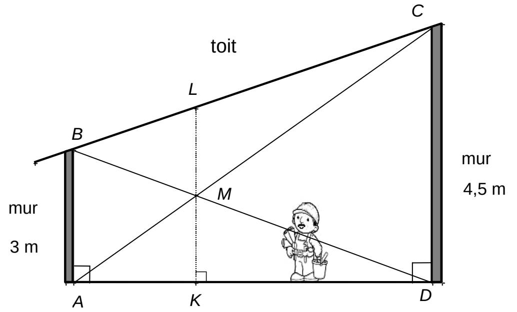
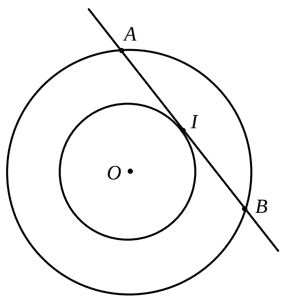
Institut de Recherche sur l'Enseignement
des Mathématiques

IREM de Dijon

Recueil d'exercices et de problèmes

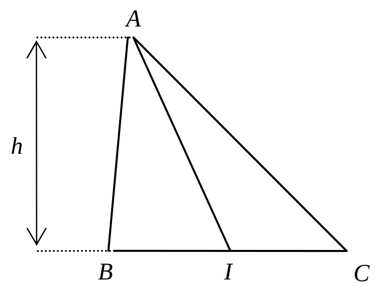
Moyennes





Cercles et tangentes

Autour de l'aire d'un triangle



Février 2011

Université de Bourgogne - UFR Sciences et Techniques - IREM
9 Avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr. - http://math.u-bourgogne.fr/IREM

Introduction

Ce recueil a été élaboré dans le cadre d'un stage inter-établissements, initié en décembre 2007-2008 et poursuivi en 2008-2009, entre le collège Monge et le lycée Clos Maire à Beaune. Il est le fruit d'un travail commun entre les professeurs de mathématiques de ces deux établissements. Son but était d'élaborer une série d'exercices et de problèmes regroupés par thèmes, abordables aussi bien au collège qu'au lycée, mais avec des approches et des niveaux d'approfondissement différents. Les problèmes ont été conçus pour être traités de façon régulière par les professeurs des deux cycles des deux établissements, dans le but d'assurer une continuité et une cohérence dans la formation mathématique des élèves. J'ai piloté ce stage, à la demande des deux établissements, avec une casquette institutionnelle ; ma démarche auprès des professeurs a cependant été guidée par des objectifs de formation, et par le souci de faire élaborer par les équipes un outil utilisable dans les classes. Ce serait mentir par omission de ne pas signaler également qu'il s'agissait de tisser du lien entre ces équipes.

La place de ce recueil dans une *brochure IREM* vise la mise à la disposition de tous les professeurs des exercices correspondant. Chaque professeur, si cela l'intéresse, peut y puiser pour y trouver du matériau pour la classe. Quelques indications sont données sur le niveau ou le ressort didactique des exercices, mais chacun conserve toute latitude pour s'en emparer avec un scénario pédagogique qui lui est propre (activités en classe entière, en groupe restreint, en devoir à la maison). Chaque énoncé est rédigé à l'aide d'un questionnement, mais les professeurs ont toute liberté pour s'en emparer à leur guise : les problèmes peuvent être utilisés tels quels, modifiés ou raccourcis au gré de chacun, en fonction des classes. Il ne faut pas hésiter non plus à proposer certains des sujets en classe de Cinquième ou de Quatrième, quitte à adapter quelques questions ; ils s'inscrivent tous dans les programmes du premier ou du second cycle. Une approche informatique peut également être envisagée pour certains d'entre eux.

Les travaux sont rassemblés autour de trois thèmes intitulés MOYENNES, CERCLES ET TANGENTES et AUTOUR DE L'AIRE D'UN TRIANGLE. Il peut être intéressant de puiser largement dans un même thème, les fils rouges ayant toujours un certain impact dans l'enseignement.

Ce recueil n'aurait pas vu le jour sans Monsieur Dominique LANTERNIER, Proviseur du lycée Clos Maire, et Monsieur Rémy RAVAUT, Principal du collège Monge, qui sont à l'initiative de l'opération de liaison entre les deux établissements. Je tiens à remercier tout particulièrement les professeurs des deux établissements, qui ont poursuivi avec beaucoup de cœur le travail de production et d'écriture pendant deux ans. Au-delà de cette production, il semble qu'ils aient désormais plaisir à se retrouver pour travailler ensemble.

Robert FERACHOGLOU
Chargé de mission sur poste d'IPR en Mathématiques

SOMMAIRE

THEME 1 : LES MOYENNES 1

A – Qu'est-ce qu'une moyenne ? 1

- Problème 1 – Moyenne arithmétique, moyenne harmonique 1
- Problème 2 – Découverte de quatre différentes moyennes 3

B – Les moyennes : à quoi ça sert ? 7

- Problème 3 – Pourcentages et moyenne géométrique 7
- Problème 4 – Pesées et moyenne géométrique (1) 9
- Problème 5 – Pesées et moyenne géométrique (2) 11
- Problème 6 – Plaques moyennes et moyenne quadratique 13
- Problème 7 – Vitesse et moyenne harmonique 15
- Problème 8 – Taux de change et moyenne harmonique 17
- Problème 9 – Base « moyenne » d'un trapèze et moyenne harmonique 19

C – Comment visualiser les moyennes ? 21

- Problème 10 – Hauteur d'un triangle rectangle et moyenne géométrique 21
- Problème 11 – Toutes les moyennes dans une même figure 23
- Problème 12 – Une visualisation graphique 25

D – Comparaison des différentes moyennes 27

- Problème 13 – Comparaison géométrique 27
- Problème 14 – Comparaison algébrique 29
- Problème 15 – Comparaison de quelques moyennes de *n* nombres 31

THEME 2 : CERCLES ET TANGENTES 33

A – Utilisation d'axes de symétrie 33

- Problème 1 – Avec un cercle et une corde 33
- Problème 2 – Avec un cercle et deux tangentes 34
- Problème 3 – Avec un cercle et trois tangentes (1) 35
- Problème 4 – Avec un cercle et trois tangentes (2) 37
- Problème 5 – Le triangle mystérieux 38
- Problème 6 – L'énigme de la couronne 39

B – Problèmes de construction et de lieu géométrique 41

- Problème 7 – Tangentes à un cercle menées d'un point extérieur 41
- Problème 8 – Tangentes communes à deux cercles tangents (1) 42
- Problème 9 – Tangentes communes à deux cercles tangents (2) 43
- Problème 10 – Cercles tangents à un cercle et une droite 45

THEME 3 : AUTOUR DE l’AIRE D’UN TRIANGLE 47

A – Comparaison d’aires 47
- Problème 1 – Étude de quelques figures clés 47
- Problème 2 – Partage d’un quadrilatère 49
- Problème 3 – Découpage d’un triangle (1) 50
- Problème 4 – Découpage d’un triangle (2) et propriété caractéristique de la médiane 51
- Problème 5 – Le théorème du pied de la bissectrice 53
- Problème 6 – Prolongements d’un triangle 54

B – Les aires : un outil pour la géométrie 55
- Problème 7 – Une propriété du triangle équilatéral 55
- Problème 8 – Triangles ayant deux hauteurs de même longueur 56
- Problème 9 – Triangle : aire, périmètre et rayon du cercle inscrit 57
- Problème 10 – Démonstration du concours des médianes d’un triangle 58
- Problème 11 – Un alignement dans le trapèze 60
- Problème 12 – Une condition analytique d’alignement 61

Moyennes
A - Qu'est-ce qu'une moyenne ?

PROBLÈME N° 1 : Moyenne arithmétique et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de revisiter rapidement la notion de moyenne arithmétique, qui doit être la seule connue *a priori* en début de collège, mais aussi de montrer que ce n'est pas la seule. Le questionnement permet de découvrir la notion de moyenne harmonique à travers une situation simple. Ce sujet peut être abordé dès la fin de la classe de $5^{\text{ème}}$ et ne nécessite que très peu de prérequis. Il est sûrement mieux adapté au niveau de la $4^{\text{ème}}$, notamment avec la manipulation des inverses en fin de sujet. Le calcul des différentes moyennes peut servir de prétexte à une initiation au maniement d'un tableur.

A – Première partie : moyenne de notes

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 14. Quelle est la moyenne de ces deux notes ?

2. Un élève a eu cinq notes : 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 14. Quelle est la moyenne de ces cinq notes ?

Vocabulaire : ce type de moyenne est appelé « **moyenne arithmétique** ».

La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est le nombre m vérifiant l'égalité : $m = \dfrac{a+b}{2}$.

À retenir : pour calculer la moyenne arithmétique de plusieurs valeurs :
- on ajoute toutes ces valeurs ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs.

3. Un élève a obtenu au premier trimestre cinq notes en mathématiques : 7 ; 12 ; 9 ; 7 ; 11. Une sixième note est prévue.
   a) Quelle doit être cette sixième note pour que la moyenne soit égale à 10 ? à 11 ?
   b) L'élève peut-il espérer avec ses six notes obtenir une moyenne égale à 12 ?

Deuxième partie : vitesse moyenne

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?

2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?

3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?

4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

5. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6{,}4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$.

Vocabulaire : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

À retenir : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

Troisième partie : calculons ces deux moyennes

Recopier et compléter le tableau suivant où m et h désignent respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique des deux nombres a et b.

a	***b***	***m***	***h***	
4	12			**cas n°1**
10	2,5			**cas n°2**
	15	45		**cas n°3**
12			8	**cas n°4**

Détailler tous les calculs en dehors du tableau.

PROBLÈME N° 2 : Découvrons quatre différentes moyennes

Objectif, niveau et difficultés – L'objectif est analogue à celui du problème précédent : la découverte de quatre types de moyennes articule le questionnement, au travers de quatre situations d'usage courant. Le niveau indiqué est celui de la $3^{ème}$ ou de la 2^{nde} ; le sujet peut constituer un bon entraînement au maniement des radicaux, qui interviennent ici en situation dans un contexte non artificiel. Ici encore, l'utilisation d'un tableur est particulièrement indiquée dans la $5^{ème}$ partie.

A – Première partie : moyenne de notes

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 14. Quelle est la moyenne de ces deux notes ?

2. Un élève a eu cinq notes : 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 14. Quelle est la moyenne de ces cinq notes ?

3. Un élève a obtenu *n* notes : x_1 ; x_2 ; x_3 ; …… ; x_n . On note *m* la moyenne de ces *n* notes.
Exprimer la moyenne *m* de ces *n* notes à l'aide des nombres *n*, x_1, x_2, …, x_n .

Vocabulaire : ce type de moyenne est appelé « **moyenne arithmétique** ».

La moyenne arithmétique de deux nombres *a* et *b* est le nombre *m* vérifiant l'égalité : $m = \dfrac{a+b}{2}$.

À retenir : pour calculer la moyenne arithmétique de plusieurs valeurs :
- on ajoute toutes ces valeurs ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs.

4. Un élève a obtenu au premier trimestre cinq notes en mathématiques : 7 ; 12 ; 9 ; 7 ; 11. Une sixième note est prévue.
c) Quelle doit être cette sixième note pour que la moyenne soit égale à 10 ? à 11 ?
d) L'élève peut-il espérer avec ses six notes obtenir une moyenne égale à 12 ?

Deuxième partie : vitesse moyenne

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?

2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?

3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?

4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

5. Vérifier l'égalité : $\dfrac{1}{6{,}4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}\right)$.

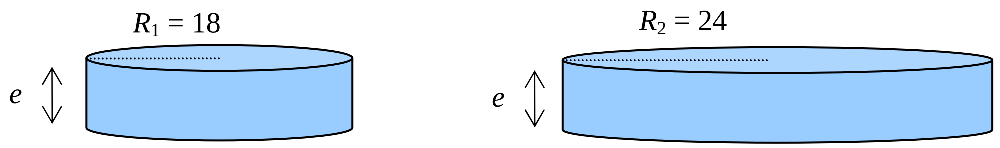
<u>Vocabulaire</u> : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

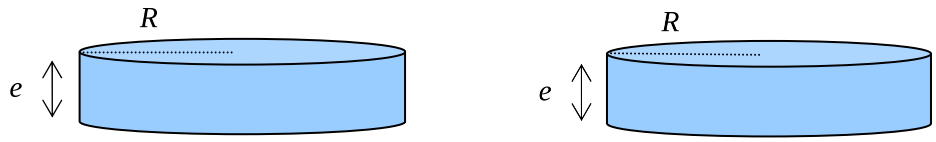
<u>À retenir</u> : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

Troisième partie : notion de plaque moyenne

On possède deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur e, mais de rayons différents : $R_1 = 18$ et $R_2 = 24$ (en cm). (Figure ci-après.)



