, pour  $t > 0$ , on trouve une valeur inférieure à  $0,08K$  €, le maximum de revenu possible, mais à comparer à une mise en fonds propres inférieure à  $K$  €, et, pour  $t = 0$ , on peut quand même gagner  $0,05K$  €. .... Sans apport personnel.... Il s'agit là de l'écart entre la rentabilité économique et les intérêts financiers dus pour un prêt à 3%.

Le taux de rentabilité financière du capital réellement investi est donc :

$$f(t) = 100 \frac{R}{C} = 100 \frac{(0,05 + 0,0003t)K}{0,01tK} = 100 \frac{0,05 + 0,0003t}{0,01t}$$

Il y a simplification par  $K$  ; la valeur du capital  $K$  à financer n'intervient donc pas dans ces calculs de pourcentages ; on fera remarquer aux élèves que cela est dû à la proportionnalité.

On peut modifier l'écriture précédente :

$$f(t) = 100 \frac{5 + 0,03t}{t} = 3 + \frac{500}{t}.$$

avec :  $0 < t \leq 100$ .

On retrouve donc la fonction  $f$  du paragraphe précédent et les mêmes commentaires.

### 3. Changement du taux d'intérêt de l'emprunt

#### a. Cas où le taux de l'emprunt est de 2%

On pourra reprendre ce qui précède avec un emprunt au taux de 2%. On trouvera alors pour fonction :

$$2 + \frac{600}{t}$$

C'est encore une fonction homographique décroissante que l'on pourra comparer à la précédente. Les résultats sont analogues : **plus la part en fonds propres est faible, plus le taux de rentabilité financière est élevé.**

#### b. Cas où le taux $i$ % de l'emprunt est une autre valeur

On pourra reprendre ce qui précède avec divers taux d'emprunt : 0,5%, 1%, 1,5%, 3,5%, 5%, etc. Avec un tableur, on pourra construire un tableau donnant pour un capital fixé, les taux de rentabilité financière pour diverses valeurs de  $t$  et de  $i$ . On

fera remarquer que le problème est sans intérêt (...financier...) si  $i > 8$ . On ne considèrera donc que des valeurs de  $i$  prises dans l'intervalle  $[0 ; 8]$ .

### c. Cas général

On se propose, ci-dessous, de traiter le cas général où le capital à financer  $K$  a une valeur quelconque. On veut donc déterminer le taux de rentabilité financière  $f(t)$  de l'investissement réalisé par un apport en capital de  $t$  % de cette somme  $K$ , le reste de la somme nécessaire étant obtenue par un emprunt au taux de  $i$  %. Le capital total nécessaire à l'opération a toujours une rentabilité économique de 8%.

Le capital investi est donc :  $C = 0,01tK$ .

La somme empruntée à  $i$  % est donc :  $0,01(100 - t)K$ .

La rémunération à  $i$ % de cette somme est :  $0,0001i(100 - t)K$ .

La rémunération (économique) totale est :  $0,08K$ .

La rémunération du capital investi est :

$$R = 0,08K - 0,0001i(100 - t)K$$

$$R = K(0,08 - 0,01i + 0,0001it).$$

Le taux de rentabilité financière du capital (propre) réellement investi est donc :

$$f(t) = 100 \frac{0,08 - 0,01i + 0,0001it}{0,01t}$$

$$f(t) = 100 \frac{8 - i + 0,01it}{t} = \frac{800 - 100i + it}{t}$$

Donc :

$$f(t) = i + \frac{800 - 100i}{t}$$

c'est-à-dire :

$$f(t) = i + 100 \frac{8 - i}{t}$$

avec :  $0 < t \leq 100$ .

(Ne pas oublier que  $f(t)$  est un pourcentage du capital propre réellement investi).

Pour  $i$  choisi dans l'intervalle  $[0 ; 8]$ , on trouve à nouveau une fonction  $f$  de la variable  $t$  homographique décroissante sur  $]0 ; 100]$ . On retrouve naturellement les fonctions déjà trouvées pour  $i = 3$  ou  $i = 2$ .

