Algorithmique : quelques exercices « papier »

Introduction

D'après le programme officiel, l'algorithmique doit être proposée aux élèves tout au long de l'année, doit parcourir les différentes notions du programme (géométrie, fonctions, numérique, statistiques, probabilités, etc) et son objectif principal est la résolution de problèmes.

En relation avec ces extraits, proposons un plan de la séquence :

- Quelques algorithmes « clé en main » à faire fonctionner, qui pourront éventuellement déboucher sur des conjectures, puis des démonstrations ;
- Un lexique basique d'instructions ;
- Quelques problèmes à résoudre à l'aide d'algorithmes.

1. Algorithmes « clé en main »

- Entrer deux nombres A et B ;
A←A+B ;
B←A–B ;
A←A–B ;
Afficher A et B.

ou

Entrer deux nombres A et B ;
C = 0 ;
C←A ; A←B ; B←C ;
Afficher A et B.

Faire fonctionner ces algorithmes et expliquer ce qui se passe.
Merci à Antoine Regnaud.
Algorithmes dont les instructions sont très simples…
Remarque : on peut compléter ces algorithmes en proposant une permutation cyclique d'une liste de nombres.

- Entrer x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C ;
k$\leftarrow \dfrac{(x_B - x_A)}{(x_C - x_A)}$;
k'$\leftarrow \dfrac{(y_B - y_A)}{(y_C - y_A)}$;
Si k = k' alors afficher « les points A, B et C sont alignés » ;
Sinon afficher « les points A, B et C ne sont pas alignés ».

Faire fonctionner cet algorithme. Ce dernier fonctionne-t-il toujours ? Comment le modifier ?

- Entrer un entier naturel A ;
Tant que A≠1 faire : si A est impair alors A←3A+1, puis afficher A
Sinon A←A÷2, puis afficher A
Fin tant que.

Faire fonctionner cet algorithme avec plusieurs valeurs de A. Que constate-t-on ?
Algorithme de Syracuse
Deux instructions (tant que ; si… alors…sinon).
Possibilité de le compléter en y ajoutant une variable « longueur de la chaîne ».

- On donne les deux algorithmes suivants :

Entrer deux chiffres x et y ;
$u \leftarrow 10x + y$;
$v \leftarrow 100u$;
$w \leftarrow 100v$;
$s \leftarrow u + v + w$;
Afficher s

Entrer un entier naturel n ;
$u \leftarrow n$;
Tant que $u \geqslant 37$ faire $u \leftarrow u - 37$;
Fin tant que ;
Si $u = 0$ alors afficher « oui » ;
sinon afficher « non ».

a. Faire fonctionner le premier algorithme.
b. Faire fonctionner le second algorithme avec les nombres 250, 185 et 1036. Dans quel cas l'algorithme affiche « oui » ? Dans quel cas affiche-t-il « non » ?
c. A partir de deux chiffres x et y, on lance le premier algorithme qui fournit un entier naturel à partir duquel on lance le second algorithme. Quelle conjecture pouvez-vous énoncer ?
d. Démontrer la conjecture précédente.

Merci à G. Cordes (Nantes).

2. Lexique d'instructions

Un algorithme est constitué de trois phases : une phase d'initialisation, une phase de traitement et une phase de sortie.

- La phase d'initialisation est la déclaration et éventuellement l'initialisation des variables au sens large (nombres, listes, fonctions, etc.) qui seront utilisées dans l'algorithme ;
  On pourra écrire :
  Variables : A, B, x_A, … ou fonctions f, g, …
  Entrer A, B…
  A := 0, x_A :=1…

- La phase de traitement contient les instructions, affectations et formules de calcul ;
  Si…alors…sinon…
  Tant que… faire…
  Pour i variant de 1 à 10 faire…

- La phase de sortie consiste en l'affichage de la réponse au problème posé.

3. A vous de jouer

Il s'agit de donner ici quelques exercices à résoudre avec des algorithmes :

- On donne la liste d'entiers : 100, 87, 13, 74, 61, 13, 48, 35, 13, 22, 9, 13, …
  a) Trouver le procédé de calcul des nombres successifs
  b) Ecrire l'algorithme correspondant
  ou
  Choisir deux nombres A et B ; évaluer C = ABS(A–B) ;
  Remplacer A par B ; remplacer B par C ; recommencer jusqu'à ...
  ou
  A ←
  B ←
  C = 0
  C ← $|A - B|$
  A ← B
  B ← C
  Répéter jusqu'à ce que : C = 0

- Fibonacci (voir texte joint).
  Ici, on donne une fraction A/B (qu'on suppose inférieure à 1, pour simplifier) : entrer A et B, calculer A/B, balayer les entiers jusqu'au premier qui vérifie $1/n<A/B$ [donc avec un « dès que »], calculer A/B – 1/n et recommencer la procédure jusqu'à épuisement de A/B, s'il y en a un...

- Fractions continues :
  Choisir un nombre, évaluer son inverse, ajouter l'unité, recommencer.
  (Avec 1 au départ, on converge rapidement vers le nombre d'or).