Nous souhaitons fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e, et de même rayon R :



On rappelle que le volume d'un cylindre s'exprime par la relation : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

1. Calculer le volume total de métal utilisé dans les deux premiers jetons. (Exprimer ce nombre en fonction de π.)

2. Exprimer en fonction de *R* et de π la somme des volumes des deux jetons transformés.

3. En déduire que le rayon *R* des jetons transformés ne dépend pas de l'épaisseur *e*, et calculer *R*.

4. Peut-on dire que *R* est la moyenne arithmétique des nombres 18 et 24 ?

5. Vérifier l'égalité : $R = \sqrt{\frac{18^2 + 24^2}{2}}$.

<u>Vocabulaire</u> : on dit que le nombre *R* est la ***moyenne quadratique*** des nombres 18 et 24.
La moyenne quadratique de deux nombres non nuls *a* et *b* est le nombre *q* vérifiant l'égalité :

$$q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

<u>À retenir</u> : pour calculer la moyenne quadratique de deux nombres non nuls :
- on calcule la moyenne arithmétique de leurs carrés ;
- on prend la racine carrée du résultat obtenu.

Quatrième partie : quadrature d'un rectangle

On considère un rectangle de dimensions 5 cm et 9,8 cm.

1. Quelle est, en cm^2, l'aire de ce rectangle ?

2. On veut construire un carré qui a la même aire que ce rectangle. Calculer la longueur *c* du côté de ce carré.

3. Le nombre *c* est-il la moyenne arithmétique des nombres 5 et 9,8 ?

<u>Vocabulaire</u> : on dit que le nombre *c* est la ***moyenne géométrique*** des nombres 5 et 9,8.
La moyenne géométrique de deux nombres non nuls *a* et *b* est le nombre *g* vérifiant l'égalité :

$$g = \sqrt{a \times b}.$$

<u>À retenir</u> : pour calculer la moyenne géométrique de deux nombres non nuls :
- on calcule leur produit ;
- on prend la racine carrée du résultat obtenu.

Cinquième partie : calculons ces quatre moyennes

Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant les définitions des moyennes *m*, *g*, *h* et *q* données dans les encadrés précédents. Détailler les calculs « hors tableau » ou utiliser un tableur.

a	***b***	***m***	***g***	***h***	***q***	
4	16					**cas n°1**
14		8				**cas n°2**
12			6			**cas n°3**
4				6		**cas n°4**
7					5	**cas n°5**

PROBLÈME N° 3 : Pourcentages et moyenne géométrique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit ici d'étudier une situation relativement riche, quoiqu'assez complexe, et l'objectif est double. On introduit tout d'abord la notion de coefficient multiplicateur en liaison avec un pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution) et, d'autre part, on met en scène la notion de pourcentage moyen d'évolution sur deux périodes consécutives ; c'est là qu'intervient un autre type de moyenne : la moyenne géométrique. Ce sujet peut être abordé dès la 3$^{\text{ème}}$, avec prudence ; il est particulièrement indiqué en 2$^{\text{nde}}$ et s'inscrit parfaitement dans les programmes de 1$^{\text{ère}}$ ES ou de 1$^{\text{ère}}$ STG.

Partie A – Augmenter, diminuer en pourcentage

1. Un produit coûte 250 €, son prix augmente de 30 %.
   a) Quel sera le prix A de ce produit après l'augmentation ?
   b) Justifier l'égalité : $A = 250 \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)$.

2. Le prix d'un produit est D euros, et ce prix augmente de 30 %.

   Justifier que le nouveau prix A de ce produit est donné par l'égalité : $A = D \times \left(1 + \frac{30}{100}\right)$.

3. Le prix d'un produit est D euros, et ce prix augmente de t %.

   Justifier que le nouveau prix A de ce produit est donné par l'égalité : $A = D \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

À retenir :
Augmenter un nombre de t % revient donc à le multiplier par le **coefficient multiplicateur :**

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

4. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15 % ?

5. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de t % ?

À retenir
Diminuer un nombre de t % revient donc à le multiplier par le **coefficient multiplicateur :**

$$\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

6. Compléter les phrases suivantes :
   a) « Multiplier un nombre par 1,05, c'est augmenter ce nombre de …. % ».
   b) « Multiplier un nombre par 2 revient à augmenter ce nombre de …. % ».
   c) « Multiplier un nombre par 0,4, c'est diminuer ce nombre de …. % ».
   d) « Multiplier un nombre par 0,03 revient à diminuer ce nombre de …. % ».

Partie B – Coefficient moyen annuel

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$.

Le prix d'un produit était de 300 € le 01/01/2006.

1. Durant l'année 2006, le prix de ce produit subit une augmentation de 21 %. Quel est le nouveau prix A de ce produit le 31/12/2006 ?

2. Durant l'année 2007, le prix de ce produit subit une nouvelle augmentation de 44 %. Quel est le nouveau prix B de ce produit le 31/12/2007 ?

3. Julien affirme « Puisque $21+44=65$, j'en déduis qu'entre le 01/01/2006 et le 31/12/2007, le prix a subi une augmentation globale de 65 %. ».
   Margaux réplique : « Il ne faut pas raisonner sur les taux d'évolution mais sur les coefficients multiplicateurs ; le prix a été multiplié au total par $1,21\times1,44$, c'est-à dire 1,7424. Il a donc augmenté de 74,24 %. ».
   Lequel des deux a raison ? Justifier votre réponse.

4. On appelle taux moyen annuel d'évolution le nombre t tel que deux hausses successives de t % sont équivalentes à la hausse globale sur les deux années.
   a) Sur l'exemple précédent, vérifier que la hausse globale du prix sur les deux années correspond à deux hausses successives de 32 %.
   b) Le taux moyen annuel est-il égal à la moyenne arithmétique des deux taux ?

5. Le coefficient multiplicateur annuel moyen est donc égal à 1,32.
   Vérifier que ce coefficient est égal à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs 1,21 et 1,44.

Moyennes
B - Les moyennes : à quoi ça sert ?

PROBLÈME N° 4 : Pesées et moyenne géométrique (1)

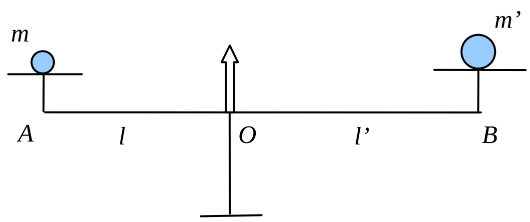
Objectif, niveau et difficultés – La notion de moyenne géométrique intervient ici à travers une situation issue de la physique, sur laquelle la règle de base est donnée. Le questionnement est bâti pour être posé en classe de 3ème.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \frac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \frac{2ab}{a+b}$.

A – Préliminaire : la loi d'Archimède

Une loi physique, la loi d'Archimède, dit que la balance ci-dessous est en équilibre si la condition suivante est vérifiée : $m \times l = m' \times l'$, où m et m' sont les masses (exprimées dans la même unité) posées sur chaque plateau, et l et l' sont les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance (l et l' sont aussi exprimés dans la même unité).



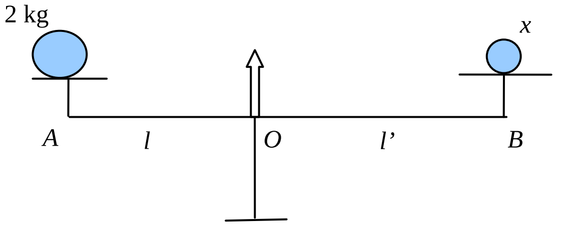
Application numérique

Si $m = 3$ kg, $l = 20$ cm et $l' = 60$ cm, calculer m' pour que la balance soit en équilibre.

B - Problème

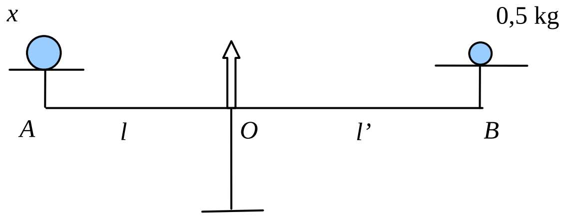
On possède une balance du type précédent, et diverses masses marquées ; on souhaite déterminer la masse inconnue d'un objet. Cette masse est notée x (en kg). La difficulté est que l'on ne peut pas procéder comme ci-dessus car on ne connait pas les longueurs $l = OA$ et $l' = OB$ des fléaux de la balance. De plus, on ne possède aucun instrument pour les mesurer. Cependant, on va résoudre le problème grâce aux mathématiques, à l'aide d'une astuce détaillée ci-après : la double pesée.

1. On réalise une première pesée, où l'équilibre est schématisé ci-dessous.



   a) Écrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une expression du quotient $\frac{l}{l'}$

2. La seconde pesée donne le nouvel équilibre suivant.



   a) Écrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une nouvelle expression du quotient $\frac{l}{l'}$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, écrire une équation dont la seule inconnue est x, puis calculer x.

4. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 2 et 0,5.

5. Dans un problème de double pesée, quel type de moyenne ce problème suggère-t-il de considérer ?

PROBLÈME N° 5 : Pesées et moyenne géométrique (2)

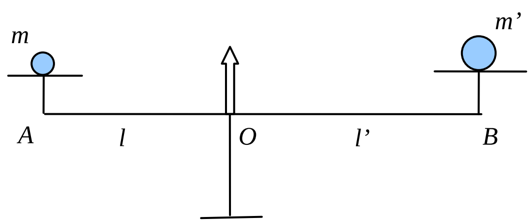
Objectif, niveau et difficultés – Ce sujet est l'analogue du précédent ; il reprend la même situation avec un questionnement plutôt adapté à la classe de 2nde.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A – Préliminaire : la loi d'Archimède

Une loi physique, la loi d'Archimède, dit que la balance ci-dessous est en équilibre si la condition suivante est vérifiée : $m \times l = m' \times l'$, où m et m' sont les masses (exprimées dans la même unité) posées sur chaque plateau, et l et l' sont les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance (l et l' sont aussi exprimés dans la même unité).



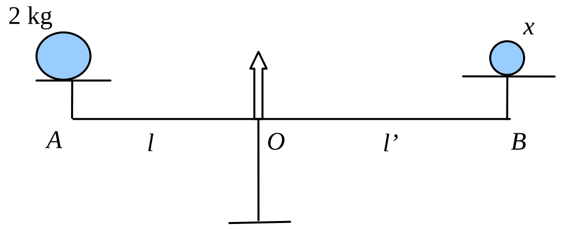
Application numérique

Si $m = 3\,\text{kg}$, $l = 20\,\text{cm}$ et $l' = 60\,\text{cm}$, calculer m' pour que la balance soit en équilibre.

B – Problème

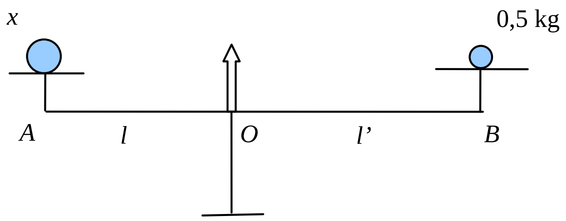
On possède une balance du type précédent, et diverses masses marquées ; on souhaite déterminer la masse inconnue d'un objet. Cette masse est notée x (en kg). La difficulté est que l'on ne peut pas procéder comme ci-dessus car on ne connait pas les longueurs $l = OA$ et $l' = OB$ des fléaux de la balance. De plus, on ne possède aucun instrument pour les mesurer. Cependant, on va résoudre le problème grâce aux mathématiques, à l'aide d'une astuce détaillée ci-après : la double pesée.

1. On réalise une première pesée, où l'équilibre est schématisé ci-dessous.



   a) Écrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une expression du quotient $\dfrac{l}{l'}$

2. La seconde pesée donne le nouvel équilibre suivant.



   a) Écrire l'égalité correspondante.
   b) En déduire une nouvelle expression du quotient $\dfrac{l}{l'}$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, calculer x.

4. Dans un problème de double pesée, quel type de moyenne ce problème suggère-t-il de considérer ?

5. Un objet de masse inconnue m est équilibré par une masse de 3,6 kg lorsqu'il est placé sur le plateau de droite d'une balance, et par une masse de 4,9 kg lorsqu'il est placé sur le plateau de gauche.
   Quelle est la masse m de cet objet ?

Moyennes

B - Les moyennes : à quoi ça sert ?

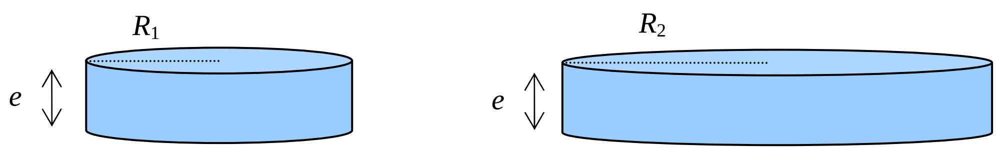
PROBLÈME N° 6 : Plaque moyenne et moyenne quadratique

Objectif, niveau et difficultés – Le problème fait intervenir la notion de moyenne quadratique à partir d'une situation géométrique, déjà entrevue dans le problème 2. Il est envisageable au niveau de la 3ème car il fait intervenir la notion de racine carrée et, d'autre part, il présuppose la connaissance d'autres types de moyennes que l'élève est censé avoir déjà côtoyées, même si les définitions sont rappelées dans l'encadré initial. Il ne présente pas de difficulté technique remarquable.