Une explication simple du phénomène serait de dire que l'investisseur récupère à son profit, sur la partie financée par un emprunt, l'écart entre les intérêts versés et le bénéfice économique produit par l'investissement. Il vaut donc mieux que cet écart soit positif, c'est-à-dire que :

$$0 < i < 8$$

Pour  $i = 8$ , quelle que soit la valeur de  $t$ , on trouve :  $f(t) = 8$ . Cette valeur correspond à la rentabilité économique des fonds propres de l'investisseur, il ne fait aucun bénéfice sur les fonds empruntés.

Pour  $i > 8$ , on aura  $f(t) < 8$ . La situation est donc à éviter (on cherchera alors soit à ne pas faire d'emprunt, soit un autre placement plus rentable), surtout si cette valeur vient à devenir négative.

Remarque : l'affirmation précédente pourra donner lieu, en classe de seconde, à des activités algébriques et une étude de signes. En effet, on peut écrire :

$$f(t) - 8 = i - 8 + 100 \frac{8 - i}{t}$$

c'est-à-dire :

$$f(t) - 8 = \frac{(i - 8)(t - 100)}{t}.$$

Pour  $i > 8$  et  $0 < t < 100$ , on aura donc :  $i - 8 > 0$  et  $t - 100 < 0$ .

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} f(t) - 8 &< 0 \\ f(t) &< 8. \end{aligned}$$

Par le même calcul, on peut aussi retrouver que si  $0 < i < 8$  et  $0 < t < 100$ , on a :

$$f(t) > 8.$$

On obtient donc une justification algébrique de l'intérêt de l'opération financière.

### ***III. Un autre point de vue***

#### *1. Le problème*

Dans les parties précédentes, on a choisi pour variable  $t$  le pourcentage de l'apport en capitaux dans la somme totale à financer. On a alors construit une fonction décroissante représentant la rentabilité financière de l'opération.

Une autre pratique consiste à prendre pour variable la part de la somme empruntée dans l'ensemble de l'opération à financer. C'est ce qui est proposé dans cette partie, d'abord sur le premier exemple traité puis dans le cas général.

#### *2. Étude d'un exemple*

On conserve les mêmes données : l'opération à réaliser nécessite 100 000€ le taux de rentabilité économique est de 8%, la rémunération totale de l'opération est donc de 8 000€

On note  $t$  la part, en pourcentage, de la somme empruntée dans le capital total à financer.

On veut déterminer le taux de rentabilité financière  $g(t)$  de l'investissement réalisé en utilisant un apport de  $t$  % couvert par un prêt bancaire au taux de 3%, le reste de la somme nécessaire étant apportée en capital (propre) par les investisseurs.

La somme empruntée à 3% est donc :  $1000t$ .

Le capital propre investi est donc :  $C = 1000(100 - t)$ .

La rémunération du prêt est :  $I = 30t$ .

La rémunération du capital (propre) investi est donc :  $R = 8000 - 30t$ .

Remarques :

- Pour  $t = 0$ , il n'y a pas d'emprunt, on retrouve donc pour rémunération du capital investi : 8000€
- Pour  $t = 100$ , les investisseurs, sans engager la moindre somme, retire un bénéfice de 5000€
- Pour  $0 < t < 100$ , on a  $5000 < R < 8000$  à comparer à une somme investie variable.

Le taux de rentabilité financière du capital réellement investi est donc la comparaison, en pourcentage, de  $R$  à  $C$ , donc :

$$g(t) = 100 \frac{R}{C} = \frac{8000 - 30t}{10(100 - t)} = \frac{800 - 3t}{100 - t}.$$

Avec :  $0 \leq t < 100$ .

N'oublions pas que  $g(t)$  est un pourcentage...

On vérifie que, pour  $t = 0$ , on obtient bien 8%. On pourra faire l'exploration ou l'étude directe de la fonction  $g$  ainsi définie sur  $]0 ; 100[$  ou proposer une transformation algébrique préalable de ce quotient.