- De quoi s'agit-il ? [Histoire d'algorithmes, p. 132]
  $u:=a;\ v:=b$
  Tant que $u \neq v$ Faire
  Si $u > v$ Alors $u := u - v$ Sinon $v := v\text{-}u$
  Afficher u
  (Bien sûr le fameux algorithme d'Euclide)
  Remarque : on peut évoquer les algorithmes récursifs pour la recherche du pgcd ou le calcul de factorielles…

- Legendre (voir texte joint).
  Ecrire l'algorithme permettant de calculer les aires des polygones.
  (Calcul de N termes ou s'arrêter dès qu'une certaine précision est atteinte).

- Problème de dichotomie (voir documents ressources « algorithmique » et « fonctions »).
  On pourra proposer de résoudre $x^2 - x - 1 = 0$, en lien avec l'algorithme des fractions continues.

- Algorithme de Babylone (d'après Terracher 2nde).
  Travail préliminaire :
  Soit a un réel strictement positif différent de $\sqrt{2}$.
  On montre que $\sqrt{2}$ est encadré par a et $\frac{2}{a}$, puis que la moyenne arithmétique de ces deux derniers nombres, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$, est toujours supérieure à $\sqrt{2}$.
  En déduire l'algorithme permettant d'obtenir des approximations de $\sqrt{2}$. (Calcul de N termes ou s'arrêter dès qu'une certaine précision est atteinte).
  Remarque : on peut compléter ou remplacer $\sqrt{2}$ par toute autre racine…

- Algorithmes en probabilités (voir doc ressources « probabilités et statistiques» p 9 à 14).
  - Probabilité d'avoir deux élèves ayant la même date de naissance dans une même classe ;
  - Marche aléatoire et temps moyen ;
  - Nombre de lancers pour sortir tous les numéros d'un dé ;
  - Méthode de Monte-Carlo.

  Remarque : les trois premiers exercices seront juste évoqués car ils sont détaillés dans le document ressources.

- Calcul approché de l'aire située sous la courbe d'une fonction continue
  En donnant les bornes a et b d'un intervalle et l'expression d'une fonction continue et positive sur cet intervalle, écrire un algorithme permettant d'évaluer cette aire (méthode des rectangles ou des trapèzes)
  Remarque complémentaire : le document ressource « fonctions » propose un calcul approché de l'aire située entre deux courbes, par la méthode des trapèzes.

- Le livre de l'année (rallye mathématique de Bourgogne, 2009)
  Dans un livre, après une préface de **10** pages, le récit proprement dit commence à la page **11**.
  La somme des chiffres de tous les numéros des pages du récit est égale à **2009**.
  Ecrire un algorithme permettant de retrouver le nombre de pages de ce livre.

- Code de Vinci (rallye mathématique de Bourgogne, 2008)
  Léonardo a oublié son code à **4** chiffres **** (Le premier chiffre est non nul).
  Il se rappelle cependant qu'en divisant ce code par la somme de ses chiffres, il obtenait **57,8…**
  Ecrire un algorithme permettant à Léonardo de retrouver son code.

- <u>Algorithme de Kaprekar</u>
  En partant d'un entier naturel de trois chiffres, on range ces trois chiffres dans l'ordre croissant, puis dans l'ordre décroissant, créant ainsi deux autres nombres à partir du premier. On calcule leur différence, ce qui nous donne un nouvel entier naturel sur lequel on applique les mêmes manipulations.
  <u>Remarque</u> : attention à imposer un test d'arrêt…

- Frédéric Métin nous envoie un message :
  « J'ai trouvé un truc vendredi dernier pour faire passer la pilule de la décomposition des calculs en calculs simples, et sans faire appel aux temps antédiluviens de mes études : mon téléphone Samsung Z230 (qui n'a que 3 ans) contient une « calculatrice » ne proposant que +, -, ×, ÷ (même pas les puissances) ainsi que « calcul récent » (le *Ans* des calculettes) « sauvegarde mémoire », « effacement mémoire » et « rappel mémoire », et puis aussi « identique » pour répéter le calcul fait précédemment.
  Bien sûr mes élèves ont rigolé parce que l'I-phone propose jusqu'aux probas, logs, arcs trigos etc. Mais je leur ai dit que dans le train, je vérifie les calculs avec mon téléphone et là, il s'agissait de convertir des nombres sexagésimaux et décimaux, faut feinter pour pas avoir à se servir tout le temps de la mémoire. »

- <u>Générateur de nombres aléatoires de Von Neumann</u> (inspiré d'un sujet donné par Mickaël Védrine pour l'épreuve d'euro cette année)

  Prenez un nombre, élevez-le au carré, conservez les chiffres du milieu (même quantité de chiffres que le nombre de départ) et recommencez. Exemple : 1111 donne 1234321, ou encore 01234321 ; on conserve le milieu, 2343, qu'on élève au carré en prenant seulement le milieu : 4896, etc. Le problème avec ce truc c'est que ça finit toujours avec des cycles, donc il y a mieux comme nombres aléatoires...

IREM, stage « algorithmique »
24 septembre 2009