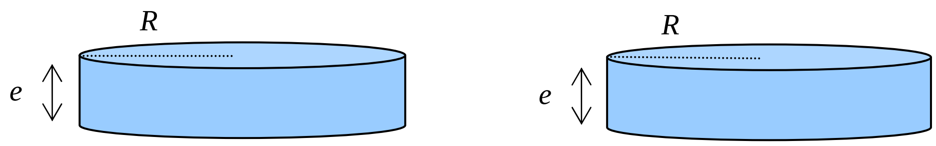
Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

On possède deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur e, mais de rayons différents qu'on note R_1 et R_2. (Figure ci-après.)



Nous souhaitons fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e, et de même rayon R :



On rappelle que le volume d'une cylindre s'exprime par la relation : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

1. Dans cette question, on suppose que $R_1 = 18$ et $R_2 = 24$ (en cm).
   a) Calculer le volume total de métal utilisé dans les deux premiers jetons. (Exprimer ce nombre en fonction de π.)
   b) Exprimer en fonction de *R* et de π la somme des volumes des deux jetons transformés.
   c) En déduire que le rayon *R* des jetons transformés ne dépend pas de l'épaisseur *e*, et calculer *R*.
   d) Peut-on dire que *R* est la moyenne arithmétique des nombres 18 et 24 ?

2. Cas général : dans cette question, R_1 et R_2 sont quelconques.
   a) Exprimer le volume total de métal en fonction de R_1 et R_2, à partir des plaques de départ.
   b) Exprimer ce même volume en fonction de *R*, à partir des deux plaques recomposées.
   c) En déduire une expression de *R* en fonction de R_1 et R_2.
   d) Peut-on dire que *R* est une moyenne de R_1 et R_2 ? Si oui, laquelle ?

3. Dans ce cas, on donne $R_1 = 30$ et $R_2 = 50$ (en cm). Calculer la valeur exacte de *R*.

PROBLÈME N° 7 : Vitesse et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – La situation envisagée a déjà été abordée dans les problèmes 1 et 2. Il s'agit d'un prolongement de l'étude au niveau de la classe de Seconde, car on y envisage une étude fonctionnelle. Un devoir à la maison en $3^{ème}$ est également concevable, à condition de négocier en douceur la question 4 de la $2^{ème}$ partie, ainsi que la $3^{ème}$ partie, dont le résultat est intéressant et surprenant.

Première partie : vitesse moyenne sur un aller-retour

Julien, qui habite Beaune, décide d'aller à Chagny à pied. 16 km séparent les deux villes. Julien couvre la distance à la vitesse moyenne de 4 km/h.
Pour revenir à Beaune, il emprunte le vélo de son ami chagnotin. Il effectue alors le retour à Beaune à la vitesse moyenne de 16 km/h.

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?
2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?
3. En déduire la vitesse moyenne de Julien sur l'aller-retour ?
4. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?
5. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6,4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)$.

Vocabulaire : on dit que le nombre 6,4 est la ***moyenne harmonique*** des nombres 16 et 4.
La moyenne harmonique de deux nombres non nuls a et b est le nombre h vérifiant l'égalité :

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

À retenir : pour calculer la moyenne harmonique de deux nombres non nuls :
- on calcule les inverses de ces deux nombres ;
- on calcule la moyenne arithmétique de ces deux inverses ;
- on prend l'inverse du résultat obtenu.

Deuxième partie : généralisation

Cette fois, Julien part de Beaune à vélo et roule, au petit bonheur. Il parcourt une distance d (en km) à la vitesse constante a (en km par h). Il effectue le retour par le même chemin à la vitesse constante b (en km par h).

1. Quelle est la distance aller-retour parcourue par Julien ?
2. Quelle est la durée totale du trajet aller-retour ?
3. En déduire que la vitesse moyenne v de Julien sur l'aller-retour est la moyenne harmonique de a et b.
4. Démontrer l'égalité : $v = \dfrac{2ab}{a+b}$.

<u>Troisième partie : comment augmenter la vitesse moyenne</u>

Le lendemain, l'infatigable Julien enfourche à nouveau son vélo et parcourt un trajet aller à la vitesse constante de 20 km/h. Il effectue le retour à la vitesse constante x (en km/h). On note alors $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet aller-retour.

1. Montrer que $v(x)$ s'exprime par l'égalité : $v(x) = \dfrac{40x}{x+20}$.
2. À quelle vitesse Julien doit-il rouler sur son trajet retour pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet soit égale à : 24 km/h ? 30 km/h ? 35 km/h ?
   Cette dernière valeur est-elle réaliste ?
3. Démontrer l'égalité : $v(x) = 40 - \dfrac{800}{x+20}$. En déduire que $v < 40$.
   Interpréter ce résultat.

PROBLÈME N° 8 : Taux de change moyen, et moyenne harmonique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de présenter une autre situation intéressante faisant intervenir la notion de moyenne harmonique. Les outils mathématiques ne dépassent pas ceux de la classe de 3ème ; cependant, le sujet est ardu car la notion de taux de change est relativement difficile à comprendre. En 3ème, on peut s'en tenir à la première partie, où le travail s'effectue sur un exemple numérique ; l'ensemble du sujet peut être posé en Seconde.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \frac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Taux de change moyen.

Partie A **: taux de change moyen dans un cas particulier.**

1. À la fin de l'année 2006, désirant se rendre aux États-Unis, un touriste français change ses euros (de symbole €) en dollars US (de symbole $). Le taux de change €/$ est égal à : $a = 1,26$. Cela signifie qu'avec 1 € il obtient 1,26 $.
Il désire obtenir 630 $. Combien d'euros doit-il changer ?

2. En février 2008, ce même touriste retourne aux États-Unis. Il change l'équivalent en euros de 630 $, mais le taux €/$ a évolué ; il est alors égal à : $b = 1,575$.
Combien d'euros a-t-il changés ?

3. On désire calculer le taux de change moyen de l'euro, noté t, sur l'ensemble de ces deux transactions, c'est-à-dire le nombre t de dollars que l'on obtient pour 1 euro.
a) Quelle somme en euro a-t-on obtenue pour un dollar en 2006 ? et en 2008 ?
b) En déduire la somme moyenne, en euro, obtenue pour un dollar sur ces deux années.
c) Calculer alors la valeur de t.

4. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 1,26 et 1,575 (on donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième).

5. Parmi les quatre moyennes précédentes, quelle est celle qui donne la valeur exacte du taux de change moyen ?

***Partie B* : Cas général**

Pour vous rendre aux États-Unis, vous changez une première fois l'équivalent en euros de 100 \$ à un taux €/\$ égal à a. Quelques jours plus tard, vous changez encore l'équivalent en euros de 100 \$ mais à un taux €/\$ égal à b.

1. Exprimer, en fonction de a et b, la somme totale, en euros, échangée sur l'ensemble des deux transactions.

2. En déduire, en fonction de a et b, le taux de change moyen de l'euro, noté t.

3. a) Vérifier l'égalité : $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

b) Conclure sur le type de moyenne utilisé.

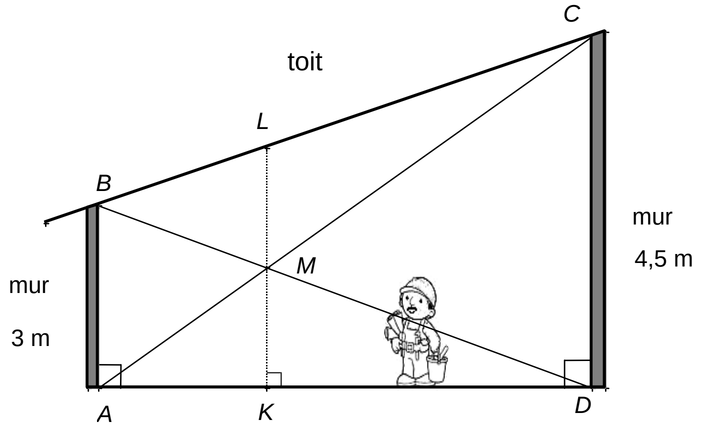
PROBLÈME N° 9 : Base « moyenne » d'un trapèze et moyenne harmonique

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Une étude géométrique originale constitue le premier point fort de ce problème ; il s'agit de calculer la longueur d'un segment particulier dans un trapèze : le segment parallèle aux bases et passant par le point d'intersection des diagonales. Le lien avec la moyenne harmonique est alors établi : c'est le deuxième intérêt de l'étude. Ce problème est abordable avec une classe de 3ème de bon niveau, ou en classe de Seconde.

A – Le problème du bricoleur

Un bricoleur désire faire des travaux dans sa maison de campagne, schématisée ci-contre (la figure n'est pas en vraie grandeur…).

Il dispose deux échelles $[AC]$ et $[BD]$, l'une contre l'autre, comme le montre la figure. Elles se "croisent" en un point *M*.
Les points *K*, *M* et *L* sont alignés.



Notre bricoleur mesure 1,75 m et il se pose des questions :

- À quelle hauteur se croisent les deux échelles ? Peut-il passer sous les échelles sans se baisser ?
- S'il monte s'installer au point *M*, pourra-t-il atteindre le toit ? Ou, au contraire, sera-t-il obligé de s'accroupir ?
- S'il désire poser une cloison joignant les points *K* et *L*, quelle serait sa hauteur ?

1. a) En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABD, montrer que : $\dfrac{3}{KM} = 1 + \dfrac{MB}{MD}$.

(On pourra utiliser l'égalité suivante : $DB = DM + MB$.)

b) En utilisant une autre configuration, déterminer la valeur exacte du rapport $\dfrac{MB}{MD}$.

c) En déduire la valeur de KM. Répondre à la première question du bricoleur.

2. Par un raisonnement analogue :

a) Montrer l'égalité : $\dfrac{3}{ML} = 1 + \dfrac{MA}{MC}$.

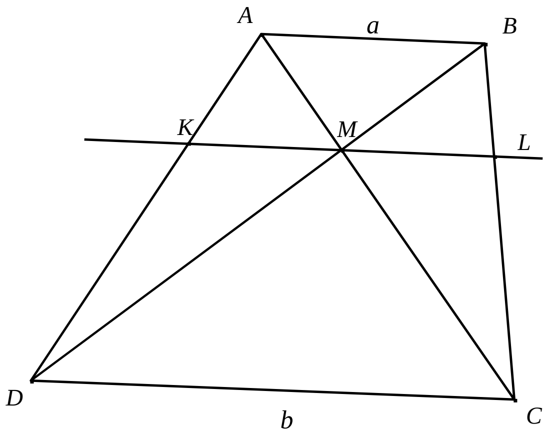
b) Déterminer le rapport $\dfrac{MA}{MC}$.

c) En déduire la valeur de ML. Répondre aux autres questions.

3. Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique des nombres 3 et 4,5 (on donnera, si nécessaire, les valeurs arrondies au millième).

4. Parmi les quatre moyennes précédentes, quelle est celle qui donne la valeur exacte de la longueur KL ?

<u>B – Généralisation : « base moyenne » d'un trapèze</u>



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point M.
La parallèle à (AB) passant par M coupe les côtés $[AD]$ et $[BC]$ respectivement en K et L.
On note : $AB = a$ et $CD = b$.

Le but du problème est de calculer la longueur KL, uniquement en fonction de a et b.

1. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABD, montrer que : $\dfrac{a}{KM} = 1 + \dfrac{MB}{MD}$.

(On pourra utiliser l'égalité suivante : $DB = DM + MB$.)

2. Par un raisonnement analogue, montrer que : $\dfrac{a}{ML} = 1 + \dfrac{MA}{MC}$.

3. En utilisant une autre configuration, exprimer les rapports $\dfrac{MB}{MD}$ et $\dfrac{MA}{MC}$ en fonction de a et b.

4. Déduire des questions précédentes l'égalité : $\dfrac{1}{KM} = \dfrac{1}{ML} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

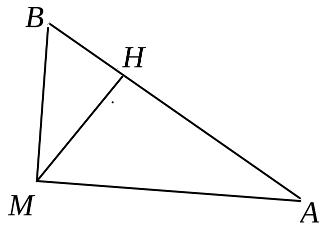
5. Montrer que le point M est le milieu du segment $[KL]$, puis que la longueur KL est la moyenne harmonique des longueurs a et b. À l'aide d'une « évidence géométrique », comparer la moyenne harmonique de deux nombre à chacun de ces nombres.

6. Quelle est la nature du trapèze lorsque $a = b$? Que devient la longueur KM dans ce cas-là ? En déduire que la moyenne harmonique des deux nombres coïncide avec la moyenne arithmétique lorsque ces deux nombres sont égaux.

<u>Note</u> : du fait de la propriété établie dans la question **5**, on peut qualifier le segment $[KL]$ de « base moyenne » du trapèze.