On peut, par exemple, écrire :

$$g(t) = \frac{800 - 8t + 5t}{100 - t}$$

c'est-à-dire :

$$g(t) = 8 + \frac{5t}{100 - t}.$$

Cette expression prouve que, sur  $]0 ; 100[$ , on a :

$$g(t) > 8.$$

8 est donc le minimum de la fonction  $g$  sur l'ensemble  $]0 ; 100[$ .

Le recours à l'emprunt permet donc d'obtenir une rentabilité financière supérieure à la rentabilité économique attendue. **C'est précisément l'effet de levier.** On pourrait envisager d'utiliser le nombre  $g(t) - 8$  pour mesurer cet effet.

Les opérations élémentaires sur les fonctions (somme d'une fonction constante et du produit de deux fonctions croissantes) permettent de prouver facilement que la fonction  $g$  est croissante sur l'ensemble  $]0 ; 100[$ . Ainsi :

**Plus la part de la somme empruntée augmente, plus la rentabilité financière augmente.**

Une autre transformation algébrique possible est la suivante :

$$g(t) = \frac{500 + 300 - 3t}{100 - t} = 3 + \frac{500}{100 - t}.$$

Cette expression met, cette fois, le nombre 3, c'est-à-dire le taux de l'emprunt en valeur. Pour la recherche du minimum, elle est plus difficile à manipuler mais,

construite à partir d'une fonction inverse, son sens de variation est facile à établir et son étude peut se faire dès la classe de seconde. De plus, cette expression algébrique est très semblable à celle obtenue dans la partie II.

On remarquera que, comme précédemment, pour des raisons de proportionnalité, l'expression algébrique de la fonction  $g$  est indépendante de la valeur du capital total à financer pour l'opération étudiée.

On pourra construire et interpréter un tableau de valeurs pour cette fonction.

### 3. Généralisation

Dans le paragraphe précédent, on a traité le cas particulier où le taux de l'emprunt est de 3% ; on se propose maintenant de généraliser la situation au cas où le taux de l'emprunt est de  $i$  %.

On conserve les mêmes données : l'opération à réaliser nécessite 100 000€ le taux de rentabilité économique est de 8%, la rémunération de l'opération est donc de 8 000€  
On note  $t$  la part, exprimée en pourcentages, de la somme empruntée dans le capital total à financer. (Rappel :  $0 \leq t < 100$ )

On veut déterminer le taux de rentabilité financière  $g(t)$  de l'investissement réalisé en utilisant un apport de  $t$  % de l'opération financière couvert par un prêt bancaire au taux de  $i$  %, le reste de la somme nécessaire étant apportée en capital (propre) par les investisseurs.

La somme empruntée à  $i$  % est donc :  $1000t$ .

Le capital investi est donc :  $C = 1000(100 - t)$ .

La rémunération du prêt est :  $I = 10it$ .

La rémunération du capital (propre) investi est :  $R = 8000 - 10it$ .

Le taux de rentabilité financière du capital réellement investi est donc :

$$g(t) = 100 \frac{8000 - 10it}{1000(100 - t)} = \frac{800 - it}{100 - t}.$$

On peut écrire cette expression sous la forme :

$$g(t) = \frac{800 - 8t + 8t - it}{100 - t} = 8 + \frac{(8 - i)t}{100 - t}. \quad (*)$$

Ceci prouve que,  $i$  étant fixé, avec  $i < 8$ , le minimum de la fonction  $g$  de la variable  $t$  ainsi définie, sur l'intervalle  $[0 ; 100[$  est encore 8 ; de même, on trouve encore une fonction croissante sur cet intervalle dans le cas où  $i < 8$ .

On peut aussi écrire :

$$g(t) = \frac{100i - it + 800 - 100i}{100 - t} = i + 100 \frac{8 - i}{100 - t}.$$

Sous cette forme,  $i$  étant fixé, on obtient une fonction de la variable  $t$  facile à étudier dès la classe de seconde.

On remarquera à nouveau que, comme précédemment, pour des raisons de proportionnalité, l'expression algébrique de la fonction  $g$  est indépendante de la valeur du capital total à financer pour l'opération étudiée.

Remarque :

Si  $i > 8$ , l'égalité (\*) implique :  $g(t) < 8$ .

L'utilisation d'un emprunt induit alors une baisse de la rentabilité financière par rapport à la rentabilité économique ; l'emprunt n'a plus alors un but spéculatif et ne se fera que par nécessité ; il ne s'agit plus alors d'un investissement à but spéculatif ; cet objectif n'étant pas atteint, on cherchera un autre cadre où faire fortune...

#### ***IV. Généralisation***

Tout ce qui précède a été établi avec un taux de rentabilité économique fixé à 8%. Naturellement, on peut reprendre le problème lorsque l'investissement à réaliser rapportera 7% ; il suffit de remplacer 8 par 7 dans les calculs réalisés. Nous ne reprendrons pas ces calculs ici mais nous écrirons, ci-dessous, sans calculs fastidieux, les formules attendues dans le cas général.

##### Version 1 :

Le capital à financer  $K$  a une valeur quelconque. On veut donc déterminer le taux de rentabilité financière  $f(t)$  de l'investissement réalisé par un apport en capital de  $t$  % de cette somme  $K$ , le reste de la somme nécessaire étant obtenu par un emprunt au taux de  $i$  %.

Le taux de rentabilité économique espéré du capital total à financer est de  $R_e$  %.

La rentabilité financière s'écrira :

$$f(t) = i + 100 \frac{R_e - i}{t} \%.$$

Cette formule généralise celle écrite au paragraphe II-3-c.

##### Version 2 :

L'opération à réaliser nécessite une somme de  $K$  €, le taux de rentabilité économique est de  $R_e$  %.

On note  $t$  la part, en pourcentage, de la somme empruntée dans le capital total à financer.

On veut déterminer le taux de rentabilité financière  $g(t)$  de l'investissement réalisé en utilisant un apport de  $t$  % couvert par un prêt bancaire au taux de  $i$  %, le reste de la somme nécessaire étant apportée en capital par les investisseurs.

La rentabilité financière s'écrira :

$$g(t) = \frac{100R_e - it}{100 - t} \quad (1)$$

c'est-à-dire :

$$g(t) = R_e + \frac{(R_e - i)t}{100 - t} \quad (2)$$

ou encore :

$$g(t) = i + 100 \frac{R_e - i}{100 - t}. \quad (3)$$

Avec ces formules, qui généralisent celles écrites au paragraphe III-3, pour nos élèves, on pourra facilement construire d'autres activités sur le même thème.

## V. Un dernier point de vue

Dans ce qui précède, on a comparé une partie (le capital investi ou le capital emprunté) à un tout, l'ensemble de référence (la somme totale à financer pour réaliser l'investissement envisagé). Une autre pratique consiste à comparer l'une des parties à l'autre partie, comme dans les courses où la cote d'un cheval peut être de 5 contre 2, par exemple. On va donc, dans ce qui suit, comparer la somme empruntée à la somme investie en capitaux propres ; on en calculera le quotient.

Le capital total à financer  $K$  a une valeur quelconque. Il est supposé apporter une rentabilité dite économique proportionnelle à cette somme. On note  $R_e$  cette rentabilité, exprimée en pourcentage de l'investissement total. On va exploiter les résultats de la situation précédente. On veut donc déterminer le taux de rentabilité financière  $g(t)$  de l'investissement réalisé en ayant recours à un prêt bancaire de  $t$  % de cette somme  $K$  au taux de  $i$  %, le reste de la somme nécessaire étant obtenue par un apport en capital (propre) fourni par les investisseurs.