PROBLÈME N° 10 : Hauteur d'un triangle rectangle et moyenne géométrique

Objectif, niveau et difficultés – C'est un problème classique faisant intervenir la moyenne géométrique. Il est incontournable au collège comme au lycée, car la configuration à l'étude permet la construction d'un segment de longueur $\sqrt{ab}$ (c'est le segment [*MH*]) à partir de deux autres de longueurs respectives *a* et *b* (les segments [*AH*] et [*BH*]). Une partie de l'étude peut être abordée en 5$^{\text{ème}}$ (où l'on peut montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{HMB}$ ont la même mesure), les deux premières méthodes sont possibles en 3$^{\text{ème}}$, la dernière, basée sur des triangles semblables, est du niveau de la 2$^{\text{nde}}$. L'étude peut être poursuivie en enseignement de spécialité de Terminale S, où il est intéressant d'étudier les différentes similitudes transformant l'un des triangles en l'autre (les trois triangles *AMB*, *AHM* et *MHB* étant semblables).



Dans un triangle *AMB* rectangle en *M*, *H* est le pied de la hauteur issue de *M*.
On pose $AH = a$ et $BH = b$.
L'objectif de l'exercice est d'exprimer ***MH en fonction de a et b*** par trois méthodes différentes.

1$^{\text{ère}}$ méthode

A - Dans un cas particulier
Ici, on prend *AH* = 3 cm et *HB* = 2 cm.

1. Faire une figure.

2. a) Montrer que $AM^2 = MH^2 + 9$ et que $MB^2 = MH^2 + 4$.
   b) En déduire l'égalité : $AB^2 = 2 \times MH^2 + 13$.
   c) Calculer alors la valeur exacte de la hauteur *MH*.
   d) Montrer que l'on a l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.

3. Application : en déduire une construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\sqrt{6}$ à partir d'un segment [*AB*] mesurant 5 cm et d'un point *H* placé sur [*AB*] à 3 cm du point *A*. (Faire la figure en laissant les traits de constructions.)

B – Dans le cas général
Dans cette partie, les longueurs *AH* et *BH* ne sont pas précisées ; on note $AH = a$ et $BH = b$.

1. Appliquer le théorème de Pythagore dans les trois triangles de la figure.

2. Prouver alors l'égalité : $AB^2 = 2 \times MH^2 + a^2 + b^2$.

3. En déduire une expression réduite de *MH* en fonction des nombres *a* et *b*.
   (On pourra écrire : $AB^2 = (AH + HB)^2 = ...$.)

<u>Définition</u> : étant donnés deux nombres positifs *a* et *b*, le nombre $g = \sqrt{ab}$ est appelé la *moyenne géométrique* des nombres *a* et *b*.

<u>2ème méthode</u> :

<u>A – Dans un cas particulier</u> :

On pourra utiliser les deux résultats suivants : $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$.

Ici, on considère un triangle *AMB* rectangle en *M* tel que : $\widehat{MAB} = 60°$ et $AM = 4$ cm.

1. Faire une figure.

2. a) Calculer la longueur *AH*.
   b) Calculer la longueur *MH*, et mettre le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où *a* et *b* sont entiers et *b* est le plus petit possible.

3. a) Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{HMB}$.
   b) En déduire la longueur *HB*.

4. Montrer que l'on a l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.

<u>B – Dans le cas général</u>

1. Montrer que $\widehat{MAH} = \widehat{HMB}$.

2. En exprimant $\tan \widehat{MAH}$ dans deux triangles différents, prouver l'égalité : $MH^2 = AH \times HB$.
   On retrouve alors la même expression de *MH* en fonction de *a* et *b* qu'à la fin de la 1ère méthode, ce qui est rassurant ! Ainsi, *MH* est la moyenne géométrique des nombres *a* et *b*.

<u>3ème méthode</u> : (niveau Seconde)

1. Montrer que les triangles *AHM* et *MHB* sont semblables.

2. En déduire l'égalité $MH^2 = AH \times HB$.

PROBLÈME N° 11 : Toutes les moyennes dans une même figure

Objectif, niveau et difficultés – L'étude de cette configuration très riche est envisageable avec les outils de la classe de 3ème, mais elle ne serait pas méprisable en 2nde. Ce problème sera repris et poursuivi dans le problème 13, où l'on envisage en outre de comparer géométriquement les quatre moyennes envisagées.

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

1. Faire une figure de belle taille d'après la description suivante :
   « Soit [AB] un segment quelconque de milieu O. Tracer un demi-cercle (Γ) de diamètre [AB]. On considère H un point quelconque du segment [OA], distinct de O et de A. La perpendiculaire en H à la droite (AB) coupe le demi-cercle (Γ) en M. »
   Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

   On pose : $AH = a$ et $HB = b$ (avec $a < b$).

2. a) Calculer OM en fonction de a et de b.
   b) La longueur [OM] représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

3. a) Montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{BMH}$ ont la même mesure.
   b) En déduire l'égalité : $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{HB}{MH}$, puis exprimer MH en fonction de a et b.
   c) La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

4. Soit (Γ') le demi-cercle de centre O passant par H et qui coupe le segment [OM].
   La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe (Γ') en G.
   a) Exprimer le rayon de (Γ') en fonction de a et de b ? En déduire que $OG = \dfrac{b-a}{2}$.

b) En déduire une expression de MG en fonction de a et b.

c) La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

5. a) On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$.
La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K.
Exprimer MK en fonction de a et de b.

b) La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

PROBLÈME N° 12 : Une visualisation graphique

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de remarquer que les quatre moyennes envisagées relèvent d'une seule et même problématique, qui est en fait d'ordre fonctionnel. La question 1 ne prend tout son intérêt que si une autre des questions est envisagée. Les questions 1 et 2 peuvent être posées en classe de 3ème mais sont difficiles à exploiter à ce niveau. Il est plutôt conseillé d'aborder les questions 1, 2, 3 en classe de 2nde ou de 1ère, la question 4 attendra la Terminale : logarithme oblige !

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

L'objectif de ce problème est de visualiser ces moyennes à l'aide de la représentation graphique de fonctions bien choisies.

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = x$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_f) de la fonction f dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?
   c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\dfrac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

2. Soit g la fonction définie pour tout réel x positif par : $g(x) = x^2$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?

c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

3. Soit h la fonction définie pour tout réel x strictement positif par : $h(x) = \frac{1}{x}$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_h) de la fonction h dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?
   c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

4. Soit k la fonction définie pour tout réel x strictement positif par : $k(x) = \ln x$.
   a) Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$. Tracer la courbe représentative (C_k) de la fonction k dans ce repère.
   b) Soit A et B deux points de cette courbe d'abscisses respectives a et b (avec $a > 0$ et $b > 0$). Quelles sont les ordonnées y_A et y_B des points A et B ?
   c) Placer sur la courbe le point M dont l'ordonnée est $\frac{y_A + y_B}{2}$. Quelle est alors l'abscisse du point M ?

<u>Information</u>. Plus généralement, soit F une fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ telle que l'équation $F(x) = 0$ admet une solution unique pour tout réel $x > 0$. Pour tous nombres strictement positifs a et b, on définit la « F-moyenne » des nombres a et b le nombre m_F défini par l'égalité :

$$F(m_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$

Ainsi, les moyennes envisagées dans ce problème sont des cas particuliers de ce type de moyenne, pour des fonctions F bien choisies.

PROBLÈME N° 13 : Comparaison géométrique

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème reprend et approfondit le problème 11, en utilisant pleinement certaines propriétés élémentaires de la configuration étudiée pour comparer les différentes moyennes. Il peut être abordé en $3^{ème}$, avec certaines aides, ou en classe de 2^{nde}. La comparaison des différentes moyennes aux nombres *a* et *b* est d'un abord plus délicat à l'aide de cette configuration ; il vaut mieux l'envisager de façon algébrique, ce qui sera proposé dans le problème suivant.

Définition - Si *a* et *b* sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres *a* et *b* est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres *a* et *b* est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres *a* et *b* est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres *a* et *b* est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

1. Faire une figure de belle taille d'après la description suivante :
   « Soit [*AB*] un segment quelconque de milieu *O*. Tracer un demi-cercle (Γ) de diamètre [*AB*]. On considère *H* un point quelconque du segment [*OA*], distinct de *O* et de *A*. La perpendiculaire en *H* à la droite (*AB*) coupe le demi-cercle (Γ) en *M*. »
   Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

   On pose : $AH = a$ et $HB = b$ (avec $a < b$).

2. a) Calculer *OM* en fonction de *a* et de *b*.
   b) La longueur [*OM*] représente une certaine moyenne des nombres *a* et *b*. Laquelle ?

3. a) Montrer que les angles $\widehat{MAH}$ et $\widehat{BMH}$ ont la même mesure.
   b) En déduire l'égalité : $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{HB}{MH}$, puis exprimer *MH* en fonction de *a* et *b*.
   c) La longueur *MH* représente une certaine moyenne des nombres *a* et *b*. Laquelle ?

4. Soit (Γ') le demi-cercle de centre *O* passant par *H* et qui coupe le segment [*OM*].
   La perpendiculaire en *O* à la droite (*OM*) coupe (Γ) en *G*.

a) Exprimer le rayon de (Γ') en fonction de a et de b ? En déduire que $OG = \frac{b-a}{2}$.

b) En déduire une expression de MG en fonction de a et b.

c) La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

5. a) On considère le point N du segment [OM] tel que $MN = MH$.
   La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment [MH] en K.
   Exprimer MK en fonction de a et de b.

   b) La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Laquelle ?

6. Ranger dans l'ordre croissant les quatre moyennes : m, g, h et q **en utilisant des propriétés à caractère géométrique** qui vous permettront de comparer les longueurs OM, MH, MG et MK. (*Indice* : *« quel est le plus grand côté d'un triangle rectangle ? »*.)

PROBLÈME N° 14 : Comparaison algébrique

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème assez technique est particulièrement recommandé en classe de 2nde, où l'on étudie en détail les problèmes de comparaison. Les outils principalement utilisés sont le théorème de rangement des carrés et les produits remarquables. En collège, on peut s'en tenir à l'aspect numérique et aux conjectures (partie A).

Définition - Si a et b sont deux nombres strictement positifs :

- la moyenne arithmétique des nombres a et b est le nombre : $m = \dfrac{a+b}{2}$;
- la moyenne géométrique des nombres a et b est le nombre : $g = \sqrt{ab}$;
- la moyenne quadratique des nombres a et b est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- la moyenne harmonique des nombres a et b est le nombre : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

A – Approche numérique et conjectures

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant les définitions de m, g, h et q données dans la définition précédente. Détailler les calculs « hors tableau » ou utiliser un tableur.

a	***b***	***m***	***g***	***h***	***q***	
4	16					**cas n°1**
14		8				**cas n°2**
12			6			**cas n°3**
4				6		**cas n°4**
7					5	**cas n°5**

2. Que peut-on conjecturer concernant le rangement des six nombres :

a ; b ; m ; g : h : q.

B - Démonstrations

On se place dans le cas où : $0 < a < b$.

1. a) Exprimer $b^2 - q^2$ en fonction de a et b ; en déduire le signe de $b^2 - q^2$.
   b) Comparer alors b et q.

2. a) Exprimer $q^2 - m^2$ en fonction de a et b, et mettre l'expression sous forme factorisée.
   b) Comparer alors q et m.

3. En déterminant comme précédemment le signe de $m^2 - g^2$, comparer m et g.

4. a) Prouver l'égalité : $g^2 - h^2 = ab \times \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.
   b) Comparer alors g et h.

5. Exprimer $h - a$ en fonction de a et b, puis comparer h et a.

6. Conclure en rangeant dans l'ordre croissant les six nombres a, b, m, g, h et q.

PROBLÈME N° 15 : Comparaison de quelques moyennes de n nombres

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème est plutôt réservé à la classe de Terminale S. Il montre que la question des moyennes est généralisable, et en particulier la comparaison de ces moyennes. Le cas de l'égalité est également envisagé. La question 2, plus difficile sans doute à cause du symbolisme, peut être édulcorée en s'en tenant à quelques valeurs particulières de l'entier *n*.

Définition - Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont *n* nombres réels strictement positifs ($n \geq 2$) :

- la moyenne arithmétique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $m = \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n}$;
- la moyenne géométrique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $g = \sqrt[n]{a_1 \times ... \times a_n}$;
- la moyenne quadratique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre : $q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}}$;
- la moyenne harmonique des nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ est le nombre *h* tel que :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$$

Le but de ce problème est de comparer ces différentes moyennes.

1. Calculer ces différentes moyennes dans le cas où $n = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, et $a_3 = 25$.

2. Comparaison de *q* et *m*
   a) Etant donné *n* nombres strictement positifs $a_1, ..., a_n$ ($n \geq 1$), démontrer l'égalité :
   $$n(a_1^2 + ... + a_n^2) = (a_1 + ... + a_n)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 .$$
   (À défaut d'une démonstration complète, on pourra se contenter de démontrer le résultat pour $n = 2$, pour $n = 3$ et éventuellement $n = 4$.)
   b) En déduire que $m \leq q$.
   c) Dans quel cas a-t-on l'égalité $m = q$?

3. Comparaison de m et g
   a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$.
   b) En appliquant l'inégalité précédente successivement pour les nombres $x = \frac{a_1}{m}$, $x = \frac{a_2}{m}$, …, montrer que $g \leq m$.
   c) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = m$?

4. Comparaison de g et h
   a) En appliquant l'inégalité $g \leq m$ aux nombres $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$, comparer g et h.
   b) Dans quel cas a-t-on l'égalité $g = h$?

PROBLÈME N° 1 : Avec un cercle et une corde

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir un résultat de base : la figure formée par un cercle et une corde admet un axe de symétrie. Ce résultat est à la base d'un grand nombre d'exercices de géométrie. Il peut être abordé en 6ème ou en 5ème.

Soit (c) un cercle de centre *O*. On considère *A* et *B*, deux points distincts du cercle (c).

1. Que désigne le segment [*AB*] pour le cercle (c) ?

2. Tracer la médiatrice (Δ) du segment [*AB*].
   Expliquer pourquoi le point *O* est situé sur la droite (Δ).

3. Considérons un point quelconque *M* de (c). on note *M'* le symétrique de *M* par rapport à (Δ).
   Montrer que le point *M'* est situé sur le cercle (c).

4. Déduire des questions précédentes que la droite (Δ) est un axe de symétrie du segment [AB] et du cercle (c).

PROBLÈME N° 2 : Avec un cercle et deux tangentes

Objectif, niveau et difficultés – Comme pour le problème précédent, l'objectif est d'étudier une configuration clé : celle formée d'un cercle et de deux tangentes. On va établir que cette configuration admet un axe de symétrie, ce qui sera utilisé et exploité dans plusieurs autres problèmes (voir les problèmes 3, 4, 5 de ce thème). Deux méthodes sont proposées : le théorème de Pythagore, et les propriétés de conservation des symétries axiales parties 2 et 3). Tout cela est évidemment lié puisque le théorème de Pythagore est lui-même démontré à partir de certaines propriétés de conservation de ces symétries. Le niveau requis est celui de la 4ème ou de la 3ème.

Première partie : construction des tangentes

On considère un cercle (c) de centre *O*.
Soit *I* un point extérieur à (c) . On considère le cercle (Γ) de diamètre [*OI*].
Le cercle (Γ) coupe le cercle (c) en deux points *A* et *B*.

1. Quelle est la nature des triangles *OAI* et *OBI* ? Justifier la réponse.
2. Que représentent les droites (*IA*) et (*IB*) pour le cercle (c) ?

Info : cette construction est due à Euclide.

Deuxième partie : avec le théorème de Pythagore

1. a) Ecrire la relation de Pythagore dans chacun des deux triangles *AOI* et *BOI*.
   b) En déduire que *IA* = *IB*.
2. Que représente la droite (*OI*) pour le segment [*AB*] ?
3. En déduire que la droite (*OI*) est un axe de symétrie de la figure.

Troisième partie : avec les propriétés de la symétrie axiale

1. Par la symétrie axiale d'axe (*OI*), quelle est l'image du cercle (c) ? Quelle est l'image du cercle Γ par cette même symétrie ?
2. En déduire l'image de *A* par cette symétrie. Retrouver alors le résultat de la deuxième partie, question 2.

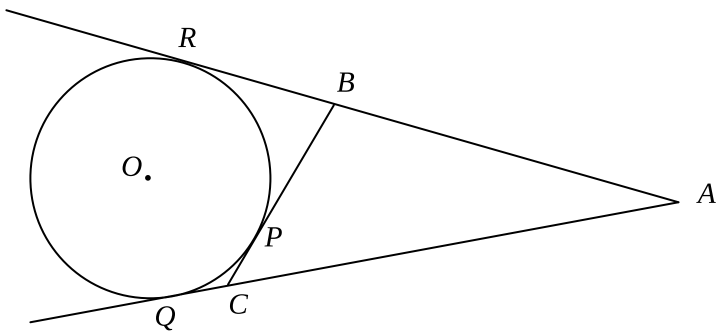
Quatrième partie : une propriété métrique

La droite (*OI*) coupe le cercle (c) en *M* et *N*, avec $IM < IN$.
1. Placer les points *M* et *N* sur la figure.
2. Justifier les égalités : $IM = IO - OA$ et $IN = IO + OA$.
3. En déduire que $IM \times IN = IA^2$.
4. Application : si (c) est un cercle de rayon 2 cm, et si $OI = 5$ cm, calculer la valeur exacte de *IA*.

PROBLÈME 3 : Avec un cercle et trois tangentes (1)

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Il s'agit ici d'utiliser le résultat relatif à un cercle et deux tangentes, et ce à plusieurs reprises. On obtient une propriété métrique intéressante. Le niveau conseillé est celui de la 5ème ou de la 4ème. La partie A est expérimentale ; il est conseillé d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

Dans ce problème, on considère la figure suivante, dans laquelle les droites (*AB*), (*BC*) et (*CA*) sont tangentes au cercle (c), de centre *O*. On note *P*, *Q*, *R* les points de contacts respectifs de ces droites avec le cercle.



Partie A – Construction et expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie

1. <u>Construction de la figure</u>
   Créer un point libre *O* et créer le cercle c de centre *O* et de rayon 3 cm.
   Créer un point libre *A* et tracer le cercle c' de diamètre [*OA*].
   Ce cercle coupe le cercle c en deux points *R* et *Q*.
   Créer les segments [*AR*], [*AQ*], [*OR*] et [*OQ*].
   Que peut-on dire des droites (*AR*) et (*AQ*) ? ………………………………………………….
   ………………………………………………………………………………………………. .

   Créer un point libre *P* sur le cercle c et placer *P* sur l'arc de cercle intérieur au triangle *ARQ*.
   Créer la droite (d) passant par *P* et perpendiculaire à (*OP*).
   Que peut-on dire de cette droite ?...

   Créer les points *B* et *C* intersection de la droite (d) et des droites (*AR*) et (*AQ*).
   Créer le segment [*BC*] puis effacer la droite (d) et le cercle c'.

2. <u>Affichage des longueurs</u>
   Afficher les longueurs des segments [*BR*] et [*BP*], puis [*CQ*] et [*CP*] et enfin [*AR*] et [*AQ*].
   On note *p* le périmètre du triangle *ABC*.
   Créer *p* puis afficher *p*.

3. Conjecture
   Déplacer le point P entre R et Q.
   Observer en même temps les longueurs des segments affichées dans la question 2.
   Quelles conjectures peut-on émettre sur les longueurs des segments ? sur le périmètre p ?
   On peut faire varier les points O et A pour conforter la solidité de cette conjecture.

Partie B – Résolution mathématique

Dans cette partie, on va démontrer les conjectures émises en A-3.

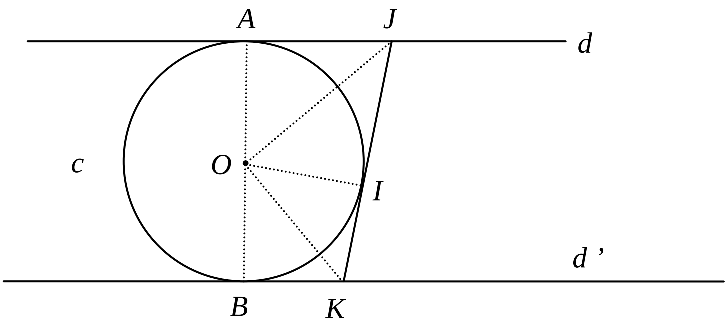
1. Démontrer les égalités $AR = AQ$, puis $BP = BR$ et enfin $CQ = CP$. (On pourra utiliser le fait que la figure formée par un cercle et deux tangentes admet un axe de symétrie.)

2. On suppose que $AR = 6$. En déduire la valeur du périmètre p du triangle ABC.

PROBLÈME N° 4 : Avec un cercle et trois tangentes (2)

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème met à nouveau en scène trois tangentes à un même cercle, dans le cas où deux d'entre elles sont parallèles. Il est également initié par une expérimentation utilisant les TICE. Il peut être posé en 4ème, 3ème ou 2nde.

On considère la figure suivante, dans laquelle [*AB*] est un diamètre du cercle c, de centre *O*, d et d' sont les tangentes au cercle c respectivement en *A* et *B*, *J* est un point variable sur d, la tangente au cercle menée de *J* coupe d' en *K*. On note enfin *I* le point de contact entre la droite (*IJ*) et le cercle (c).



A – Expérimentation et conjecture

Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

Faire afficher la mesure en degré de l'angle $\widehat{JOK}$.

Déplacer le point *J* sur la droite d.

Que peut-on conjecturer sur le triangle *JOK* ?

B – Résolution mathématique

On pourra utiliser le résultat suivant : « La figure formé par un cercle et deux de ses tangentes issues d'un même point admet un axe de symétrie ».

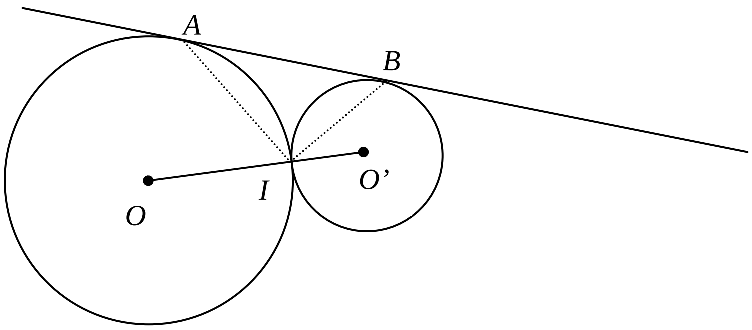
1. Comparer les angles $\widehat{BOK}$ et $\widehat{KOI}$, puis les angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{JOA}$.

2. Démontrer alors le résultat conjecturé dans la partie A.

PROBLÈME N° 5 : Le triangle mystérieux

Objectif, niveau et difficultés – Dans la configuration formée par une droite tangente à deux cercles tangents, le triangle formé par les trois points de contact a une propriété particulière, qui est à l'étude dans ce problème. Deux méthodes différentes sont proposées, utilisant des outils élémentaires. Il peut être abordé en $4^{ème}$, $3^{ème}$ ou 2^{nde}.

Dans la figure suivante, les deux cercles, de centres *O* et *O'*, sont tangents extérieurement en *I*, la droite (*AB*) est tangente aux deux cercles respectivement en *A* et *B*.
Le but de ce problème est d'étudier le triangle *IAB* par deux méthodes différentes.



A – Première méthode : avec les axes de symétrie

1. Tracer la tangente commune au deux cercles en *I*. Cette droite coupe la droite (*AB*) en *J*.
   Comparer les longueurs *JA*, *JI* et *JB*.
   (On pourra utiliser le résultat suivant : « La figure formé par un cercle et deux de ses tangentes issues d'un même point admet un axe de symétrie ».)

2. Conclure sur la nature du triangle *AIB*.

B – Deuxième méthode : avec les angles

On note $a = \widehat{IOA}$.

1. Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{IO'B}$ en fonction de *a*.

2. Pourquoi peut-on affirmer que les triangles *OAI* et *O'BI* sont isocèles ? En déduire une expression des angles à la base de chacun de ces deux triangles en fonction de *a*.

3. Exprimer enfin $\widehat{AIB}$ en fonction de *a*, et conclure sur la nature du triangle *AIB*.

PROBLÈME N° 6 : L'énigme de la couronne

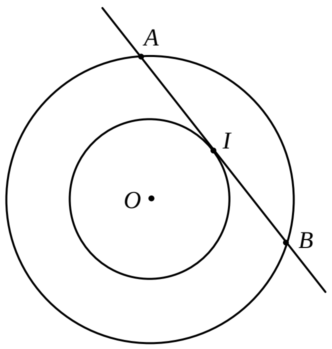
<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – En forme d'énigme, ce problème est un réinvestissement du résultat démontré dans le problème 1 : « la figure formé par un cercle et une corde admet un axe de symétrie ». Il peut être abordé en $4^{\text{ème}}$ ou en $3^{\text{ème}}$.

<u>Énigme</u>

Sur la figure ci-contre, les deux cercles c_1 et c_2 ont le même centre O.
La droite (AB) est tangente en I au cercle c_1.

On donne $AB = 4\,\text{cm}$.

Calculer l'aire de la couronne.



<u>Indications</u>

On note r_1 et r_2 les rayons des cercles, avec $r_1 < r_2$.

1. Exprimer l'aire de la couronne en fonction de r_1 et r_2.
2. Montrer que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$. En déduire la longueur AI.
3. Calculer $r_2^{\,2} - r_1^{\,2}$. En déduire l'aire de la couronne.

PROBLÈME N° 7 : Tangentes à un cercle menées d'un point extérieur

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de mettre en ouvre la propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle pour construire à la règle et au compas les tangentes à un cercle menées d'un point extérieur. C'est une construction de base que l'on trouve chez Euclide, et qui doit impérativement être enseignée en classe de $4^{\text{ème}}$. Elle a déjà été présentée dans le problème 2.

Information

Dans les *Données*, qui est un livre complémentaire au monumental ouvrage que sont *Les Eléments*, EUCLIDE pose le problème suivant : « Etant donné un cercle c de centre *O* et un point *I* extérieur au cercle, construire à la règle non graduée et au compas les tangentes au cercle c issues de *I*.

On considère un cercle (c) de centre *O*.
Soit *I* un point extérieur à (c). On considère le cercle (Γ) de diamètre [*OI*].
Le cercle (Γ) coupe le cercle (c) en deux points *A* et *B*.

1. Quelle est la nature des triangles *OAI* et *OBI* ? Justifier la réponse.

2. Que représentent les droites (*IA*) et (*IB*) pour le cercle (c) ?

3. A-t-on répondu à la question d'Euclide ?

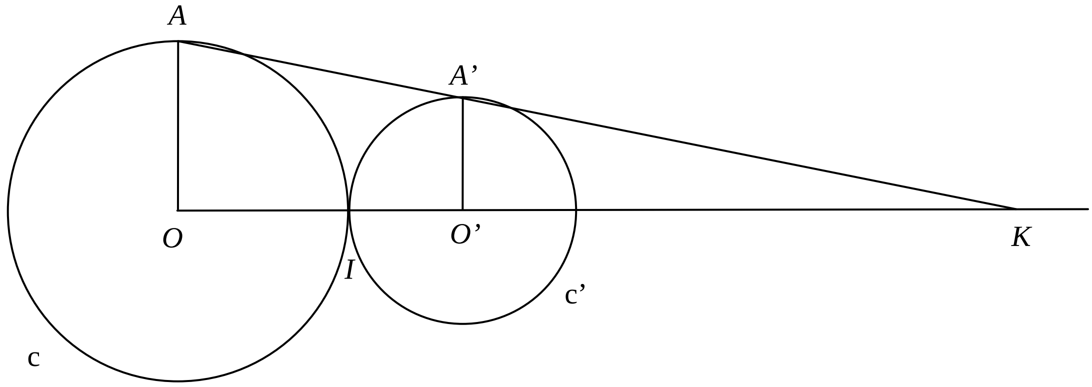
4. Recherche documentaire : à partir de livres ou de sites Internet, rédiger un texte de quelques lignes sur Euclide (époque, lieu, travaux réalisés, importance, …).

PROBLÈME N° 8 : Tangentes communes à deux cercles tangents (1)

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de décrire et de justifier un procédé de construction d'une tangente non triviale à deux cercles tangents. Le procédé décrit s'adapte à deux cercles non tangents, pourvu qu'ils ne soient pas contenus l'un dans l'autre. Il est cependant élémentaire, et n'utilise que les outils du collège. Il peut être abordé dès la 4ème, mais semble mieux adapté à la 3ème ou à la 2nde.

Soit cet c' deux cercles de centres respectifs *O* et *O'*, et qui ne sont pas de même rayon. On suppose que ces deux cercles sont tangents extérieurement en *I*. Le but de ce problème est de construire une tangente commune à ces deux cercles, qui ne passe pas par le point *I*.

1. Sur la figure suivante, on a placé deux points *I* et *A'* sur chacun des deux cercles, de telle sorte que les droites (*OA*) et (*OA'*) soient toutes les deux perpendiculaires à la droite (*OO'*). La droite (*AA'*) coupe alors la droite (*OO'*) en un point *K*. (Nous admettons que ces deux droites sont sécantes.)



   Réaliser la figure, en prenant 5 cm et 2 cm comme rayons respectifs des cercles.

2. Démontrer que le rapport des longueurs $\frac{KO'}{KO}$ est égal à $\frac{2}{5}$.

3. Construire *B'* l'un des points d'intersection du cercle c' avec le cercle de diamètre [*O'K*].
   Que représente la droite (*KB'*) pour le cercle c' ? Justifier la réponse.

4. La parallèle à la droite (*O'B'*) passant par le point *O* coupe la droite (*KB'*) en un point *B*.
   1. Démontrer que le point *B* appartient au cercle c.
   2. En déduire que la droite (*KB'*) est également tangente au cercle c en *B*.

5. Rédiger une conclusion.

PROBLÈME N° 9 : Tangentes communes à deux cercles tangents (2)

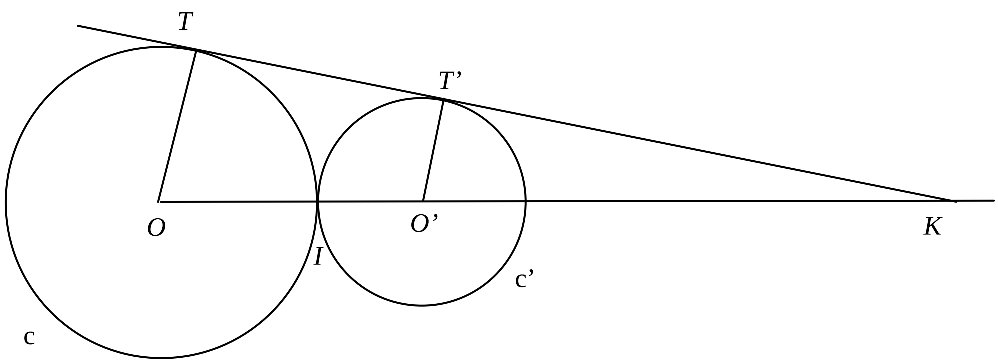
Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de décrire et de justifier un procédé de construction d'une tangente non triviale à deux cercles tangents. Le procédé décrit s'adapte à deux cercles non tangents, pourvu qu'ils ne soient pas contenus l'un dans l'autre. Le problème est analogue au précédent, mais la construction n'est pas donnée au départ. Sa détermination va résulter d'une méthode d'analyse et synthèse. Il est mieux adapté à la 2nde ou à la 1ère S. En série S, il donne également un procédé de construction d'un centre d'homothétie amenant un cercle sur l'autre.

Problème

Soit c et c' deux cercles de centres respectifs *O* et *O'*, de rayons respectifs *r* et *r'*, avec $r' < r$. On suppose que ces deux cercles sont tangents extérieurement en *I*. Le but de ce problème est de construire une tangente commune à ces deux cercles, qui ne passe pas par le point *I*.

A. Analyse du problème

On suppose que la figure est réalisée, et on va en étudier des propriétés.



On note *T* et *T'* les points de contact d'une tangente avec chacun des deux cercles.
La droite (*TT'*) coupe la droite (*OO'*) en *K*. (On admet que ces deux droites sont sécantes.)

1. Démontrer que les points *O*, *I*, *O'* sont alignés.

2. Prouver que les droites (*OT*) et (*O'T'*) sont parallèles.

3. Démontrer l'égalité : $\dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{r'}{r}$.

4. En déduire l'égalité : $KO = \dfrac{r}{r - r'} \times OO'$.

B. <u>Réalisation de la construction</u>

Il s'agit à présent de réaliser une figure correcte.

1. Tracer deux cercles cet c' deux cercles de centres respectifs *O* et *O'*, de rayons respectifs $r = 3$ cm et $r' = 2$ cm, tangents extérieurement en *I*.

   Construire le point *K* de la demi droite [*OO'*) tel que $KO = \dfrac{r}{r - r'} \times OO'$.

2. Construire le cercle de diamètre [*KO'*] ; ce cercle coupe le cercle c' en deux points *T'* et *U'*.

3. Expliquer pourquoi la droite (*KT'*) est tangente au cercle c' en *T'*.

4. La parallèle à (*O'T'*) passant par *O* coupe la droite (*KT'*) en *T*. Montrer que le point *T* appartient au cercle c et que la droite (*KT'*) est tangente au cercle c en *T*.

5. Rédiger une conclusion.

PROBLÈME N° 10 : Cercles tangents à un cercle et une droite

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème est constitué de deux parties. Dans un premier temps, il s'agit de construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée qui ne coupe pas ce cercle. Il y a une double infinité de solutions, selon que le cercle construit est tangent extérieurement (partie I) ou intérieurement (partie III) au premier cercle. L'objectif est ensuite de voir s'il y a un ordre particulier dans tous ces cercles ainsi construits, plus précisément en déterminant le lieu géométrique de leurs centres (on trouve deux paraboles). Le problème est riche, il doit comporter une partie expérimentale avec un logiciel de géométrie dynamique (partie II, question 1). Il peut être abordé en 1ère S ou Terminale S.

On se donne un cercle c de centre A et de rayon r, et une droite d ne coupant pas le cercle c.

Dans la **Partie I** de ce problème, on construit un cercle Γ vérifiant la condition :
(p) : « Γ est tangent à la fois à c et d, le cercle c étant à l'extérieur de Γ ».
Dans la P**artie II**, on étudie le lieu géométrique des centres Ω de tous les cercles Γ vérifiant cette condition.
Dans la **Partie III**, on généralise le problème en étudiant le cas où c est intérieur à Γ.

Partie I

On considère un point *M* de d, et on s'intéresse au cercle Γ vérifiant la condition (p), et tangent à la droite d en *M*.

1. Justifier que le centre Ω de Γ se trouve sur la droite Δ, perpendiculaire à d en *M*.

2. On note *H* le point d'intersection du cercle c et du segment $[\Omega A]$.
   a) Justifier que le point Ω est équidistant des points *M* et *H*.
   b) En déduire une relation entre les distances ΩM et ΩA.
   c) Conclure en en indiquant une construction du point Ω et du cercle Γ (on pourra utiliser une droite d', parallèle à d et telle que la distance de d à d' égale r).

Partie II

Dans cette partie, on munit le plan d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère que la droite d est l'axe (Ox), et que le point *A*, centre du cercle c, a pour coordonnées $(0;a)$ (a réel strictement supérieur à r).

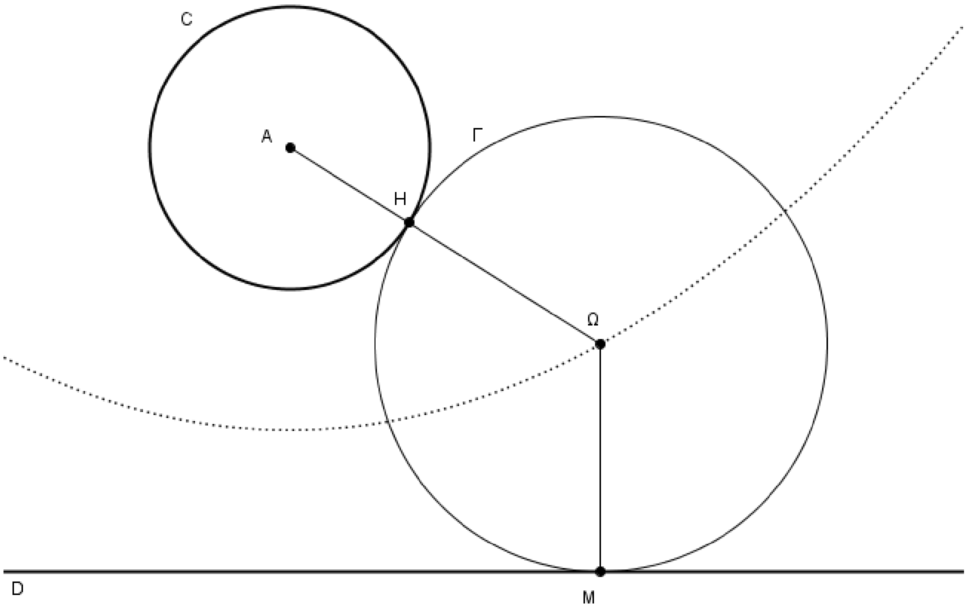
1. a) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure étudiée en Partie I.
   b) Conjecturer le lieu géométrique du centre Ω de Γ lorsque le point *M* décrit la droite d.

2. Démontrer cette conjecture en exprimant les coordonnées du point Ω en fonction de l'abscisse x du point *M*.

***Variante pour la question* 2.**

2. Démontrer cette conjecture en vérifiant que, lorsque *M* décrit $\mathcal{D}$, le point Ω décrit la courbe représentative de la fonction f définie sur 3 par $f(x) = \dfrac{x^2}{2(a+r)} + \dfrac{a-r}{2}$.

   Note : on obtient une figure analogue à la figure ci-dessous.



Partie III

Reprendre la **Partie II** en considérant désormais la condition :

(p') : « Γ est tangent à la fois à c et à d, le cercle c étant à l'intérieur de Γ ».

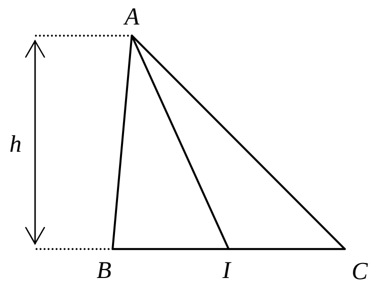
PROBLÈME N° 1 : Étude de quelques figures clés

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de quatre exercices pratiquement indépendants. Le premier est un véritable résultat de base, il est indispensable de le traiter en classe de 5ème. Le deuxième peut également être abordé à ce niveau, en admettant le résultat du premier. Le troisième exercice n'utilise que la forme donnant l'aire d'un triangle ; il est dû à Euclide, qui l'utilise abondamment dans d'autres démonstrations. Il peut également être présenté dès la 5ème. Le quatrième exercice, plus complexe, doit attendre la propriété de concours des médianes pour être abordé. Il est plutôt conseillé en classe de 4ème.

A - Aire et médiane d'un triangle

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le milieu du côté $[BC]$.
On note h la hauteur du triangle, relative à la base $[BC]$.

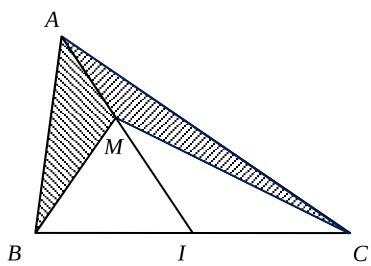
1. Montrer que l'aire du triangle ABI est égale à $\dfrac{BI \times h}{2}$.
2. En déduire que les triangles ABI et AIC ont la même aire.
3. Compléter la phrase : « Dans un triangle, une médiane partage ce triangle en ……………………………………………. ».



B – Le fer de lance

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le milieu du côté $[BC]$, M est un point quelconque du segment médian $[AI]$.

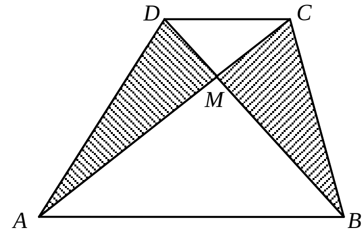
1. Comparer les aires des triangles ABI et ACI.
2. Comparer les aires des triangles MBI et MCI.
3. Conclure relativement aux aires des deux triangles hachurés.



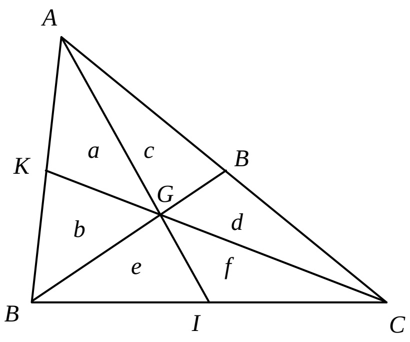
C – Le nœud pap'

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$. Ses diagonales se coupent en un point M.

1. Comparer les aires des triangles ABD et ABC.
2. Exprimer l'aire du triangle ABD comme somme des aires de deux autres triangles. Procéder de même avec l'aire du triangle ACD.
3. Comparer alors les aires des deux triangles hachurés.



D – L'ULM



Dans un triangle *ABC*, *I*, *J*, *K*, sont les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*CA*] et [*AB*]. *G* est le centre de gravité.
On note, comme sur la figure, *a*, *b*, *c*, *d*, *e, f* les aires des six petits triangles délimités par les trois médianes. Le but de cet exercice est de montrer que ces six aires sont égales.

<u>1ère méthode</u>

a) En utilisant la partie A, comparer *a* et *b*, puis *c* et *d*, et enfin *e* et *f*.
b) Démontrer que les droites (*KB*) et (*BC*) sont parallèles. En déduire, en utilisant la partie C, que $b = d$.
c) Montrer, de même, que $a = f$.
d) Conclure.

<u>2ème méthode</u>

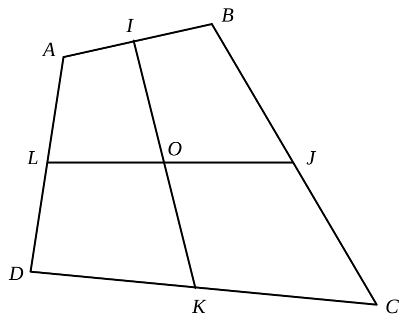
a) En utilisant la partie A, comparer *a* et *b*, puis *c* et *d*, et enfin *e* et *f*.
b) En utilisant la partie B, comparer $a + b$ et $c + d$. En déduire que $a = b = c = d$.
c) Conclure.

PROBLÈME N° 2 : Partage d'un quadrilatère

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème envisage plusieurs propriétés d'un quadrilatère quelconque, avec les milieux des côtés. Deux d'entre elles concernent les aires, l'autre est le théorème de Varignon, qui est bien connu. Le niveau conseillé est celui de la classe de 4ème.

Rappel : dans un triangle, chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

On considère la figure ci-contre, où *ABCD* est un quadrilatère quelconque, *I*, *J*, *K*, *L* sont les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*]. Les « segments médians » [*IK*] et [*JL*] se coupent en *O*.



1. Une première égalité d'aires
   a) Comparer les aires des triangles *OAI* et *OIB*, puis *OBJ* et *OJC*, puis *OCK* et *OKD*, et enfin *ODL* et *OLA*.
   b) En déduire l'égalité :

$$\boxed{\text{aire }(OIAL) + \text{aire }(OJCK) = \text{aire }(OIBJ) + \text{aire }(OKDL)}.$$

2. Le théorème de Varignon
   a) Démontrer que les droites (*IL*) et (*BD*) sont parallèles et que $IL = \frac{1}{2} \times BD$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère *IJKL* ? Justfier la réponse. (Ce résultat est appelé « théorème de Varignon ».)
   c) En déduire que *O* est le milieu de chacun des segments [*IK*] et [*JL*].
   d) Montrer que les quatre triangles *OIJ*, *OJK*, *OKL*, *OLI* ont la même aire.

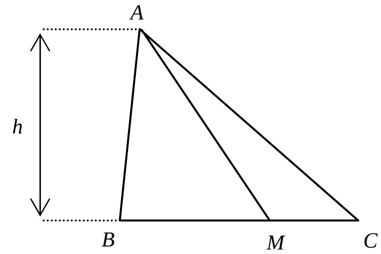
3. Une deuxième égalité d'aires
   En utilisant les questions 1 et 2, démontrer l'égalité :

$$\boxed{\text{aire }(AIL) + \text{aire }(CJK) = \text{aire }(BIJ) + \text{aire }(DKL)}$$

PROBLÈME N° 3 : Découpage d'un triangle (1)

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir une propriété classique du triangle en termes d'aire. Cette propriété est hélas méconnue en général des élèves du lycée ; elle est pourtant extrêmement simple, sa preuve n'utilise que les outils de la 5$^{\text{ème}}$. Cependant, la démonstration comporte une partie de calcul littéral qui fait que ce problème est plutôt recommandé en 4$^{\text{ème}}$ ou en 3$^{\text{ème}}$.

Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle, *M* est un point du côté [*BC*].
On note *h* la hauteur issue de *A*.



1. Question préliminaire

   Montrer que l'aire du triangle *AMB* est égale à $\dfrac{MB \times h}{2}$, et que l'aire du triangle *AMC* est égale à $\dfrac{MC \times h}{2}$.

2. Deux cas particuliers

   a) On suppose que *M* est le milieu de [*BC*].
   Montrer que les triangles *AMB* et *AMC* ont la même aire.

   b) On suppose que $MB = 2 \times MC$.
   Montrer que l'aire du triangle *AMB* est le double de celle du triangle *AMC*.

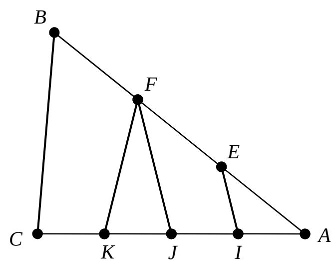
3. Cas général : *M* est un point quelconque du segment [*BC*], distinct de *B* et *C*

   Démontrer l'égalité : $\boxed{\dfrac{\text{aire }(AMB)}{\text{aire }(AMC)} = \dfrac{MB}{MC}}$.

4. Application

   Sur la figure ci-contre, le segment [*AB*] a été découpé en trois parties égales, le segment [*AC*] en quatre parties égales.

   Si l'aire du triangle *AEI* est égale à 1, que vaut l'aire du triangle *ABC* ? du triangle *AFK* ? du triangle *FKJ* ?



PROBLÈME N° 4 : Découpage d'un triangle (2) et propriété caractéristique de la médiane

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Le but de ce problème est de caractériser la médiane d'un triangle en termes d'aire. Il n'utilise que des outils du collège (aire d'un triangle et calcul fractionnaire). Il est cependant difficile, notamment parce qu'il utilise le calcul littéral, et fait intervenir certains quotients. Il peut être abordé en 3$^{\text{ème}}$ (en devoir à la maison) pour les bons élèves, ou en 2$^{\text{nde}}$.

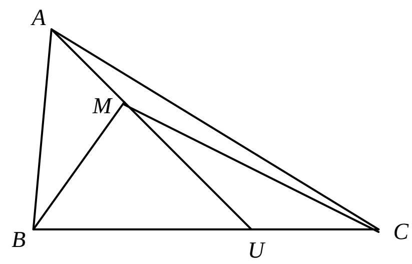
Question préliminaire

On considère deux fractions égales $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{d}$, avec $b \neq d$.

1. Cas particulier avec $\frac{14}{21}$ et $\frac{2}{3}$. Vérifier que l'on a : $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = \frac{14-2}{21-3}$.
2. Cas général : on pose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

   Vérifier l'égalité $(a-c) = k(b-d)$. En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

Problème



On considère la figure ci-contre, où *M* est un point intérieur au triangle *ABC*. La droite (*AM*) coupe le segment [*BC*] en *U*.

1. a) On note *h* la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*.
   Exprimer l'aire du triangle *ABU* et du triangle *ACU* en fonction de *h* et des longueurs *BU* et *CU*.

   b) En déduire une expression du quotient $\frac{\text{aire}(ABU)}{\text{aire}(ACU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

2. Procéder de même pour obtenir une expression du quotient $\frac{\text{aire}(MBU)}{\text{aire}(MCU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

3. Démontrer à l'aide de la question préliminaire l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)} = \frac{UB}{UC}}$.

4. <u>Propriété caractéristique de la médiane</u>

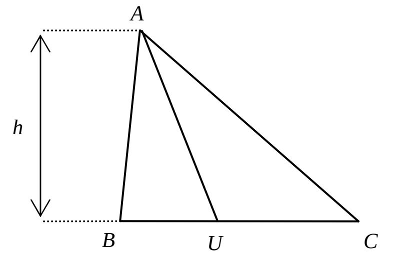
a) On suppose dans cette question que M appartient à la médiane issue de A.
Quelle est alors la position du point U sur le segment $[BC]$?
En déduire que : $\boxed{\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)}$.

b) <u>Réciproque</u>
On suppose dans cette question que : $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$.
Démontrer que M appartient à la médiane issue de A.

PROBLÈME N° 5 : Le théorème du pied de la bissectrice

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème assez technique est envisageable en 3ème, il est plutôt recommandé en classe de 2nde. Les outils utilisés sont pourtant modestes : ils se limitent à la formule donnant l'aire d'un triangle et à quelques éléments de calcul littéral. Le résultat est un classique de la géométrie, qui offre de nombreuses applications. L'une d'entre elles est proposée dans la question 4.

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle, la droite (AU) est la bissectrice issue de A dans le triangle.
On note h la hauteur du triangle, relative à la base [BC].



1. Une première égalité
   On note h la hauteur du triangle issue du sommet A.
   a) Montrer que l'aire du triangle AUB est égale à $\frac{UB \times h}{2}$, et que l'aire du triangle AUC est égale à $\frac{UC \times h}{2}$.
   b) Démontrer l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire }(AUB)}{\text{aire }(AUC)} = \frac{UB}{UC}}$.

2. Une deuxième égalité
   a) Justifier le fait que le point U est situé à la même distance des droites (AB) et (AC). On note d cette distance commune.
   b) Montrer que l'aire du triangle AUB est égale à $\frac{AB \times d}{2}$, et que l'aire du triangle AUC est égale à $\frac{AC \times d}{2}$.
   c) Démontrer l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire }(AUB)}{\text{aire }(AUC)} = \frac{AB}{AC}}$.

3. Déduire des questions précédentes que : $\boxed{\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}}$.

4. Application : ABC est un triangle rectangle et isocèle en B tel que $BC = 1$. La bissectrice issue de A coupe le côté [BC] en U. Démontrer que $BU = \sqrt{2} - 1$.

Autour de l'aire d'un triangle
A – Comparaison d'aires

PROBLÈME N° 6 : Prolongements d'un triangle

<u>Objectif, niveau et difficultés</u> – Ce problème dont le résultat est surprenant, n'utilise que le rappel comme outil. Il peut être abordé en 5ème (en devoir à la maison, ou sous la forme d'une énigme). Bien entendu, il ne déparerait pas en 4ème ou en 3ème.

<u>Rappel</u> : dans un triangle, chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

<u>Problème</u>
ABC est un triangle, *I*, *J* et *K* sont les symétriques respectifs de *B* par rapport à *C*, de *C* par rapport à *A* et de *A* par rapport à *B*.
Le but de ce problème est d'établir que : $\boxed{\text{aire }(IJK) = 7 \times \text{aire }(ABC)}$.

<u>Questions</u>
1. Réaliser une figure.

2. Comparer les aires des triangles *ABC* et *ACI*, puis celles des triangles *ABC* et *ABJ*.

3. Comparer les aires des triangles *ABC* et *BCK*.

4. De même, comparer les aires restantes, puis conclure.

PROBLÈME N° 7 : Une propriété du triangle équilatéral

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème dont le résultat est surprenant, n'utilise que le rappel comme outil. Il peut être abordé en 5ème (en devoir à la maison, ou sous la forme d'une énigme). Bien entendu, il ne déparerait pas en 4ème ou en 3ème.

Lire le problème ci-dessous, puis répondre aux questions.

Problème

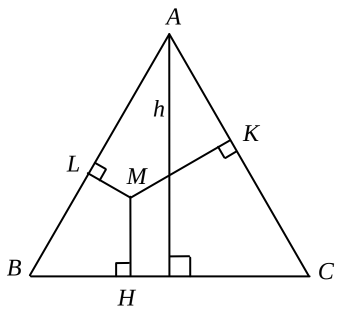
Un agriculteur possède un champ ayant la forme d'un triangle équilatéral. Il désire creuser un puits à l'intérieur de celui-ci pour irriguer, à l'aide de tuyaux, les bords de son terrain. Il veut utiliser le minimum de tuyaux.

Doit-il privilégier un emplacement plutôt qu'un autre pour creuser son puits ? Si oui, lequel ?

Questions

Pour répondre à ces questions, on considère un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur à ce triangle. On note H, K et L les pieds des hauteurs issues de M respectivement des triangles BCM, ACM et ABM.

On désigne par h la hauteur du triangle ABC.



1. Faire une figure.

2. En exprimant de deux façons l'aire du triangle ABC, montrer que : $MH + MK + ML = h$.

3. Aidez cet agriculteur à faire son choix…

PROBLÈME N° 8 : Triangles ayant deux hauteurs de même longueur

Objectif, niveau et difficultés – On connaît déjà plusieurs caractérisations d'un triangle isocèle : par les longueurs des côtés, par les mesures des angles, par la confusion de deux droites remarquables, ….. Ce problème en établit une autre : par l'égalité des longueurs de deux des hauteurs. Il peut être posé en $5^{ème}$ (avec de l'aide), en $4^{ème}$ ou en $3^{ème}$.

Problème

Le but de ce problème est de déterminer la nature d'un triangle *ABC* ayant deux hauteurs [*BH*] et [*CK*] de même longueur.

1. Réalisation d'une figure
   a) Exécuter le programme de construction suivant :
   – tracer un segment [*BH*], puis la droite perpendiculaire en *H* à la droite (*BH*) ;
   – placer sur cette droite un point *C* distinct de *H* ;
   – tracer le cercle de centre *C* et de rayon *BH*, puis le cercle de diamètre [*BC*] ; nommer *K* l'intersection des deux cercles qui se trouve du même côté que *H* par rapport à la droite (*BC*) ;
   – nommer *A* le point d'intersection des droites (*CH*) et (*BK*).

   b) Prouver que sur la figure précédente, on a bien $BH = CK$, et que les droites (*BH*) et (*CK*) sont bien les hauteurs du triangles *ABC* issues de *B* et *C*.

2. Conjecture
   Émettre une conjecture sur la nature du triangle *ABC*.

3. Démonstration
   On pose $h = BH = CK$; c'est la longueur commune des hauteurs issues de *B* et de *C*.

   a) Exprimer de deux façons différentes l'aire du triangle *ABC* en fonction de *h*, d'abord en prenant pour base [*AC*], puis en prenant pour base [*AB*].
   b) En déduire une égalité qui permettra de conclure sur la nature du triangle *ABC*.

PROBLÈME N° 9 : Triangle : aire, périmètre et rayon du cercle inscrit

Objectif, niveau et difficultés – Ce problème établit une relation classique dans le triangle, avec quelques applications. La généralisation proposée en B peut s'étendre à un polygone quelconque admettant un cercle inscrit. Il peut être posé en 5ème (avec des valeurs numériques), en 4ème, 3ème et 2nde avec les valeurs littérales.

A. Le cas d'un triangle

1. Le résultat

   ABC est un triangle. On note *S* son aire, *p* son demi-périmètre, et *r* le rayon de son cercle inscrit. L'objectif est de trouver une relation entre *S*, *p* et *r*.

   a) Construire un triangle quelconque *ABC*, puis son cercle inscrit dont on notera *I* le centre.
   b) Exprimer en fonction de *r*, et des longueurs *AB*, *AC* et *BC*, les aires des triangles *AIB*, *AIC* et *BIC*.
   c) Démontrer alors l'égalité : $\boxed{S = p \times r}$.

2. Applications (niveau 3ème, 2nde)
   a) Soit *ABC* un triangle isocèle et rectangle en *A*, tel que $AB = 2$. Démontrer que le rayon du cercle inscrit à ce triangle est égal à $2-\sqrt{2}$.
   b) Soit *ABC* un triangle rectangle en *A* tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. Montrer que le rayon de son cercle inscrit est un nombre rationnel.

B. Le cas d'un quadrilatère

1. Condition d'existence du cercle inscrit

   On dit qu'un quadrilatère *ABCD* admet un cercle inscrit s'il existe un cercle tangent à chacun des quatre côtés du quadrilatère.
   a) Montrer que la condition précédente est réalisée si et seulement si les quatre bissectrices du quadrilatère sont concourantes.
   b) Montrer qu'un losange admet un cercle inscrit.
   c) Donner un exemple de quadrilatère qui n'admet pas de cercle inscrit.

2. Généralisation de la propriété

   Soit *ABCD* un quadrilatère qui admet un cercle inscrit. On note comme précédemment *r* le rayon de ce cercle, *S* l'aire du quadrilatère, *p* son demi-périmètre.
   Démontrer à nouveau l'égalité : $\boxed{S = p \times r}$.

Autour de l'aire d'un triangle
B - Les aires : un outil pour la géométrie

PROBLÈME N° 10 : Démonstration du concours des médianes d'un triangle

Objectif, niveau et difficultés – La démonstration proposée n'est pas la plus classique ; elle utilise les aires. Le début reprend le problème 4, avec une caractérisation de la médiane en termes d'aire. Le problème est relativement complexe, notamment en raison de l'utilisation du calcul littéral. Il est conseillé en $3^{\text{ème}}$ (de bon niveau) et en 2^{nde}.

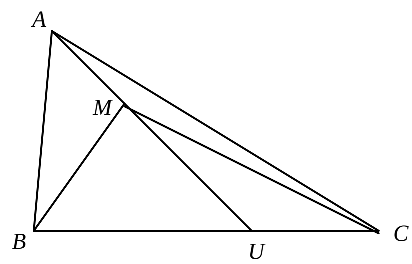
Question préliminaire

On considère deux fractions égales $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{d}$, avec $b \neq d$. On pose $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

Vérifier l'égalité $(a-c) = k(b-d)$. En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

Première partie : propriété caractéristique de la médiane d'un triangle

On considère la figure ci-contre, où *M* est un point intérieur au triangle *ABC*. La droite (*AM*) coupe le segment [*BC*] en *U*.



1. a) On note *h* la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*.
   Exprimer l'aire du triangle *ABU* et du triangle *ACU* en fonction de *h* et des longueurs *BU* et *CU*.
   b) En déduire une expression du quotient $\frac{\text{aire}(ABU)}{\text{aire}(ACU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

2. Procéder de même pour obtenir une expression du quotient $\frac{\text{aire}(MBU)}{\text{aire}(MCU)}$ à l'aide des longueurs *BU* et *CU*.

3. Démontrer à l'aide de la question préliminaire l'égalité : $\boxed{\frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)} = \frac{UB}{UC}}$.

4. Propriété caractéristique de la médiane
   a) On suppose dans cette question que *M* appartient à la médiane issue de *A*.
   Quelle est alors la position du point *U* sur le segment [*BC*] ?
   En déduire que : $\boxed{\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)}$.

b) Réciproque

On suppose dans cette question que : $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$.

Démontrer que *M* appartient à la médiane issue de *A*.

Deuxième partie : démonstration du concours des médianes

Soit *ABC* un triangle, *A'*, *B'*, *C'* les milieux des côtés [*BC*], [*CA*], [*AB*].
Les segments médians [*AA'*] et [*BB'*] se coupent en *G*.

1. En utilisant le fait que *G* appartient au segment [*AA'*], justifier l'égalité :
$$\text{aire}(ABG) = \text{aire}(ACG).$$

2. Démontrer de même que : $\text{aire}(ABG) = \text{aire}(BCG)$.

3. En déduire une nouvelle égalité d'aires, et démontrer que *G* appartient à la médiane (*CC'*).

4. Quelle propriété remarquable du triangle vient d'être démontrée ?

PROBLÈME N° 11 : Un alignement dans le trapèze

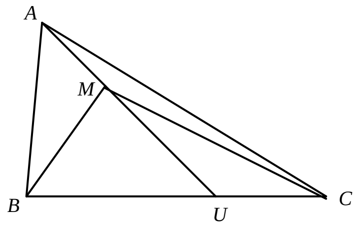
Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit de prouver, dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, l'alignement classique de quatre points : les milieux des bases, les points d'intersection des diagonales et des côtés non parallèles. Le résultat admis n'étant pas si simple, ce problème est conseillé en classe de 2^nde^ ou de 1^ère^ S. D'autres démonstrations sont intéressantes (Thalès, les homothéties, la géométrie analytique, …).

Résultat admis

Soit M un point intérieur à un triangle ABC. Alors :

– si M appartient à la médiane issue de A, alors $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$;

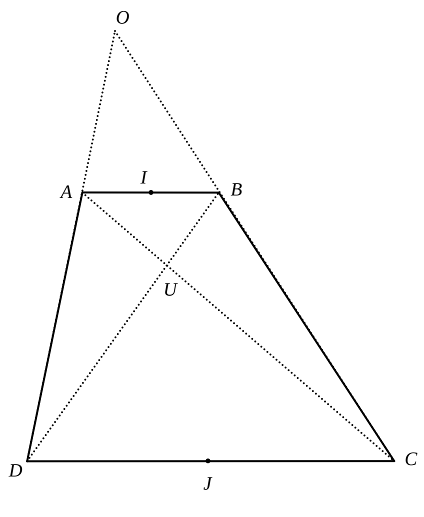
– réciproquement, si $\text{aire}(AMB) = \text{aire}(AMC)$, alors M appartient à la médiane issue de A.



Problème

On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, qui n'est pas un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs des bases $[AB]$ et $[DC]$. On suppose que $AB < CD$.

Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en O, les diagonales (AC) et (BD) se coupent en U.



1. Alignement de O, I, J
   a) Comparer les aires des triangles OIA et OIB.
   b) Comparer les aires des triangles DIA et CIB.
   c) Comparer alors les aires des triangles OID et OIC.
   d) En déduire que les points O, I, J sont alignés.

2. Alignement de I, U, J
   On note A', I' et B' les symétriques de A, I et B par rapport à U.
   a) Démontrer que $B'A'CD$ est un trapèze et que I' est le milieu de $[A'B']$.
   b) En déduire, en utilisant la question 1, que U, I', J sont alignés.
   c) Prouver alors que I, U, J sont alignés.

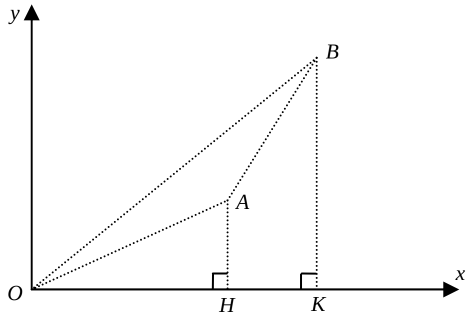
3. Conclusion
   Formuler une conclusion.

PROBLÈME N° 12 : Une condition analytique d'alignement

Objectif, niveau et difficultés – Il s'agit d'établir de façon originale, en utilisant les aires, la classique condition d'alignement de trois points. Bien entendu, cette démonstration s'adapte à la condition de colinéarité de deux vecteurs, souvent admise. La présence du calcul littéral ainsi que la problématique de l'alignement placent ce problème au niveau de la classe de 2[nde].

Dans un repère d'origine *O*, supposé orthonormal, on considère les points $A(a,a')$ et $B(b,b')$.
Le but de ce problème est d'obtenir une condition portant sur *a*, *a'*, *b*, *b'* pour exprimer que les trois points *O*, *A*, *B* sont alignés.

On supposera pour fixer les idées que $a \leq b$ et $a' \leq b'$. Dans tous les autres cas, on pourra adapter sans difficulté la méthode décrite dans le questionnement.



Les parallèles à (*Oy*) menées de *A* et *B* rencontrent l'axe (*Ox*) respectivement en *H* et *K*.

1. Expliquer pourquoi la condition « *O*, *A*, *B* sont alignés » équivaut à la condition « le triangle *OAB* a une aire égale à 0 ».

2. Justifier l'égalité : $\text{aire}(OAB) = \text{aire}(OBK) - \text{aire}(OAH) - \text{aire}(ABKH)$.

3. Exprimer l'aire du triangle *OBK* en fonction de *b* et *b'*.

4. Exprimer l'aire du triangle *OAH* en fonction de *a* et *a'*.

5. Quelle est la nature du quadrilatère *ABKH* ?
   En déduire que : $\text{aire}(ABKH) = (b-a) \times \dfrac{(b'+a')}{2}$.

6. Démontrer alors que : $\boxed{\text{aire}(OAB) = \dfrac{1}{2}(ab' - ba')}$.

7. En déduire une condition d'alignement des trois points *O*, *A*, *B*.