D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$g(t) = R_e + \frac{(R_e - i)t}{100 - t} \quad (2)$$

c'est-à-dire :

$$g(t) = R_e + \frac{(R_e - i)tK}{(100 - t)K}$$

c'est-à-dire :

$$g(t) = R_e + (R_e - i) \frac{tK}{(100 - t)K}. \quad (**)$$

La somme  $D$  empruntée est égale à :

$$D = tK.$$

L'apport en capital propre  $C$  est :

$$C = (100 - t)K.$$

Le taux de rentabilité financière  $R_f$ , exprimé en pourcentage de la somme apportée, s'écrit donc, d'après la formule (\*\*):

$$R_f = R_e + (R_e - i) \frac{D}{C}.$$

En considérant pour variable le quotient  $D/C$ , obtient cette fois une fonction affine. Dans l'hypothèse où  $R_e > i$ , cette fonction est croissante et, plus ce rapport est élevé, c'est-à-dire plus la part de  $C$  est faible par rapport à  $D$ , plus la rentabilité est élevée.

Reprenons, à titre d'exemple, la situation évoquée initialement :

$$R_e = 8 \% \quad i = 3 \%$$

On peut alors construire le tableau suivant :

$D/C$	0	1	2	5	9	10	24
Rentabilité financière	8%	13%	18%	33%	53%	58%	128%
Écart absolu $R_f - R_e$	0%	5%	10%	25%	45%	50%	120%
Hausse de la rentabilité financière	0%	62,5%	125%	312,5%	562,5%	625%	1500%

NB : on entend par "hausse de la rentabilité financière" l'augmentation, en pourcentages, de la rentabilité du capital propre. Pour le calcul, on utilise donc la formule :

$$100 \frac{R_f - R_e}{R_e}.$$

Cette hausse est un argument fort pour attirer un éventuel investisseur et peut servir à mesurer l'effet de levier.

## VI. Conclusion

L'effet levier consiste donc en fait à reporter sur le capital propre investi une partie de la rentabilité de la somme empruntée ; il faut donc que ce report soit conséquent pour voir augmenter de manière significative et attirante le taux de rémunération du capital investi en propre par l'investisseur spéculatif, d'où l'augmentation de la part empruntée. Il en découle, en outre, une baisse de l'apport, en fonds propres, pour réaliser une opération définie à priori (par exemple : achat d'un appartement en vue de le louer, cet appartement ayant un prix déjà fixé) ; minimiser l'apport personnel et l'associer à un taux de rentabilité élevé sont deux arguments de poids souvent utilisés pour attirer le client.

Pour réaliser un investissement, compléter un apport en capital  $S$  par un apport sous forme d'un emprunt peut donc permettre d'augmenter considérablement la rentabilité de la somme  $S$  et atteindre des taux très rémunérateurs et attrayants. Cet



effet de levier est très utilisé dans les opérations à but spéculatif où l'objectif essentiel est de réaliser un maximum de gain en un minimum de temps en orientant le capital disponible vers des opérations financières à très haut rendement.

De nombreuses opérations financières spéculatives sont élaborées sur ce principe : on choisit un produit financier dont on attend un revenu (ou une hausse) important ; on apporte un petit capital et on complète la somme nécessaire par un emprunt à un taux faible ; l'effet de levier entraîne, en fin d'opération, un revenu très conséquent.

Cet effet de levier renforce le pouvoir et la rentabilité des fonds spéculatifs souvent nuisibles à l'économie, surtout dans les périodes où les taux d'intérêts sont très bas.

Un autre exemple est le financement par les sociétés d'investissement des LBO où ce levier est très fortement utilisé : ces sociétés, dans le but de réaliser un rapide profit rachètent des entreprises à fort potentiel de développement mais en difficulté financière. Elles financent ces achats en recourant massivement à l'emprunt, restructurent la société et la revendent rapidement (éventuellement après découpage) avec une importante plus value ; il arrive même que l'investisseur fasse rembourser par la société cible l'emprunt qui a servi à la racheter. On peut aussi spéculer sur le pétrole ou les matières premières...

On peut aussi signaler certaines opérations d'investissement immobilier où, en jouant sur les différentes primes ou remises d'impôts, sur des prêts à taux faibles, sur des promesses de rentrée d'argent par location du bien, des promoteurs font miroiter à leurs clients des rentabilités intéressantes pour un apport initial minimum.

### **Les limites du processus :**

Par l'usage d'un emprunt, on peut donc obtenir une rentabilité très intéressante mais il y a quelques précautions à prendre :

L'opération n'a de réel intérêt que si le taux de rentabilité économique est supérieur au taux de l'emprunt souscrit.

Il est préférable que le prêt réalisé soit à taux fixe afin de se prémunir des pertes liées à une hausse non prévue d'un taux indexé. On évitera donc les emprunts à taux variables (surtout si ces taux ne sont pas encadrés), les emprunts à taux progressifs, etc... Certains acheteurs dans l'immobilier en ont fait les frais.

Il faut être assuré de la valeur du taux de rentabilité économique sur lequel peuvent peser certaines incertitudes (retournement de conjoncture économique, produit mal positionné, avantages fiscaux disparus...). Ainsi certaines personnes ayant acheté un bien immobilier en vue de le mettre en location se sont retrouvées propriétaires d'un local sans locataire car situé dans un lieu où le marché de la location était inexistant (par exemples : logement pour étudiant dans une ville sans

université proche ou dans un quartier non recherché ou dans un secteur où il y a déjà pléthore de logements à louer) et n'ont pas pu bénéficier des avantages fiscaux promis et des rentrées d'argent liées à la location du bien. Dans le même registre, on peut citer certaines locations de vacances ou de loisirs...

Il faut être assuré de la valeur du bien à l'échéance : l'investisseur retrouvera-t-il son capital ? Pourra-t-il rembourser le prêt ? On peut encore citer le cas d'investissements immobiliers où, suite à une crise, le bien, au lieu de prendre de la valeur, en a perdu et ne permet pas, par la revente, de couvrir les dettes ; on citera aussi certains placements en bourse ou les parts dans la propriété de certains bateaux de croisière (qui n'ont aucune valeur à la revente).

Ainsi, dans certains cas, cet effet levier peut se retourner contre son utilisateur et devenir un "effet massue".

#### Remarque

Dans ce qui précède, on a procédé de la manière suivante :

1. on définit d'abord l'opération à financer et donc la somme à trouver,
2. on étudie ensuite la répartition entre apport personnel et emprunt à réaliser.

On a donc adopté le point de vue du promoteur de l'opération financière ayant un soutien bancaire et cherchant à attirer des apports en capitaux propres.

On pourrait étudier un autre point de vue, celui de la personne qui dispose d'un capital, déterminé à priori, et qui cherche un placement à haut rendement pour ce capital. Reprenons, par exemple un des cas cités en page 3 :

Avec un apport de 20 000€ dans l'opération décrite, on obtient un rendement de 28% dans cette opération où le budget global est de 100 000€. Mais, s'il dispose de 60000€, que lui conseiller ? Par exemple : financer 3 opérations identiques ou une seule au budget global de 300 000€.. On pourrait donc reprendre tout ce qui précède dans le contexte suivant : on dispose d'une somme  $S$  fixée à priori, on réalise un emprunt d'une somme de  $E$  € variable au taux de 3% et on étudie le taux de rémunération financière, en fonction de  $E$ , de cette somme dans une opération financière dont le montant total est de  $S+E$  € et la rentabilité économique 8%. A vos crayons...

MISE EN PAGE :  
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :

Patrick GABRIEL  
Catherine LABRUERE CHAZAL  
François MARCHIVIE  
Michel PLATHEY  
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :  
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :  
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :  
n° 197 - 1<sup>er</sup> semestre 2011

IMPRESSION :  
Service Reprographie

**FEUILLE DE VIGNE**

Université de Bourgogne - UFR Sciences et Techniques

**IREM**

9 Avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 Dijon cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Fax 03 80 39 52 39

@ : [iremsecr@u-bourgogne.fr](mailto:iremsecr@u-bourgogne.fr).

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM>