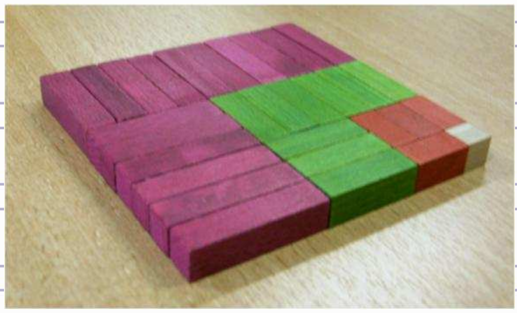
N° 107 – Avril 2008

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Douce France : le monde entier nous l'envie : la suite
- Preuves visuelles
- Hypatie, femme, grecque, mathématicienne oubliée



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Editorial

A l'occasion de cette cent sept*ième édition de la Feuille de Vigne, je me permettrai de détourner cet éditorial, et je sais que les trois auteurs ne m'en voudront pas de retarder un peu leur entrée en scène.*

Je tenais à mettre à l'honneur ici Mademoiselle Marylène Herdt, qui, durant ces presque trois dernières années, a assumé la fonction de bibliothécaire à l'IREM, et qui va quitter son poste à la fin du mois.

Son nom n'est jamais apparu en quatrième de couverture de cette publication pourtant, elle a grandement contribué à sa diffusion, parcourant les articles à la recherche des mots clés pour leur insertion sur les sites tels que Publimath et autres.

A l'annonce de son prochain départ, j'ai vu des étudiants agrégatifs ou préparant le CAPES laisser paraître, à la veille de leur concours, leur désarroi et lancer un "mais, comment va-t-on faire sans cette *personne ?" qui montrait à lui seul la place qu'elle avait su prendre et le travail qu'elle avait su fournir, en gagnant leur confiance et en leur dispensant ses conseils, toujours bien à propos.*

Nos collègues enseignants, bien sûr plus aguerris, et qui en ont vu d'autres, ceux qui fréquentent la bibliothèque et l'IREM, que ce soit de façon assidue ou, plus épisodique, à l'occasion de stages, auront, j'en suis sûr, un même pincement au cœur. Ils ne manqueront pas de regretter une personne qui a su, au-delà de sa discrétion, imposer sa présence par sa disponibilité, son écoute, et son efficacité, devançant les possibles requêtes avant qu'elles ne soient même formalisées.

Eh oui, Marylène, car depuis votre bureau, un peu à l'écart derrière les rayonnages, vous avez bien suivi à la volée toutes les discussions et su proposer votre aide, toujours de façon opportune avec une discrétion qui la rendait évidente et naturelle.

J'espère que vous aurez l'opportunité de continuer dans un nouveau travail, une autre bibliothèque je vous le souhaite, à donner le meilleur de vous-même à ces utilisateurs que vous respectez tant. Vous leur avez toujours donné le sentiment qu'ils étaient les personnes les plus importantes au monde, des personnes à servir, des personnes à aider, des personnes dignes d'intérêt.

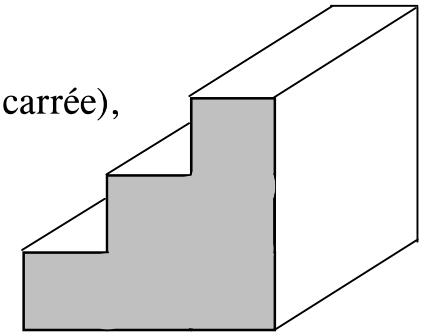
Une telle personne digne de notre reconnaissance, c'est bien vous, à qui, au nom de tous les membres de l'IREM de Bourgogne, je me permets de souhaiter le meilleur pour votre avenir.

Et je laisse au lecteur le soin de découvrir par lui-même le contenu de cette édition.

Patrick Gabriel,
Directeur de l'IREM de Bourgogne

LES RALLYES

Enoncés du Rallye mathématique des LYCEES de Bourgogne 2008



1. Attention à la marche.
Pour construire un escalier de **10** marches (de section carrée), il faut **110** kg de ciment.
Combien faut-il de ciment pour construire un escalier de **20** marches ?
(*La figure ci-contre représente un escalier de trois marches*.)

2. Choux à la crème.
9 choux coûtent **11** euros et quelques centimes.
13 choux coûtent **15** euros et quelques centimes.
Quel est le prix d'un chou ?

3. La somme de l'année.
On vérifie facilement que :
$2005 = 1002 + 1003$; $2006 = 500 + 501 + 502 + 503$; $2007 = 1003 + 1004$.
Écrire, de même, le nombre **2008** comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.

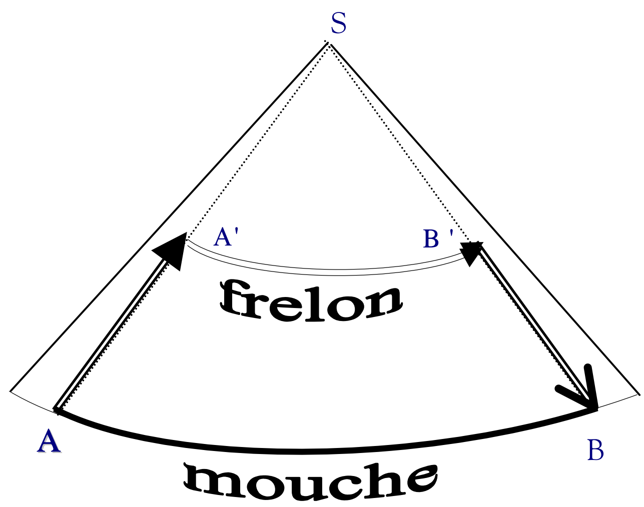
4. Franche maçonnerie.
3 maçons et 4 apprentis doivent construire un mur de 2000 briques.
Chaque maçon met 25 secondes pour poser et cimenter une brique.
Chaque apprenti met 40 secondes pour poser et cimenter une brique.
Combien de temps leur faudra t-il au minimum pour construire le mur ?

5. Pas folle, la guêpe.
La figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) représente un cône de révolution de sommet S.
A et B sont deux points situés sur la base circulaire du cône.
Une mouche, un frelon et une guêpe veulent aller de A vers B tout en restant sur la surface du cône :

- la mouche emprunte bêtement le petit arc du cercle de base ; elle parcourt anisi **40** cm ;
- le frelon monte à mi-hauteur en ligne droite en direction du sommet S jusqu'au point A', parcourt le petit arc horizontal $\widehat{A'B'}$ puis redescend en direction de B ; il parcourt ainsi **35** cm ;

la guêpe, qui est plus futée, va de A vers B en parcourant moins de **30** cm.

- Comment s'y prend t-elle?



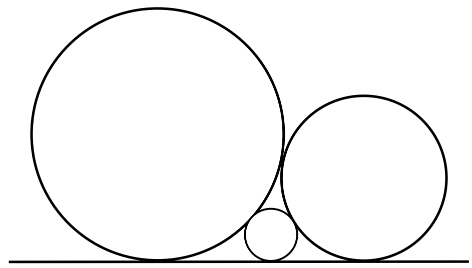
6. Tiercé gagnant.

À la fin d'une course de **500** mètres :
- lorsque le premier arrive, il reste **5** m au second à parcourir ;
- lorsque le deuxième arrive, il reste **10** m au troisième à parcourir ;
- le troisième arrive **3** secondes après le premier.

Quelle est la vitesse du vainqueur ?

7. Les trois cercles.

Les trois cercles ci-contre sont tangents à une même droite, et chacun d'eux est tangent aux deux autres.
Le grand a pour rayon **9** m, le moyen a pour rayon **4** m.
(Les proportions ne sont pas respectées.)
Quel est le rayon du petit ?



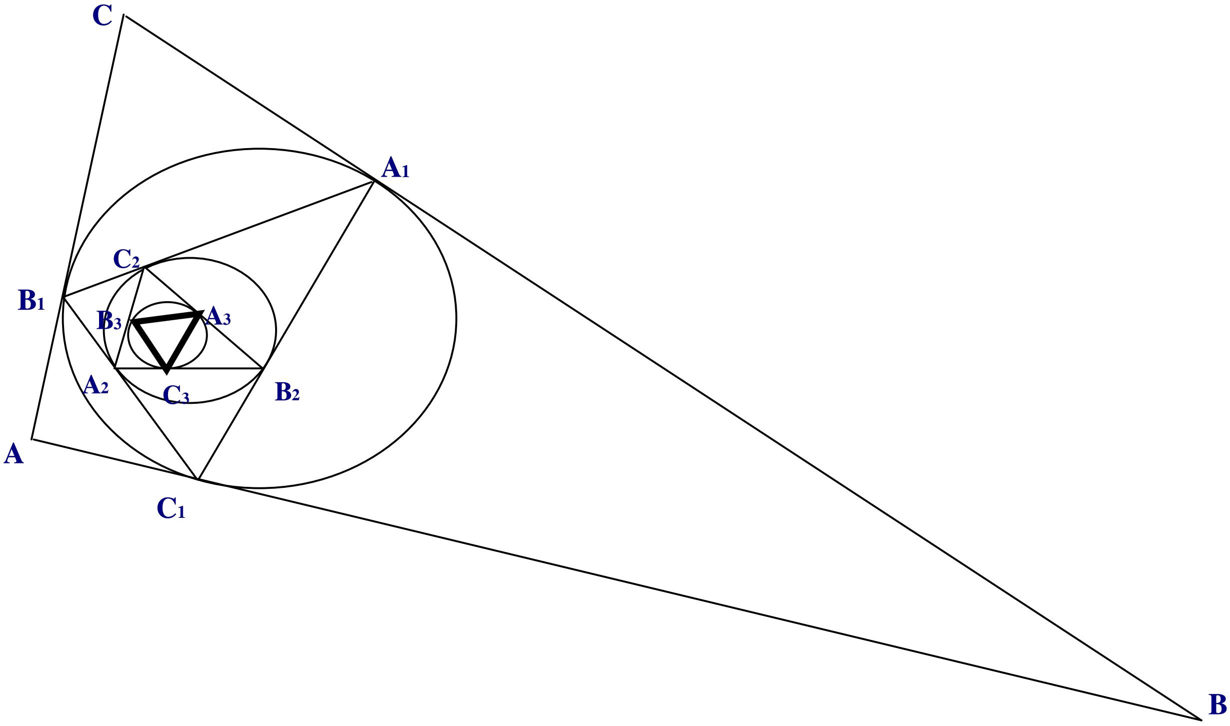
8. Code de Vinci.

Leonardo a oublié son code à 4 chiffres **** (le premier chiffre est non nul).
Il se rappelle cependant qu'en divisant ce code par la somme de ses chiffres, il obtenait 57, 8 … .
Quel est son code ?

9. Triangles en cascade.

Dans la figure ci-dessous, où ABC est un triangle quelconque :
- le cercle inscrit dans le triangle ABC est en contact avec ses 3 côtés aux points A_1, B_1, C_1 ;
- le cercle inscrit dans le triangle $A_1B_1C_1$ est en contact avec ses 3 côtés aux points A_2, B_2, C_2 ;

- le cercle inscrit dans le triangle $A_2B_2C_2$ est en contact avec ses 3 côtés aux points A_3, B_3, C_3.
Gaston prétend que les angles du petit triangle $A_3B_3C_3$ mesurent tous moins de **68** degrés.
A t-il raison ?



Enoncés du Rallye mathématique des COLLEGES 2008

Exercice 1. On tourne (6e et 5e)

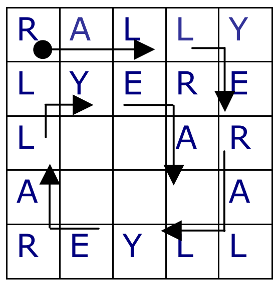
Pour remplir un quadrillage de 366 sur 366 cases, on écrit successivement les lettres R, A, L, L, Y, E dans cet ordre. On commence dans la case située en haut à gauche et on tourne en spirale dans le sens des aiguilles d'une montre (voir le modèle ci-contre avec un quadrillage de 5 sur 5).

Antoine s'arrête lorsqu'il a fait un seul tour.

Bertrand s'arrête lorsqu'il a écrit la 2008e lettre.

Quelle est la dernière lettre écrite par Antoine ?

Quelle est la dernière lettre écrite par Bertrand et où est-elle placée ?



Exercice 2. Dagobert et son T-shirt à l'envers (6e et 5e)

Dagobert a gagné un T-shirt sur lequel est inscrit « **RALLYE 2008** ». Hélas, ce T-shirt est beaucoup trop grand pour lui! Pour amuser ses copains, il l'enfile comme un short en mettant ses jambes dans les manches. En se regardant dans un miroir, il s'aperçoit que le T-shirt est à l'envers (dedans/dehors) ! L'inscription se lit par transparence, car le coton est mince !

Dessiner ce qu'il voit dans le miroir.

Exercice 3. Des diagonales bien embrochées (6ᵉ et 5ᵉ)

Pour l'apéritif, Ben a fabriqué un gros cube avec 125 petits « Apéricubes ». Il plante alors des grandes piques à brochette selon toutes les diagonales du gros cube.

Combien restera-t-il d'Apéricubes non transpercés ?

Exercice 4. Les gourmands ! (6ᵉ et 5ᵉ)

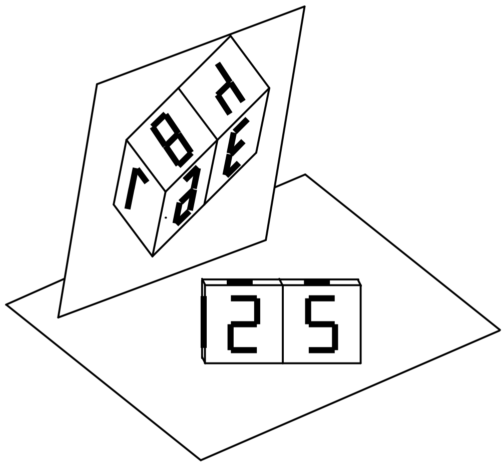
Le petit Julien a réuni tous ses amis de classe pour son goûter d'anniversaire. S'étant comptés, les invités ont décidé de lui offrir chacun autant de chocolats qu'il y aura d'enfants autour de la table. Julien a reçu 650 chocolats.

Combien a-t-il d'amis dans sa classe ?

Exercice 5. Le jour "D" (Tous)

Le professeur NESDJOWOI qui ne sait jamais quel jour on est, s'est fabriqué un jeu de 2 dés, lui permettant d'afficher tous les jours du mois de 01 à 31, écrits en caractères digitaux :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



La date du jour se lit sur les faces de devant. Mais comme les deux dés se reflètent dans un miroir posé sur le bureau, voici ci-contre, ce qu'il voit aujourd'hui.

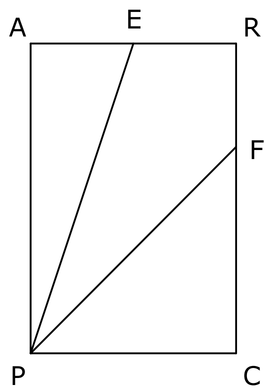
Trouver tous les chiffres qui sont inscrits sur chacun des deux dés, en expliquant votre raisonnement.

Exercice 6. Le laboureur et ses enfants (Tous)

Un riche laboureur, partage son champ de forme rectangulaire, entre ses trois enfants, chacun devant avoir accès au puits situé en **P**.

En plaçant **E** au milieu de [**AR**] et **F** au tiers de [**RC**] à partir de **R**,

- son fils **A**lfred, aurait la parcelle **PAE** d'aire 1 680 m²,
- son second fils **R**ené aurait la parcelle **PERF**,
- sa fille **C**léopâtre aurait la parcelle **PCF** dont le côté [**PC**] mesure 70 m.



Ce partage est-il équitable ? Sinon que conseillez-vous de modifier pour qu'il le devienne ?

Évidemment le notaire souhaite que toutes les réponses soient justifiées.

Exercice 7. Le jardinier et la couturière (Tous)

À chacun des sommets d'une pelouse de forme triangulaire, nos deux jardiniers amateurs, Marie et Louis ont planté un arbre : un abricotier (**A**), un cerisier (**C**) et un pommier (**P**). Pour regarder les fruits mûrir, ils décident de mettre un siège (**S**) sur le bord de la pelouse, entre le cerisier et l'abricotier.

Louis se souvient des cours de mathématiques et se dit que ce serait rigolo de placer ce siège de telle façon que les triangles **CPS** et **APS** aient le même périmètre.

Depuis longtemps, il sait bien qu'entre **C** et **A** il y a 12 m, entre **A** et **P** il y a 16 m et entre **P** et **C** il y a 20 m, mais aujourd'hui il n'a sur lui aucun instrument de mesure !

Toutefois Marie qui est bonne couturière, trouve dans sa poche une bobine de gros fil. Louis observe longuement cette bobine, et dit à Marie :

« Cela fera l'affaire car il y a certainement plus de 50 m de fil. Tu vas m'aider à utiliser ce fil pour reporter les longueurs comme avec un compas, ainsi je suis certain de trouver la bonne position du siège. »

Comment va-t-il s'y prendre pour déterminer la position exacte du siège ?

Mais quel est donc le périmètre commun aux deux triangles ?

Exercice 8. Un gros cube, des petits cubes... (Tous)

Pour son anniversaire, Camille MAXICUBE a reçu cette année, par convoi exceptionnel, un cadeau très encombrant contenant 2 008 petits cubes en bois de 1 cm d'arête, empilés les uns sur les autres !

Elle se demande bien comment faire entrer cela dans sa chambre.

Elle essaie d'en ranger un maximum en formant le plus gros cube possible.

Quelle est la taille de ce gros cube ? Va-t-il entrer dans sa chambre ?

Avec les éléments restants, elle essaie à nouveau de réaliser le plus gros cube possible. Et ainsi de suite.

Finalement comment ses 2 008 cubes sont-ils rangés ?

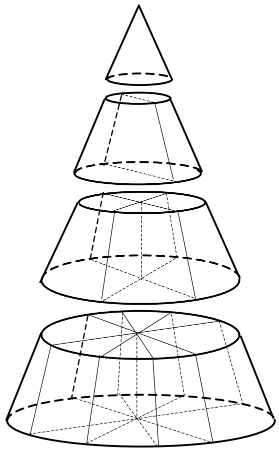
Exercice 9. PARIS – SÈTE par TROYES. (4e et 3e)

La compagnie de transport CARHIBOU (qui roule même la nuit) utilise trois cars identiques qui sont chacun remplis aux trois quarts. Les passagers occupent donc les trois quarts de trois cars ! Deux tiers des passagers des trois cars descendent à TROYES. Un seul car suffit alors pour transporter les passagers restants. Maintenant au repos, les deux tiers des chauffeurs des trois cars peuvent donc boire un demi avec un tiers inconnu qui se demande quelle fraction du car de SÈTE occupent les passagers. Donnez-lui la réponse en la justifiant.

Exercice 10. Le Trapézien. (4e et 3e)

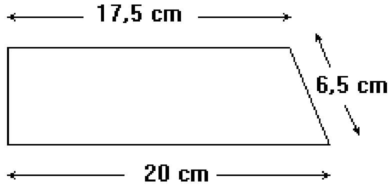
Pour fêter les dix ans d'existence de son magasin, un pâtissier invite ses principaux clients et fournisseurs.

Il confectionne un cône glacé géant au chocolat qu'il découpe horizontalement en tranches de hauteurs égales.



L'étage supérieur constitue une part. Ensuite, il coupe verticalement le reste des étages : il fait deux parts égales dans le deuxième, quatre parts égales dans le troisième, huit parts égales dans le quatrième, etc.

À partir du troisième étage, toutes les parts ont deux faces verticales en forme de trapèze rectangle, qui à l'étage du bas ont des dimensions comme indiqué ci-contre : ⟶



En combien de parts le pâtissier a-t-il découpé son cône géant ?

Exercice 11. Lapin sauteur. (4e et 3e)

Jeannot Lapin ne se déplace que par sauts réguliers, tous d'une même longueur supérieure à 5 m. Son terrain de jeu préféré est une petite pelouse circulaire de 10 m de diamètre.

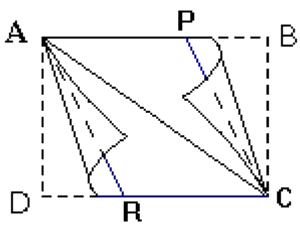
Partant d'un point du bord, il atteint le point diamétralement opposé, en ayant fait exactement 4 sauts. Après chaque saut, il se retrouve exactement sur le bord de la pelouse. Il ne retombe jamais deux fois au même endroit.

Faites le dessin du trajet de Jeannot.

Quelle est la longueur de chacun des sauts ?

Exercice 12. Courage, plions. (4e et 3e)

Émilie découpe dans une feuille de papier un rectangle **ABCD** de 10 cm sur 15 cm. Ensuite elle le plie de façon à amener les largeurs **[BC]** et **[AD]** sur la diagonale **[AC]** (voir figure).



En remarquant que le quadrilatère **APCR** est un parallélogramme, elle se dit que celui-ci pourrait être un losange, si son rectangle initial avait d'autres mesures.

En gardant la largeur **AD** = 10 cm, à vous de trouver la longueur convenable du rectangle initial.

Quelle est donc la mesure des côtés du losange ?

Toutes les solutions seront données dans le numéro 108.

JEU - 57

Trouver dans la suite harmonique $1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}\ \ldots$
6 termes en progression arithmétique.

PROBLÈME - 57

Démontrer que si une fraction p/q vérifie :
$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007}$ alors p est un multiple de 3011.

Indication : Faire intervenir la somme :
$$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \ldots + \frac{1}{3010}$$

Solutions :

JEU - 56

Trouver des entiers positifs impairs distincts a_1 ; a_2 ; a_3 - - - a_n tels que :
$$2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$
Solution :

Supposons le problème résolu.
Si on note A le PPMC des a_i A est impair comme tous les a_i.
Après multiplication par A, on obtient : $2A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$.
Les A_i sont des diviseurs distincts de A.
L'idée est donc de chercher un entier impair A ayant suffisamment de diviseurs pour qu'on puisse espérer en trouver une partie dont la somme soit égale à 2A. Il faut chercher parmi les nombres dits abondants, c'est à dire dont la somme des diviseurs dépasse le double du nombre.

Divers essais m'ont conduit à $A = 3^4 \times 5^2 \times 7 = 14175$.
Les $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs de A forment l'ensemble D qui s'obtient rappelons-le en développant $(1 + 3 + 9 + 27 + 81)(1 + 5 + 125)(1 + 7)$:
$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25, 27, 35, 45, 63, 75, 81, 105, 135, 175, 189, 225, 315, 405, 525, 567, 675, 945, 1575, 2025, 2835, 4725, 14175\}$;

On trouve après quelques essais :

$2 \times 14175 = 14175 + 4725 + 2835 + 2025 + 1575 + 945 + 675 + 567 + 525 + 225 + 75 + 3$.

D'où, en divisant par 14175 :

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{63} + \frac{1}{189} + \frac{1}{4725}.$$

Il y a probablement des solutions plus petites.

PROBLÈME - 56

Quel est le plus petit entier naturel strictement positif n tel que :

$2n = a^2$ $\qquad$ $3n = b^3$ $\qquad$ $5n = c^5$
où a, b, c sont des entiers naturels ?

Solution :

D'après les hypothèses (H) :
a est pair, donc n aussi.
b est multiple de 3, donc b^3 est multiple de 27, donc n est multiple de 9.
c est multiple de 5, donc c^5 est multiple de 5^5, donc n est multiple de 5^4.

Ainsi on commence à avoir une petite idée de n : il est de la forme
$n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma A$ avec $\alpha \geq 1$; $\beta \geq 2$; $\gamma \geq 4$.

On peut supposer A premier avec 2, 3 et 5.
$2n = a^2$ implique $2n = 2^{\alpha+1} 3^\beta 5^\gamma A = a^2$ Donc α est impair ; β et γ sont pairs.
(N'oublions pas qu'on cherche le plus petit n tel que…)
De même :
$3n = b^3$ implique $3n = 2^\alpha 3^{\beta+1} 5^\gamma A = b^3$ Donc α et γ sont multiples de 3 et $\beta + 1$ est multiple de 3.

$5n = c^5$ implique $5n = 2^\alpha\, 3^\beta\, 5^{\gamma+1}\, \mathrm{A} = c^5$. Donc α et β sont multiples de 5 et $\gamma + 1$ est multiple de 5.
Il est facile de constater, même mentalement, que les plus petits nombres α ; β ; γ qui vérifient les conditions ci-dessus sont $\alpha = 15$; $\beta = 20$ et $\gamma = 24$.

Finalement $n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24}\, \mathrm{A}$.

$\mathrm{A} = 1$ si on veut minimiser n, et on vérifie (bien que ce ne soit pas indispensable) que

$n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24}$ implique

$$2n = 2^{16}\, 3^{20}\, 5^{24} = (2^8\, 3^{10}\, 5^{12})^2$$
$$3n = 2^{15}\, 3^{21}\, 5^{24} = (2^5\, 3^7\, 5^8)^3$$
$$5n = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{25} = (2^3\, 3^4\, 5^5)^5$$

Le plus petit entier naturel strictement positif n vérifiant les hypothèses est donc bien :

$$\boldsymbol{n} = 2^{15}\, 3^{20}\, 5^{24} = 3^{20}\, 5^9\, 10^{15} = \mathbf{6810125783203125000000000000000}$$

<u>Remarque</u> :
Les autres n vérifiant (H) s'obtiennent en multipliant 6810125783203125000000000000000 par une puissance k^{30} arbitraire.
Le prochain est donc $2^{30}n = 7312316880125952000000000000000000000000$.

Monsieur D. DUBUISSON, lycée H. Fontaine à Dijon, a envoyé une solution au problème N° 56.

Solution de Michel Plathey

$2.n$ est un carré : donc n est pair.
$3.n$ est un cube : donc n est un multiple de 9.
$5.n$ est une puissance cinquième : donc n est un multiple de 5^4.

2 ; 9 et 625 étant premiers entre eux, une décomposition en facteurs premiers de n sera de la forme $n = 2^k.3^l.5^m.n'$ avec $k \in N^*$; $l \in N^*$; $m \in N^*$; $n' \in N^*$. avec n' premier avec 2 ; 3 et 5

Comme on cherche le plus petit des entiers n satisfaisant aux conditions de l'énoncé, on peut poser $n' = 1$ et donc $n = 2^k.3^l.5^m$ avec $k \in N^*$; $l \in N^*$; $m \in N^*$.

Donc :
$2.n = 2^{k+1}.3^l.5^m$ est un carré. Donc $k+1 = 2.k'$; $l = 2.l'$; $m = 2.m'$ (1)
avec $k' \in N^*$; $l' \in N^*$; $m' \in N^*$;

$3.n = 2^k.3^{l+1}.5^m$ est un cube. Donc $k = 3.k''$; $l+1 = 3.l''$; $m = 3.m''$ (2)
avec $k'' \in N^*$; $l'' \in N^*$; $m'' \in N^*$;

$5.n = 2^k.3^l.5^{m+1}$ est une puissance cinquième. Donc
$k = 5.k'''$; $l = 5.l'''$; $m+1 = 5.m'''$ (3)
avec $k''' \in N^*$; $l''' \in N^*$; $m''' \in N^*$.

(2) et (3) entraînent que *k* est un multiple de 15. Donc, d'après (1), on a :
$k = 15.\alpha = 2.k' - 1$ où α est un entier strictement positif. Donc α = 1 et $k' = 8$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout.
Donc $k = 15$.

(1) et (3) entraînent que *l* est un multiple de 10. Donc, d'après (2), on a :
$l = 10.\beta = 3l'' - 1$ où β est un entier strictement positif. Donc β = 2 et $l'' = 7$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout.
Donc $l = 20$.

(1) et (2) entraînent que *m* est un multiple de 6. Donc, d'après (3), on a :
$m = 6.\gamma = 5.m''' - 1$ où γ est un entier strictement positif. Donc γ = 4 et $m''' = 5$ est le plus petit couple d'entiers strictement positifs solution de cette équation de Bezout.
Donc $m = 24$.

Donc $n = 2^{15}.3^{20}.5^{24}$ est le plus petit entier naturel répondant à la question.

On a bien $2.n = a^2$ avec $a = 2^8.3^{10}.5^{12}$;
On a bien $3.n = b^3$ avec $b = 2^5.3^7.5^8$;
On a bien $5.n = c^5$ avec $c = 2^3.3^4.5^5$.

Douce France, le monde entier nous l'envie : la suite !

Michel Bridenne, lycée G. Eiffel et Irem de Dijon

La première partie de cet article proposait un regard particulier sur des évaluations usuelles que sont les épreuves de mathématiques de baccalauréats, pour en signaler un certain flou, un écart évident entre des attentes supposées et la réalité de ce que d'aucun produit (évalué ou évaluateur).
Et l'article devait se conclure par cette deuxième partie : préciser un peu mieux ce qui est à évaluer, sans illusion excessive, et exemplifier.
Des impératifs éditoriaux –que la raison nous dit d'accepter– repoussent cependant l'exemplification à la prochaine Feuille de Vigne.
Patience, et bonne lecture.

Mots clés *: exercices, problèmes, évaluations, tâches, techniques, technologies, théories, contrat didactique.*

1. Ne nous y trompons pas.

C'est bien de l'ordinaire du quotidien d'un enseignant qu'il s'agit. Vous savez cet enseignant qu'on dénomme souvent « lambda », ou son dérivé quand on veut prétendre à un peu d'humour.
Les évaluations dont il est question ici, se restreignent à celles appelées « interrogations écrites », « devoirs surveillés », « devoirs en temps limité », voire « devoirs à la maison ».
Et on les trouve dans les pratiques enseignantes communes : elles apparaissent à, ou sont, des moments réputés opportuns et adaptés aux réalités particulières des classes. Importants sans doute[1].

La possibilité de l'arrêt des transactions didactiques n'étant pas à l'ordre du jour[2], une telle évaluation a pour fonction d'aider l'enseignant, à l'issue d'un certain processus, **à prendre une décision** quant à la façon de « poursuivre le cours ».

[1] Je parle des moments.
[2] Sauf en fin d'année scolaire dans notre système actuel.

Faudra-t-il par exemple revenir sur certains points étudiés ? Individualiser les interventions en utilisant différents dispositifs éventuellement disponibles (aide individualisée en seconde, etc) ?
Et cette décision est prise en s'appuyant sur des matériaux censés renseigner sur ce que l'on a nommé, et nomme encore parfois, suivant les lieux, le degré d'atteinte d'objectifs, le niveau de maîtrise dans l'utilisation de connaissances, de savoir-faire, ou autres niveaux de compétences des élèves du groupe concerné. On s'y perd un peu[3].
La littérature est abondante et diverse sur tous ces termes : je renvoie à la lecture d'Antoine Bodin qui les a spécifiés dans notre champ disciplinaire[4].
Ceci dit, à l'heure du socle commun de compétences[5], je ne fais pas vraiment tache.

Le côté global de la décision peut gêner, parce que trop général. J'avais fait allusion à un processus, revenons sur lui. En gros, le dit processus consiste à prendre, de fait, un ensemble de micro décisions (pour chaque élève, pour chaque réponse apportée à chacune des « questions » présentes dans l'évaluation concernée), puis à réunir l'ensemble de ces micros décisions pour aboutir à des décisions au niveau de chaque élève et au niveau de la classe.

Il est banal de déclarer que tout texte d'évaluation se résume alors, ***sous contraintes de consignes plus ou moins explicites*** (calculatrice autorisée, à la règle seule, formulaire autorisé, feuille de pompe interdite[6] ...), à un ensemble de **questions posées** (quelle est la nature de tel objet mathématique ?, quelles propriétés possèdent telle configuration ?, combien cette équation possède-t-elle de solutions ?, ..., quelle est la valeur maximale de ... ?, ...) ou d'**injonctions** (compléter, faire, cocher, démontrer, calculer ..., résoudre ...), relatives à un groupe d'énoncés d'exercices[7].
Pour la commodité du propos, j'associerai questions et injonctions sous le même vocable générique « **question** ». Et répondre à une question, c'est résoudre tout ou partie d'un exercice de mathématiques, ou encore un ensemble de « petits » exercices suivant la difficulté.

[3] Y. Chevallard parle d'un sémantisme profus.
[4] Bodin A. (1997), L'évaluation du savoir mathématique – Questions et méthodes. Recherches en Didactique des Mathématiques, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.
[5] L'INRP a créé un service de veille scientifique et technologique (VST) dont l'intérêt n'échappera à personne. L'un des dossiers de synthèse s'intitule « Standards, compétences de base et socle commun », accessible à l'adresse http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Standards/sommaire.htm. Le lecteur est vivement invité à consulter cette adresse.
[6] Ou non ! Comme certains l'ont lu ou le savent, il m'arrive de demander aux élèves de préparer une « feuille de pompe » - officiellement nommée « feuille d'aide » - qu'ils peuvent utiliser lors de l'évaluation ; seules contraintes : recto simple d'une feuille format A4, manuscrite.
[7] Comme déjà écrit : je ne distinguerai plus exercices et problèmes. Au moins un exercice.

Pour des raisons assez évidentes, pour chaque question, je n'emploierai plus le terme micro décision mais simplement décision.

Pour chaque question, la résolution de l'exercice qui lui est associé, aboutit à une réponse écrite (dessin, texte, ...) que j'appellerai **produit**.
Pour l'évaluateur, il s'agit alors, à partir des matériaux[8] que contiennent ces produits, de décider de la bonne ou de la mauvaise résolution de l'exercice. Certes, l'échelle est un peu restreinte : il serait plus exact de parler du degré de bonne[9] résolution de l'exercice.

En fait, il y a lieu de distinguer un produit <u>attendu</u> par le concepteur, intimement lié aux intentions de ce dernier[10], des produits <u>obtenus</u> qui sont symptomatiques d'actions d'élèves dans un contexte particulier.

Ceci étant dit, pour chaque question, pour chaque élève, la décision prise par l'évaluateur me semble rendre compte de l'écart entre le produit attendu[11] et le produit obtenu, sous contrainte, je l'ai dit, des consignes accompagnant la question. Ce n'est pas que négatif, l'évaluateur acceptant le plus souvent[12] certaines variabilités, et révisant au besoin son propre produit en l'enrichissant d'informations qu'il n'avait pas toujours prévues.

Quels que soient les écarts, il s'ensuit des mises en scènes didactiques particulières, significatives des décisions que l'enseignant a prises.

2. Les questions : qu'est-ce qu'elles mettent en jeu au sens de l'évaluation ?

L'examen de chaque question des d.l., d.s., e.l., ..., ou encore d.m.[13] que j'ai eus entre les mains[14], montre que résoudre l'exercice qui lui est lié suppose, d'une part, la reconnaissance du type d'exercice, d'autre part, la mobilisation et l'utilisation d'outils, de moyens ou de savoirs mathématiques, et la prise en compte des consignes associées (explicites ou non[15]), et, enfin, une présentation de tout ou partie de la résolution en accord avec les dites consignes (allant jusqu'à la validation des actions mathématiques).

---

[8] On parle d'indicateurs.
[9] Ou de mauvais. Mais dans ce cas, on introduit une péjoration regrettable.
[10] Intimement liées à ses rapports aux mathématiques, à l'institution, …
[11] Il faudra revenir là-dessus, pour faire suite à ce qui était écrit dans la première partie de cet article.
[12] A quelques rares exceptions près.
[13] Dans l'ordre : devoir en temps limité, devoir surveillé, épreuve longue, devoir à la maison …
[14] En xx années de « carrière », à raison de … On ressent comme un coup de vieux, dans ces moments là. Et c'est pas fini.
[15] Les us et coutumes locales ou non peuvent être très présentes.

Des exemples (farfelus) que l'on peut imaginer, autour du même sujet ordinaire :
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? »
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? Expliquer la réponse. » « Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? Prouver l'affirmation. »
« Dans **R**, quel est le nombre de solutions de $x^2 - 3x - 4 = 0$? En démontrant d'abord que $x^2 - 3x - 4$ peut aussi s'écrire $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$, prouver l'affirmation. ».

Dans ces exemples, en ignorant les effets de contrat, les consignes déterminent des milieux mathématiques différents, et les produits attendus peuvent aller d'un nombre sec (2), à des preuves « dures », en passant par des explications de natures différentes.
Quant à l'évaluation proprement dite, en décidant du degré d'adéquation entre le produit attendu et le produit obtenu, elle prend position sur la façon de comprendre question et consignes, sur la pertinence des outils ou des savoirs mathématiques mobilisés, sur la maîtrise de leur utilisation dans cette situation, et éventuellement sur la qualité du discours mathématique explicatif.

Question, exercice, consignes et produit attendu, cernant l'objet de l'évaluation et caractéristiques des intentions du (des) concepteurs(s), me semblent pouvoir être analysés et construits à l'aide de la théorie anthropologique de Chevallard, notamment avec les notions de tâches et d'organisations mathématiques.

Un court rappel : en simplifiant[16], Chevallard[17], pour « préciser la notion de compétence », considère que l'enseignement a pour objectif de mettre en place, d'étudier et de maîtriser un certain nombre d'organisations mathématiques $(T, \tau, \theta, \Theta)$, où T est un type de tâches pouvant être traitées par les techniques τ, elles-mêmes validées par des discours ou énoncés θ qualifiés de technologies, ces dernières étant justifiées par des théories Θ.

L'idée que je retiens est donc que l'évaluation consiste à tester le degré de maîtrise d'organisations mathématiques. A quelques remarques près.

Les premières remarques concernent T et Θ dans une organisation mathématique $(T, \tau, \theta, \Theta)$. On n'a accès au type de tâches T qu'au travers certaines de ses tâches t_i : l'ensemble des t_i ne sera qu'un sous-ensemble de T, qu'il faut souhaiter assez « représentatif » de T.
Restons au niveau d'une classe de seconde. Par exemple, en demandant la résolution de l'équation $(3x + 7)(-5x + 6) = 0$ dans **R**, je ne peux pas prétendre

[16] Voir les notes de la première partie de cet article.
[17] Y. Chevallard (1997), Omettre ou transmettre ? Les choix curriculaires et leurs enjeux, Ecole d'été.

avoir testé sur la « résolution des équations polynomiales », fussent-elles du second degré.
De même, et toujours à ce niveau de seconde, je puis être amené à demander l'explicitation du théorème du produit nul – un exemple de θ – pour valider une technique τ de résolution, mais il ne m'arrive pas de demander la justification de ce dernier : Θ reste dans l'ombre.
Les tests sur les degrés de maîtrise de la partie (θ, Θ)[18], en tant que telle, ne semblent être abordés que dans certaines classes à certains niveaux[19].
Ce qui semble réduire le test sur le degré de maîtrise de l'organisation mathématique $(T, \tau, \theta, \Theta)$, en espérant que les t_i sont pertinents, à des tests sur des $(t_i, \tau, \theta[, \Theta])$[20].
Les deuxièmes remarques sont issues d'un constat, d'une réalité tenace. Il nous faut aller plus loin, et réduire encore beaucoup. Perdre quelques illusions, encore.

Supposons que nous ayons, pour T, quelques t_i sous la main.
Il semblerait alors que tester le degré de maîtrise des $(t_i, \tau, \theta[, \Theta])$, revienne à tester le degré de maîtrise de $(t_i, \tau_{ij}, \theta_{ijk}[, \Theta])$, les τ_{ij} permettant, d'une manière ou d'une autre, de traiter t_i, et les θ_{ijk} validant les τ_{ij}.
C'est en tous cas la forme, que je qualifie d'illusoire, que l'on rencontre le plus souvent dans beaucoup de textes d'évaluations.
Ce qui est illusoire c'est le produit attendu : il relève du fantasme, et les faits mettent à mal cette regrettable illusion.
J'appelle « faits » ce que produisent des enseignants patentés, certifiés conformes : ce que j'avais essayé de montrer dans la première partie de l'article avec les épreuves de baccalauréat.

Reprenons un autre exemple[21], toujours de la classe de seconde.

Enoncé de l'évaluation

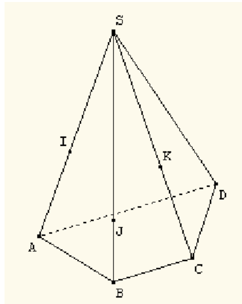
> SABCD désigne une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère. Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC]. On suppose de plus que les droites (IJ) et (KJ) ne sont pas parallèles au plan (ABC).
> **1.** Justifier que les droites (IJ) et (KJ) interceptent chacune le plan (ABC).

[18] Nommée bloc technologico-théorique par Y. Chevallard.
[19] J'ai signalé dans la première partie de cet article que les ROC du baccalauréat S me semblaient, elles, se rapporter au bloc technologico-théorique. Certaines épreuves des CAPES et d'agrégations sont également concernées. Et pour les anciens, ils pourront se rappeler les épreuves des baccalauréats avant 1966.
[20] Cette notation pour indiquer que Θ, certes présent pour l'enseignant, ne l'est pas explicitement pour l'élève.
[21] Dû à un collègue (que je remercie très sincèrement de m'avoir autorisé à utiliser son travail).

2. On note alors M le point d'intersection de (IJ) avec le plan (ABC) et N celui de la droite (KJ) avec le plan (ABC).

  a. Construire sur la figure de l'énoncé[22] les points M et N. Justifier la construction de M.

  b. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC) en justifiant votre réponse.
  Représenter sur la figure cette intersection.



Rapide analyse, et commentaires.
Le support de l'évaluation fait apparaître deux tâches : l'une (t_1) est un problème d'intersection de deux plans dans l'espace (type de tâches T_1), et l'autre (t_2) est un problème de la représentation de cette intersection dans une perspective cavalière (second type de tâches T_2). Remarquons que la seconde tâche t_2, liée dans l'énoncé à la première t_1, est évocatrice de technique(s) pour la résolution des deux tâches. La seconde tâche t_2 n'est cependant pas nécessaire pour résoudre la première : (MN) est l'intersection des plans (IJK) et (ABC).
De plus, pour des raisons que l'on devine facilement, ces deux tâches ont été elles-mêmes subdivisées.
Le dessin qui accompagne l'énoncé, est, implicitement, représenté en perspective cavalière. Il est porteur d'informations.
Les techniques de résolution oscillent entre l'emploi d'implications et l'utilisation de la perspective cavalière : elles sont validées par les énoncés usuels (règles d'incidence dans l'espace, positions de droites et de plans dans l'espace, règles de la perspective cavalière ...).

Le texte de l'évaluation organise à la fois la façon de résoudre les deux tâches, et annonce ce qu'il faudra produire, le produit attendu donc :

dans 1) : une justification, c'est-à-dire ici un (t_{11}, τ_{11j}, θ_{11jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{11} de t_1

dans 2) a) un dessin (construire), c'est-à-dire ici un résultat associé à un (t_{21}, τ_{21m}) adapté à une (sous-)tâche t_{21} de t_2, et une justification, c'est-à-dire ici un (t_{12}, τ_{12j}, θ_{12jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{12} de t_1

dans 2) b) une justification, c'est-à-dire ici un (t_{13}, τ_{13j}, θ_{13jk}[, Θ]) adapté à une (sous-)tâche t_{13} de t_1, et un dessin c'est-à-dire ici un résultat associé à un (t_{22}, τ_{22m}) adapté à une (sous)tâche t_{22} de t_2.

Sur cinq produits attendus, trois sont des (t, τ, θ[, Θ]).
C'est là où se situent en partie l'illusion et des nécessités conséquentes. Les évaluations ont ceci de spécifique, qu'il ne s'agit pas seulement de résoudre (où je puis me permettre beaucoup de raccourcis, d'allusions, d'ellipses, ...) mais suppose

[22] Cette figure, reproduite ci-contre, est jointe au devoir (avec plus de place que dans cette page).

aussi que l'on sait montrer que l'on sait[23], que l'on sait aussi ne pas insister sur les évidences mais rendre évident ce qui ne l'était pas.

Un produit attendu de la forme (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]) est souvent difficile et long à mettre en place : développer une technique et l'accompagner, par écrit, des éléments justificatifs, ce n'est pas rien.
Il suffit encore une fois, pour s'en convaincre, de lire les corrigés ou autres éléments de corrigés que nous proposons, les uns et les autres, à la suite de nos ds, dl ou dm, pour se rendre compte que … ce n'est pas fait. Si la partie τ_{ij} est souvent développée, la partie θ_{ijk} est non moins souvent allusive, voire absente. Quelles que soient les présentations choisies.
Il y a quelque chose de contractuel, inévitablement.

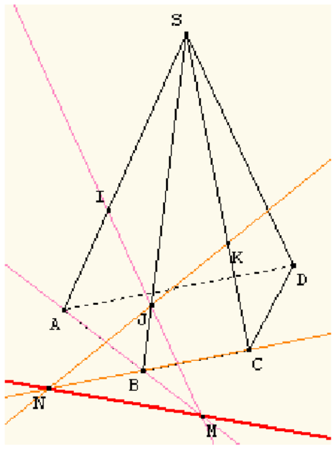
Se pose la question suivante : s'il s'agit de tester le degré de maîtrise d'un (t, τ, θ[, Θ]), comment le faire si les θ sont absents ? Au mieux, si les τ sont bien utilisées, peut-on dire parler de présomption.
Alors les décisions : maîtrise ou pas ? degré de maîtrise ? peut-on maîtriser une technique sans avoir conscience de la technologie qui la valide[24] ? … degré de maîtrise de quoi ? qu'est-ce qui est finalement, évalué ?

Le concepteur de l'évaluation a lui-même réalisé un corrigé, que je reproduis ci-dessous. Il ne déroge pas aux habitudes.

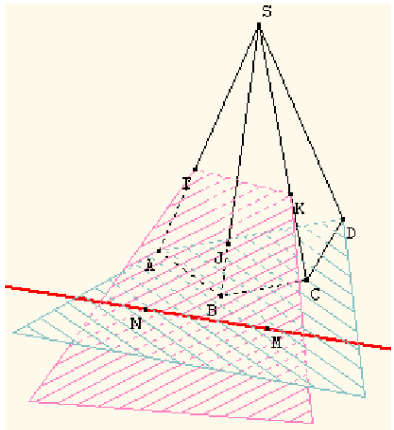
Eléments de corrigé.

SABCD désigne une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère. Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC].
On suppose de plus que les droites (IJ) et (KJ) ne sont pas parallèles au plan (ABC).
1. Les droites (IJ) et (KJ) sont deux droites non parallèles au plan (ABC) [par hypothèse] donc d'après le cours, elles interceptent chacune ce plan.
2. On note alors M le point d'intersection de (IJ) avec le plan (ABC) et N celui de la droite (KJ) avec le plan (ABC).

[23] Lors d'une « colle », j'ai posé la question de cours suivante : sachant que a et L sont des réels et f une fonction définie sur **R**, prouver que si une suite u_n converge vers a et si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.
Un étudiant a écrit : u_n converge vers a et $\lim_{x\to a} f(x) = L$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = L$ d'où $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.
Je ne me suis pas satisfait de sa réponse, et je l'ai invité à me montrer un peu plus.
[24] Oui, bien sûr, comme on peut utiliser une technologie sans être très au point sur la théorie qui la justifie.



a. Les droites (IJ) et (AB) sont deux droites du plan (SAB) : elles sont donc parallèles ou sécantes dans ce plan.
Comme (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles, (IJ) et (AB) sont sécantes.
Ce point d'intersection est alors sur (IJ) et comme il appartient à (AB), il est dans (ABC) : c'est donc le point M, intersection de (IJ) et (ABC).
Remarque : le point N est obtenu de la même manière, comme intersection des droites (JK) et (BC).



b. **P**ar hypothèse, M est sur (IJ) et (ABC) : comme il est sur (IJ), il est dans le plan (IJK).
Ainsi, M appartient à (IJK)$\cap$(ABC).
Par hypothèse, N est sur (JK) et (ABC) : comme il est sur (JK), il est dans le plan (IJK).
Ainsi, N appartient à (IJK)$\cap$(ABC).
Ces deux plans sont sécants en au moins deux points, et comme ils sont distincts, ils sont sécants en une droite qui passe par M et N : c'est donc la droite (MN) l'intersection des deux plans.

Quelques remarques à la suite de ces éléments de corrigé.
Dans 1), il est fait allusion au cours, précisément pour justifier.
Dans 2)a), concernant la justification, rien n'est dit sur « (IJ) dans le plan (ABC) », pas plus que sur « (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles », et aucun énoncé de propriété ou de théorème ne vient étayer la technique développée.
De même dans 2)b).

On pourrait discuter longtemps sur le fait de savoir si ce qui est omis relève d'évidences, mais là n'est pas la question.
A mon sens, cela conduit à au moins une nécessité : distinguer légèrement les tâches liées aux résolutions de celles liées aux évaluations.

Pour insister sur une deuxième la nécessité, si ce n'était pas assez clair (et c'est un point sur lequel j'essaie de travailler) : il convient de mieux cerner et distinguer les tâches d'évaluation que sont :

- produire un résultat qui sera indicateur de l'utilisation d'une τ_{ij} – éventuellement validée de manière privée – associée à un (t_i, τ_{ij}), sans exhiber τ_{ij},
- produire une τ_{ij} associée à un (t_i, τ_{ij}),
- produire des $(\theta_{ijk}[, \Theta])$ à propos d'un (t_i, τ_{ij}),
- produire un $(t_i, \tau_{ij}, \theta_{ijk}[, \Theta])$.

Concernant ma pratique, en classe de seconde par exemple, beaucoup des évaluations en temps limité se focalisent sur la partie (T, τ)[25] (les deux premiers points), dans une moindre mesure sur quelques technologies θ se rapportant à des (t_i, τ_{ij}) proposées, puis, beaucoup plus modérément à des (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]).
Un devoir à la maison est souvent plus preneur de (t_i, τ_{ij}, θ_{ijk}[, Θ]).

Les troisièmes remarques ont trait à la difficulté, peut-être, à cerner certaines organisations mathématiques. Certaines tâches, qui me semblent faire partie intégrante des activités mathématiques « usuelles », se prêtent encore mal à l'analyse suivant les techniques, technologies et théories, ou elles restent au stade de généralités.
Je pense par exemple à des tâches telles que « reconnaître un type de tâche », « modéliser », « analyser un texte mathématique », « critiquer un texte mathématique », etc …
Elles me semblent devoir être prises en charge dans les évaluations. En cas de besoin, j'utiliserai la notation $\tilde{t}$ pour y faire référence.

Les dernières remarques ne sont qu'un rappel inutile qui resterait valable en dehors des évaluations.
Suivant que c'est l'enseignant ou que c'est la personne à titre privé qui produit, (t, τ, θ, Θ) peut être très différent.

3. Résumé et pistes de mises en oeuvre.

Du côté de l'enseignant, pour une question particulière, évaluer signifie prendre une décision quant au degré de maîtrise, dans des conditions particulières imposées (durée, matériels autorisés, « méthode », …), de tout ou partie d'une organisation mathématique (t, τ, θ[, Θ]) ou associée à une tâche $\tilde{t}$.
Au-delà des tâches mathématiques, les tâches relatives à l'évaluation aboutissent à des productions (attendues de la part du concepteur, effectives de la part de l'évalué).
Les prises de décision ne s'exercent que sur des productions effectives.
Il y a donc déjà lieu, autant que faire se peut,

- de préciser le produit attendu
  - résultat qui sera indicateur de l'utilisation d'une τ, sans exhiber τ,
  - une τ « obligée » ou choisie librement associée à une t,
  - des (θ[, Θ]) à propos d'un (t, τ),
  - un (t, τ, θ[, Θ]),
  - …

[25] Appelé bloc pratico-technique par Chevallard.

- de faire en sorte que la partie de l'organisation mathématique de la tâche soit importante dans cette organisation[26], et que la tâche dont elle dépend relève d'un type de tâches significatif, notamment assez représentatif des activités mathématiques du corpus[27] concerné,
- de veiller à ce que les productions attendues soient significatives de la réalisation souhaitée de la partie de la tâche concernée. On peut certainement intervenir, à l'aide de consignes particulières et d'autres moyens (feuilles réponses imposant des limitations d'espace par exemple) pour préciser la nature et la forme des productions attendues[28].

Du côté de l'évalué, répondre à une question dans une évaluation signifie
- résoudre tout ou partie d'un exercice, c'est-à-dire exécuter tout ou partie d'une tâche t d'un certain type de tâches T (ou d'une tâche $\tilde{t}$) suivant des conditions imposées (durée, matériels autorisés, « méthode », …)
- **et** produire un résultat en accord avec les consignes de présentation des productions.

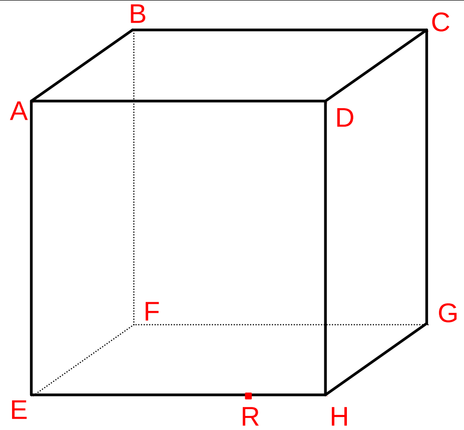
4. Mises en œuvre sur quelques exemples autour du programme de seconde.

Exemple 1 : problèmes d'intersection en géométrie dans l'espace.

Il est divisé en trois parties :
1. un problème d'intersection d'une droite et d'un plan : la production attendue est un dessin (codé !) complétant un dessin en perspective cavalière. Je suppose donc que le codage et le dessin seront des indicateurs fiables de (t, τ), techniques adaptées (tracés en perspectives cavalières).
2. un problème de parallélisme de droites dans l'espace : la production attendue est l'énoncé de propriétés validant une affirmation, c'est-à-dire l'énoncé de θ validant (t, τ). On peut remarquer que le dessin n'intervient pas dans cette production.
3. un problème d'intersection (concourance) de droites dans l'espace : la production attendue, une démonstration, est cette fois un (t, τ, θ), laissant le choix de τ et de θ.

[26] Il n'est pas question d'ignorer la variabilité des pratiques et des points de vue, il n'est pas non plus question, par exemple, d'accepter n'importe quelle marginalité dans le contexte de la classe.
[27] C'est-à-dire le contenu du programme de la classe, les commentaires, et autres informations (motivations, références, …).
[28] Elles spécifient donc les productions. Cependant il ne s'agit pas de créer de nouvelles illusions …

L'énoncé[29] (exercice 1)

1) Sur la feuille réponse, ABCDEFGH est une représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 10 cm, et le point R est sur l'arête [EH]. On appelle d la droite parallèle à (BH) et passant par R. On appelle J le second point d'intersection de d et des faces du cube.	

Placer J sur le dessin, en faisant apparaître les traits nécessaires à sa construction et les conventions usuelles permettant de comprendre la construction (par exemple : codage de la perpendicularité ou des angles droits, angles égaux, segments de même longueur, couleur identique pour des points coplanaires, …).

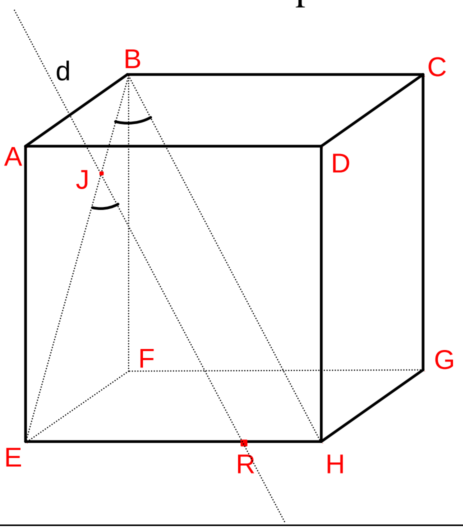
N.B. : aucune justification n'est à produire.

2) On coupe le cube ABCDEFGH par le plan (BDR), et on obtient alors deux solides dont l'un est appelé ABDRES, le point S étant situé sur l'arête [EF] du cube. Citer ci-contre le(s) théorème(s) permettant d'affirmer que (RS) est parallèle à (BD). **N.B. : on ne demande pas de présenter une démonstration.**	.

3) Démontrer que, quand R n'est pas le point H, les droites (AE), (BS) et (DR) sont concourantes (on dit aussi qu'elles ont un et un seul point commun).

[29] La présentation retenue ici n'est pas celle distribuée aux élèves : pour les élèves, la feuille réponse est dissociée de l'énoncé proprement dit.

Les éléments de corrigé[30] (de l'exercice 1)

1) L'intersection se réduit au point J.  	2) Th.1 : deux plans distincts et sécants se coupent suivant une droite. Th.2 : si deux plans sont distincts et parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre ; de plus les intersections sont des droites parallèles.

3) Démonstration de : R n'étant pas le point H, les droites (AE), (BS) et (DR) sont concourantes (on dit aussi qu'elles ont un et un seul point commun).

A, E, H, D et R sont sur le plan P contenant la face AEHD, donc (th.3) les droites (AE) et (DR) sont dans P. Le point R étant distinct de H, (propriétés des faces d'un cube et axiome d'Euclide) (AE) et (DR) ne sont pas parallèles et sont donc sécantes en un point qu'on nomme I. Le point I est sur (DR) et sur (AE) donc (th.3) dans le plan (BDR) et dans le plan (AEB), il est donc (th.1) sur la droite d'intersection des plans (BDR) et (AEB). Or B est un point commun des (BDR) et (AEB). De plus S, par construction, est sur (BDR) et sur [EF] donc (th.3) sur (AEB) ; c'est donc un point commun des plans (BDR) et (AEB). Par suite (th.1) (BS) est la droite d'intersection des plans étant sur l'intersection des plans (BDR) et (AEB). Par suite, I est sur (BS). Les droites (BS), (AE) et (DR) sont donc concourantes en I.	Th.3 : Si un plan contient deux points distincts, alors il contient la droite passant par ces deux points.

Exemple 2 : résolutions d'une même équation de type f(x) = λ, où f est une fonction définie sur un intervalle [a ; b] et λ une constante.

Il a été construit pour suivre l'énoncé de l'exercice 1, en prenant un support dans la géométrie dans l'espace (calcul de volumes). Le support peut être le garde-fou servant à rejeter des candidates-solutions clairement fausses.

[30] Ce sont donc des exemples de produits attendus. On revient à l'idée d'une certaine variabilité à accepter. Incontournable.

Il est divisé en quatre parties, correspondant à quatre façons, quatre techniques de résolution de l'équation :

1. une première technique de résolution, <u>partiellement exposée</u>, consiste à supposer la fonction f affine sur un intervalle, et à utiliser la proportionnalité des accroissements de f sur cet intervalle ; la technique n'est pas menée à son terme. La production attendue est la conjonction d'une fin de (t, τ, θ) et d'un résultat numérique sous une forme imposée ; elle passe par exemple par une technique expliquée ou validée de « produit en croix ». Une seconde tâche me semble ici présente, et elle entre dans les tâches que j'ai notées $\tilde{t}$ **: s'approprier un texte mathématique exposé par autrui, et y reconnaître les savoirs et techniques utilisés**.
2. la seconde partie concerne une technique graphique de résolution de l'équation, la représentation graphique étant à préciser dans un dessin. C'est la question 5) : c'est le résultat de l'utilisation d'une technique qui est attendu. Cette question est précédée de 4 questions : dans chaque cas, la production attendue est un résultat de l'emploi de techniques. Il faut noter que la calculatrice peut faire partie des outils disponibles : aucune interdiction n'a été formulée.
3. la troisième partie concerne une technique de résolution par encadrements successifs : les productions attendues sont des nombres écrits sous une forme particulière. La calculatrice a été clairement sollicitée.
4. la quatrième partie propose une partie d'une technique algébrique de résolution de l'équation, en fait des écritures équivalentes de l'équation ; deux produits sont attendus. On retrouve des tâches $\tilde{t}$ (appropriation d'une technique développée par autrui, va et vient entre modèle mathématique et réalité …). Les produits attendus sont cette fois « des » résultats numériques pour le premier, des technologies pour le second.

L'énoncé[31] (exercice 2)

Dans la suite, on veut savoir où placer le point R sur l'arête [EH] pour que le solide ABDRES de l'**exercice 1** ait un volume de 250 cm^3, et on envisage plusieurs méthodes pour donner une réponse à ce problème.

<u>I. Méthode 1 : des patrons.</u>

De l'imagination. Un élève patient a construit 9 patrons, correspondant à des valeurs différentes de ER, en laissant une face ouverte pour chaque solide construit.

[31] La présentation retenue ici n'est pas celle distribuée aux élèves : pour les élèves, la feuille réponse est dissociée de l'énoncé proprement dit.

En notant le volume d'eau nécessaire pour remplir l'intérieur de chaque solide, et en arrondissant au cm et à la dizaine de cm^3 les plus proches, il a obtenu le tableau ci-dessous :

mesure de ER (en cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
volume d'eau mesuré (en cm^3)	180	210	230	260	290	330	370	410	450

Puis il fait le raisonnement suivant : "On remarque que 250 est entre 230 et 260. D'autre part, pour un accroissement d'une unité de ER, il y a un accroissement de 30 unités pour les volumes, donc pour un accroissement 20 unités sur le volume il y aurait un accroissement de x unités de ER, d'où le tableau de proportionnalité :

1	x
30	20

."

En supposant ce raisonnement acceptable, quelle valeur de ER obtient-on ? Expliquer la réponse. La valeur de ER sera écrite sous la forme d'un quotient irréductible de deux entiers.

II. Méthode 2 : vers une résolution graphique.

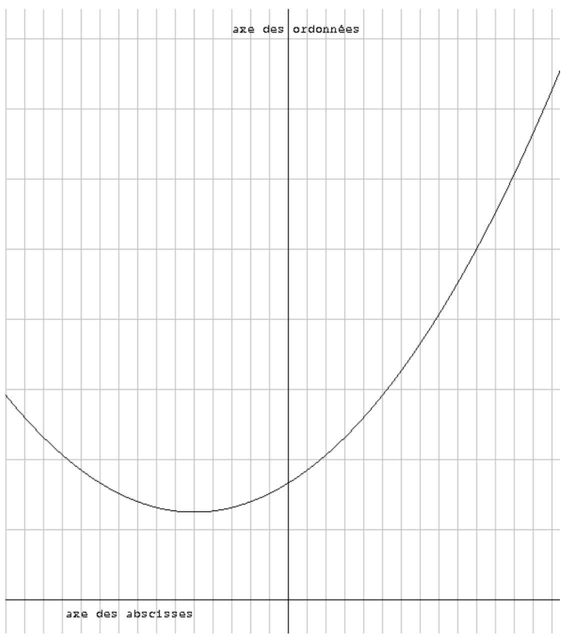
En fait, le volume du solide ABDRES est fonction de ER.

Dans la suite on note v le volume (exprimé en cm^3) du solide ABDRES, et t le mesure de ER (en cm).

La formule permettant de calculer v connaissant t est : $v = \frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right)$.

Le dessin de la feuille-réponse contient la représentation graphique de la fonction décrite précédemment, avec les conventions d'usage. Le quadrillage correspond à des graduations d'une unité sur l'axe des abscisses.

1) Dessiner en rouge sur ce dessin, l'ensemble T de définition de cette fonction, avec les conventions usuelles.
2) Dessiner en vert sur ce dessin, la représentation graphique de cette fonction.
3) Dessiner en bleu sur ce dessin, l'ensemble V des valeurs possibles prises par la variable v, avec les conventions usuelles.



4) Ecrire les ensembles T et V sous forme d'intervalles, les bornes devant être écrites sous forme de nombres rationnels.	
5) Donner une réponse au problème par une méthode graphique, en faisant apparaître sur le graphique de la feuille réponse, tous les traits utiles à une bonne compréhension de la démarche.	

III. Méthode 3 : une méthode d'approximations successives.

On se propose d'améliorer la méthode 2 en utilisant la calculatrice, par une méthode dite d'approximations successives.

1) Ecrire un tableau de valeurs en allant de 1 en 1 pour les valeurs de t à partir de 0. Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

2) Compte tenu du tableau de valeurs, valeurs entières consécutives entre lesquelles choisir t pour que v soit égal à 250.	

3) Ecrire un tableau de valeurs de la fonction avec un pas 0,1 pour les valeurs de t comprises entre les valeurs trouvées en 2). Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

4) On prolonge la procédure développée en 1) 2) et 3). Ecrire un intervalle [a ; b] dans lequel choisir t pour obtenir v = 250, avec b – a = 0,001.	

IV. Méthode 4 : une méthode algébrique.

On envisage ici une résolution algébrique du problème. En seconde il ne s'agit pas de mener à bien, seul, cette méthode, mais il faut être capable de la valider (expliquer pourquoi elle est mathématiquement exacte).

La résolution algébrique s'appuie sur des transformations d'écritures, en partant de $\frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right) = 250$, jusqu'à obtenir une écriture permettant de donner les solutions de l'équation.

On obtient les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right) = 250$$

$$\Updownarrow \qquad \text{a)}$$

$$100 + 10t + t^2 = 150$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2 + 10t + 25 + 75 = 150$$

$$\Updownarrow \qquad \text{b)}$$

$$(t + 5)^2 = 75$$

$$\Updownarrow$$

$$(t + 5)^2 - 75 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \text{c)}$$

$$(t + 5)^2 - \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \text{d)}$$

$$\left(t + 5 - 5\sqrt{3}\right)\left(t + 5 + 5\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \text{e)}$$

$$t + 5 - 5\sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad t + 5 + 5\sqrt{3} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t = -5 + 5\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad t = -5 - 5\sqrt{3}$$

1) Ecrire toutes les solutions exactes du problème posé, à savoir les valeurs de ER pour obtenir le volume de ABDRES égal à 250.	

2) Ecrire sur la feuille - réponse, les propriétés, formules ou théorèmes assurant l'exactitude des transformations faites en a), b), c), d) et e).

a)	
b)	
c)	
d)	

e)	

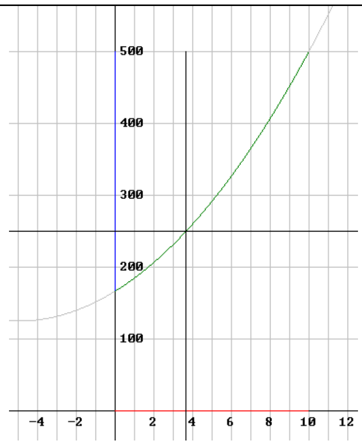
Les éléments de corrigé[32] (de l'exercice 2)

I. Méthode 1 : des patrons

En expliquant la réponse, valeur de ER obtenue par l'élève. Le résultat sera écrit sous la forme d'un quotient irréductible de deux entiers.

Du tableau de proportionnalité $\begin{array}{c\|c} 1 & x \\ \hline 30 & 20 \end{array}$ on obtient (th. dit du produit en croix) 30x = 20 donc x = 2/3. Par suite, ER étant entre 3 et 4, ER = 3 + 2/3, c'est-à-dire ER = 11/3.

II. Méthode 2 : vers une résolution graphique.

1) 2), et 3) Dessins en rouge sur ce dessin, de l'ensemble T de définition de cette fonction, avec les conventions usuelles, en vert sur ce dessin, la représentation graphique de cette fonction, et en bleu sur ce dessin, l'ensemble V des valeurs possibles prises par la variable v, avec les conventions usuelles.	
4) Ecrire les ensembles T et V sous forme d'intervalles, les bornes devant être écrites sous forme de nombres rationnels.	T = [0 ; 10] $V = \left[\dfrac{500}{3} ; 500\right]$
5) Donner une réponse au problème par une méthode graphique, en faisant apparaître sur le graphique de la feuille réponse, tous les traits utiles à une bonne compréhension de la démarche.	(le dessin est à compléter !) On lit que la solution est environ 3,6 (ou 3,7 …).

III. Méthode 3 : une méthode d'approximations successives.

On se propose d'améliorer la méthode 2 en utilisant la calculatrice, par une méthode dite d'approximations successives.

[32] N.B. : comme pour toute évaluation, ce sont des exemples de produits attendus. On revient à l'idée d'une certaine variabilité à accepter. Incontournable.

1) Tableau de valeurs en allant de 1 en 1 pour les valeurs de t à partir de 0. Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

Valeurs de t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeurs de v	166,66	185	206,66	231,66	260	291,66	326,66	365	406,66	451,66	500

2) Compte tenu du tableau de valeurs, valeurs entières consécutives entre lesquelles choisir t pour que v soit égal à 250.	3 et 4

3) Tableau de valeurs de la fonction avec un pas 0,1 pour les valeurs de t comprises entre les valeurs trouvées en 2). Les valeurs de v seront des **troncatures** à la deuxième décimale.

Valeurs de t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
Valeurs de v	231,66	234,35	237,06	239,81	242,6	245,41	248,26	251,15	254,06	257,01	260

4) On prolonge la procédure développée en 1) 2) et 3). Ecrire un intervalle [a ; b] dans lequel choisir t pour obtenir v = 250, avec b – a = 0,001.	[3,66 ; 3,661]

IV. Méthode 4 : une méthode algébrique.

1) Ecriture de toutes les solutions exactes du problème posé.	$-5+5\sqrt{3}$

2) Propriétés, formules ou théorèmes[33] assurant l'exactitude des transformations faites en a), b), c), d) et e).

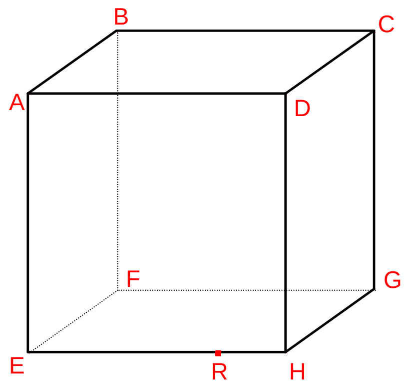
a)	Th.1 : (avec b non nul) $\frac{a}{b}c = \frac{ac}{b}$ Th.2 : (avec b non nul) $\frac{a}{b} = c \leftrightarrows a = bc$
b)	Th.3 : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ Th.4 : $a = b \leftrightarrows a - c = b - c$
c)	Th.5 : (avec a positif ou nul) $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$; Th.6 : $(ab)^2 = a^2b^2$
d)	Th.7 : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
e)	Th.8 : (dit du produit nul) $ab = 0 \leftrightarrows a = 0$ ou $b = 0$.

Exemple 3 : un devoir à la maison consistant à établir une formule.

Ce devoir à la maison peut faire suite aux évaluations 1 et 2 ci-dessus.

[33] On pourra noter qu'une convention est ici présente : l'universalité est supposée, et n'apparaissent que les éventuelles restrictions. Us et coutumes.

Le dessin ABCDEFGH ci-contre est une représentation en perspective cavalière d'un cube d'arête 10 cm, et le point R est sur l'arête [EH].
On coupe le cube par le plan (BDR), et on obtient alors deux solides dont l'un est appelé ABDRES, le point S étant situé sur l'arête [EF] du cube.
Le volume du solide ABDRES est fonction de ER.
Dans la suite on note v le volume (exprimé en cm^3) du solide ABDRES, et t le mesure de ER (en cm).
Sur feuille, pour le ..., établir la formule :



$$\text{(pour t dans [0 ; 10]) } v = \frac{5}{3}\left(100 + 10t + t^2\right).$$

Il me semble clair qu'ici nous nous situons sur des (t, τ, θ), chaque t étant à identifier, et pas tout à fait identiques suivant que le devoir suit ou non les évaluations.

5. Pour conclure ... provisoirement.

On trouvera, dans le prochain numéro (le 108), d'autres exemples, variés mais sans commentaires, ou plutôt laissant aux lecteurs le soin de faire tous les commentaires qu'ils souhaitent.

Bien évidemment, en attendant, j'aurais plaisir à lire toute suggestion, toute critique constructive, toute idée et toute proposition de devoir.

Le taux d'erreur est rarement nul, et le lecteur voudra bien admettre que si erreur il y a, elle est conséquente d'un bogue (cervical, neuronal ou au niveau des doigts), et je remercie par avance quiconque me signalera tel ou tel lapsus.

A suivre ... bientôt.

Preuves visuelles

Michel LAFOND

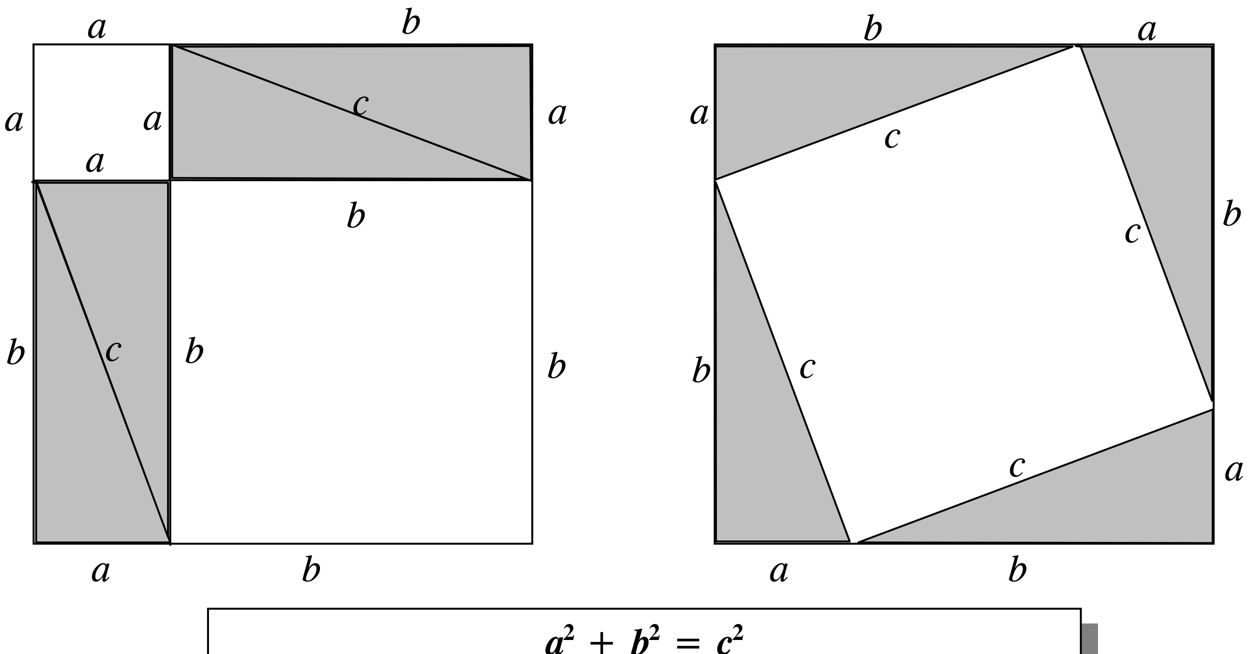
Mots clés : *Preuves, démonstration.*

Résumé : *Des exemples de preuves sans mots, à partir de figures, dans de nombreux domaines des mathématiques.*

1. Peut-on faire des démonstrations mathématiques sans phrases ?

Pire, sans mots ?
Une preuve étant destinée à convaincre, si on ne parle pas il faut faire autre chose, et en ce qui concerne les maths, il ne reste guère que les dessins (figures géométriques, représentations graphiques, graphes, etc.).

A tout seigneur tout honneur, voici pour commencer une preuve « visuelle » du théorème de Pythagore (ma préférée car il y en a des dizaines) :



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Il n'y a pas de mots (sauf évidemment les désignations des variables, qu'on pourrait d'ailleurs omettre en laissant au lecteur le soin de deviner lui-même l'énoncé du théorème visualisé).

Le lecteur est censé voir deux carrés égaux, donc de même aire. Ensuite il est censé ôter visuellement les parties grisées (qui sont les mêmes de chaque côté). Ce qui reste en blanc se traduit par $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

On a répondu à la question : peut-on faire des démonstrations mathématiques sans phrases ?

La réponse est qu'on peut le faire, mais **doit-on le faire ?**

Il est certain que si l'objectif pédagogique du professeur est de faire rédiger l'élève en bon français, les démonstrations visuelles ne sont guère exemplaires, en tout cas pas suffisantes. Mais si le but est de convaincre, alors où est le mal ?

Cependant si l'objectif pédagogique est de faire aimer les maths, ou plus simplement de montrer que des résultats mathématiques connus peuvent être vus sous un autre angle, alors le régal est assuré.

Pensons au "Cercle des poètes disparus" où le prof monte sur la table pour voir différemment les choses.

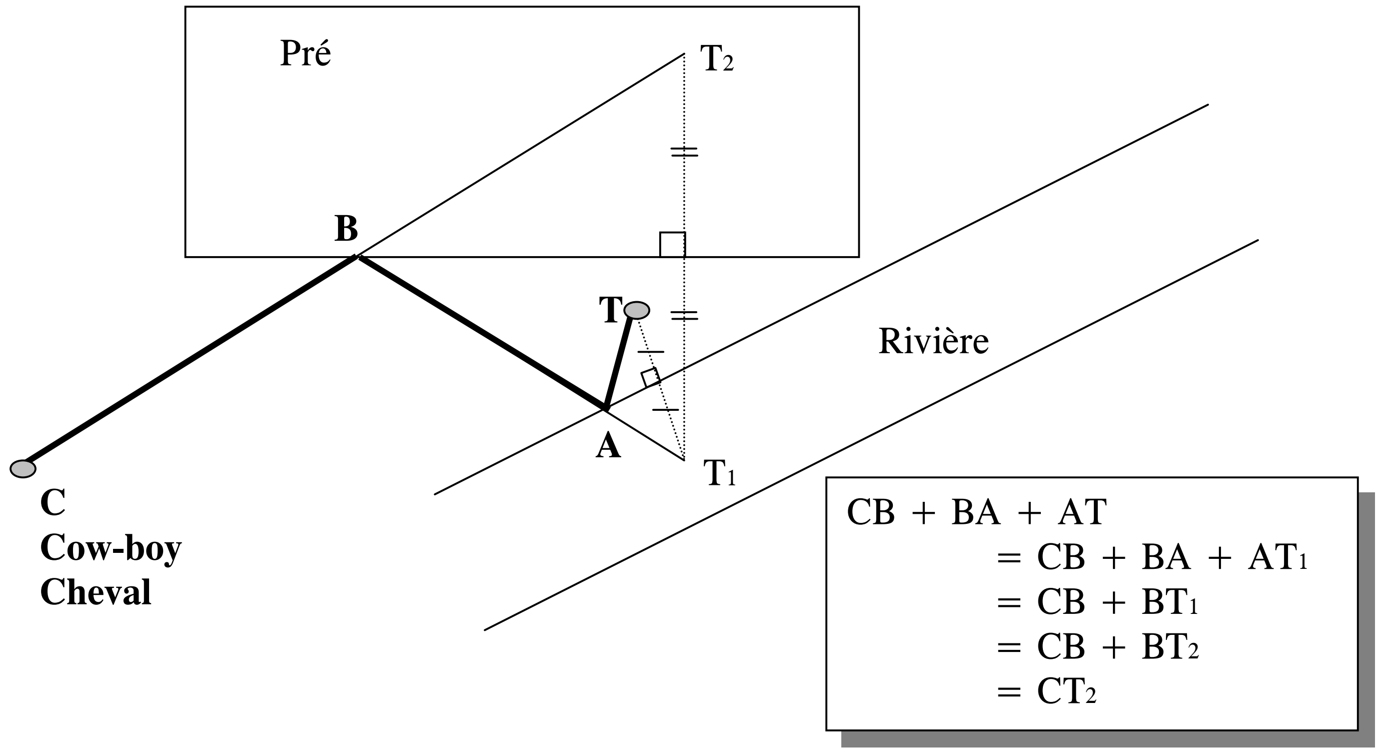
La petite histoire qui suit va préciser ma pensée :

Le cow-boy.

C'est l'histoire du cow-boy et de son cheval (C pour les deux inséparables) qui doit aller faire manger son cheval dans le pré, puis aller chercher de l'eau dans la rivière, et rejoindre sa tente (T) en un trajet CBAT de longueur minimale. On peut faire toutes les démonstrations que l'on veut, tant qu'on n'a pas compris qu'on peut « déplier » tout trajet CBAT par des symétries (lesquelles comme chacun sait sans avoir besoin de démonstration conservent les longueurs), de manière à avoir un segment unique, on ne sera pas convaincu par la solution visuelle ci-dessous. En fait ici, le seul point délicat est de s'assurer que les points T_1 et T_2 ne sont déterminés que par les données initiales du problème (cow-boy, tente, rivière, pré) et que par conséquent B (puis A) sont parfaitement déterminés. Si de plus on est convaincu que le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, c'est terminé.

Mais alors, le dessin est nécessaire, et si on l'a déchiffré, il est suffisant à la compréhension de la solution.

Ainsi, dans cet exemple, une démonstration écrite avec des mots ne peut relever que d'un souci épistémologique.



$$\begin{aligned} CB + BA + AT &= CB + BA + AT_1 \\ &= CB + BT_1 \\ &= CB + BT_2 \\ &= CT_2 \end{aligned}$$

2. Les inconvénients des preuves visuelles.

Hélas, beaucoup de pièges sont à éviter lorsqu'on fait appel à la vision (pensez aux innombrables illusions d'optique). D'une manière générale, le « ON VOIT QUE » est à utiliser avec discernement.

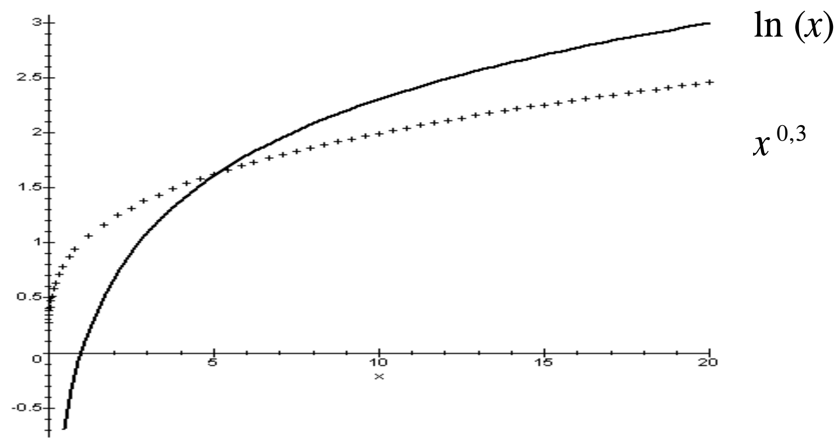
Détaillons trois pièges, mais il y en a probablement d'autres :

- *L'effet horizon.*

Prenons le problème de la croissance comparée de ln (x) et de $x^{0,3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Que voyez-vous sur les représentations graphiques ci-dessous des fonctions

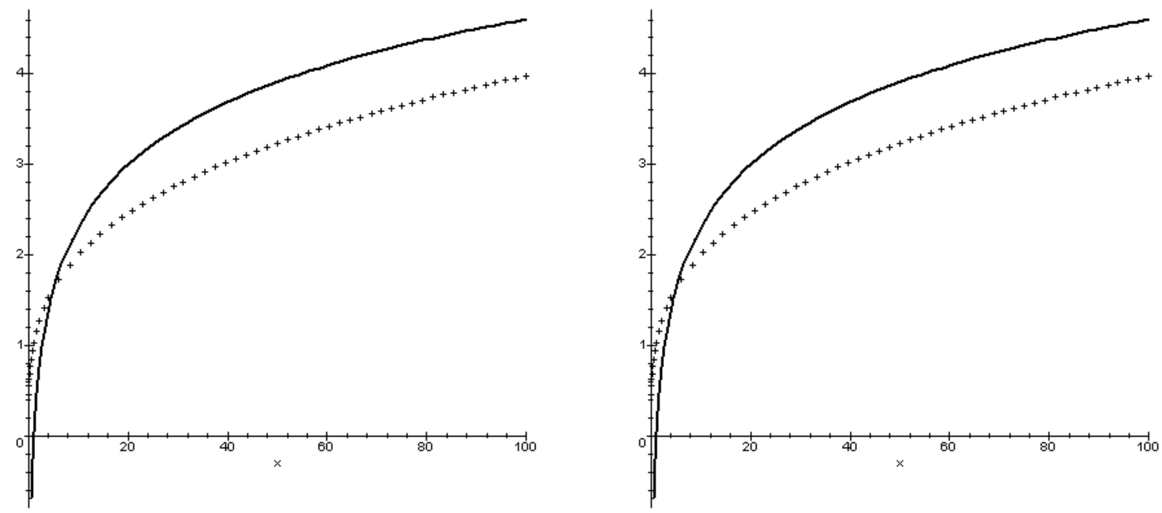
$$x \to \ln(x) \quad \text{et} \quad x \to x^{0,3} \ ?$$



Il semble que ln (x) dépasse de plus en plus $x^{0,3}$ lorsque x est grand.

Mais on a un doute, surtout si on a le vague souvenir que les puissances de x (d'exposant positif) « l'emportent » sur ln (x) pour x grand. D'autant plus que $x = 20$ dans le schéma précédent, ce n'est pas très grand.

Alors, essayons de VOIR plus loin.



Avec un horizon à 100, on n'est guère plus avancé, alors on essaie de voir jusqu'à 500. La puissance (*en pointillé)* finit bien par prendre le dessus, mais on s'est fait avoir une fois et on se méfie.

Ce premier piège à éviter est ce qu'on appelle « **l'effet horizon** » bien connu des joueurs dans les jeux de stratégie. Aux échecs par exemple, les premiers logiciels qui étudiaient disons 5 coups à l'avance, avaient un horizon de 5. Et quelquefois, une mauvaise surprise (comme un excellent coup adverse 6 coups plus tard), que le programme était dans l'impossibilité de prévoir, faisait perdre la machine.

Remarque : L'effet horizon se rencontre aussi plus généralement dans ce qu'on appelle les « mathématiques expérimentales ». Avec les super outils calculatoires qu'on a maintenant, il est possible, même si c'est délicat, de faire calculer à une machine par exemple l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty} \cos(2x) \prod_{n=0}^{\infty} \cos\ (x/n)\ \ dx$ avec disons 40 chiffres significatifs.

On trouve I = 0,39269 90816 98724 15480 78304 22909 93786 05246 …

Celui qui a fait ce calcul est probablement un mathématicien chevronné, et pensera sûrement à la constante

$$\frac{\pi}{8} = 0{,}39269\ 90816\ 98724\ 15480\ 78304\ 22909\ 93786\ 05246\ \ldots$$

S'il en déduit que $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{8}$ il est victime de l'effet horizon, car au-delà de la 41ième décimale, rien ne va plus.

I = 0,39269 90816 98724 15480 78304 22909 93786 05246 **45434 18723**…

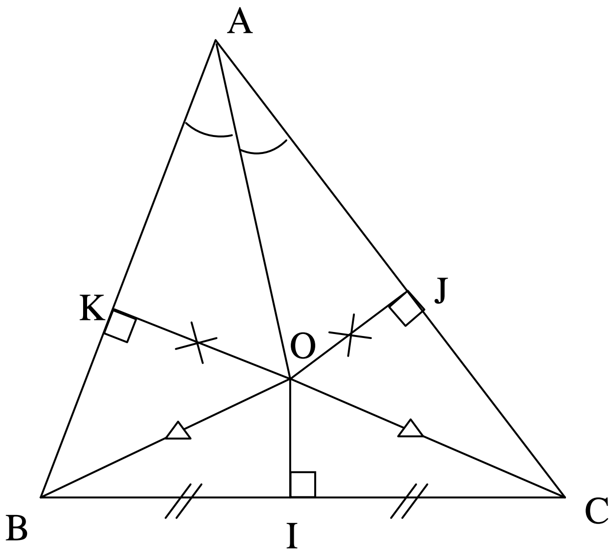
$\dfrac{\pi}{8} =$ 0,39269 90816 98724 15480 78304 22909 93786 05246 **46174 92189**…

- *Les figures fausses.*

Le deuxième piège est celui des figures fausses. Ici, il n'y a pas d'horizon lointain dans la mesure où la figure qui sert de support à la démonstration est bornée, mais en revanche il y a quelque part un bug.

Certains esprits mal intentionnés profitent même de cela pour induire en erreur leurs contemporains en créant ce qu'on appelle des paradoxes mathématiques, comme dans la célèbre démonstration du :

« Théorème : Tous les triangles sont isocèles ».



$\mathrm{OAK}=\mathrm{OAJ} \Rightarrow \mathrm{AK}=\mathrm{AJ}$

$\mathrm{OKB}=\mathrm{OJC} \Rightarrow \mathrm{KB}=\mathrm{JC}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AK}+\mathrm{KB}=\mathrm{AJ}+\mathrm{JC}=\mathrm{AC}$

On a un autre aperçu d'une preuve sans mots ci-dessus. Si la conclusion est fausse, c'est parce que la bissectrice issue de A et la médiatrice du côté opposé se coupent en réalité hors du triangle ABC ce qui invalide la troisième ligne de la « démonstration ». Faites un dessin exact pour voir.

- *Les sous-entendus.*

Le troisième piège est celui-ci : les égalités ou inégalités figurant dans la preuve peuvent nécessiter de la part du lecteur à convaincre un grand nombre de calculs mentaux ou de raisonnements, voire même des compétences qu'il n'a pas.

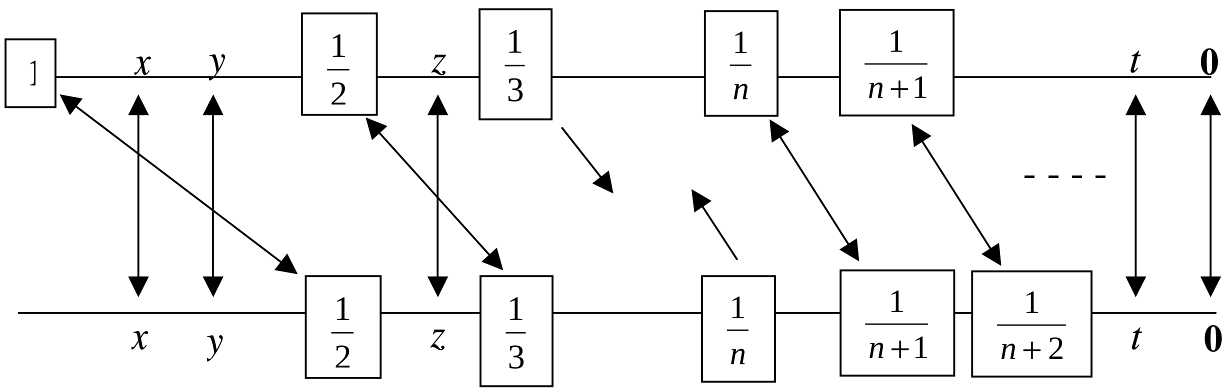
Ainsi, dans la démonstration précédente, on n'a pas DIT que AO est bissectrice et que OI est médiatrice car cela se VOIT. Par contre, on suppose évidentes pour le lecteur les conséquences OJ = OK et OB = OC.

De plus on suppose que le lecteur connaît les cas d'isométrie des triangles…

3. Que peut-on démontrer visuellement ?

Réponse : beaucoup plus de choses que l'on imagine. Nous allons VOIR (c'est le mot qui convient) qu'on peut aborder (en plus de la géométrie, cela va sans dire) à peu près toutes les branches des mathématiques :

- *L'algèbre. Démonstration de l'existence d'une bijection de* **[0 ; 1]** *(1 fermé) sur* **[0 ; 1[** *(1 ouvert).*



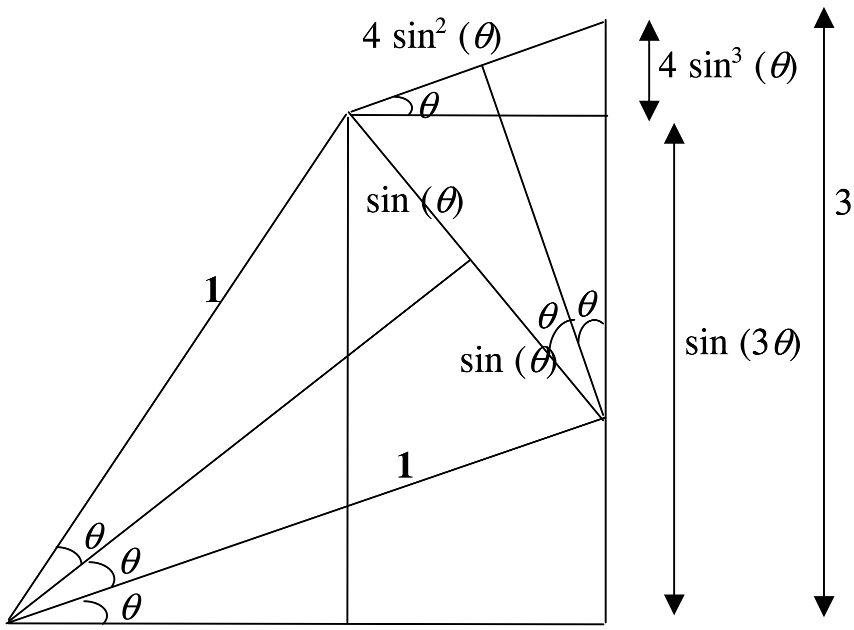
Je pourrais parfaitement faire une démonstration traditionnelle qui commencerait par :

$$\text{Soient } A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ ---}\} \quad B = A - \{1\} \quad C = [0\,;1] - A.$$

On a les partitions **[0 ; 1]** = A ∪ C et **[0 ; 1[=** B ∪ C etc.
Mais qui lira cette démonstration après avoir vu la figure ?

Alors, économisons nos forces pour la suite.

- *La trigonométrie. VOIR ci-dessous la démonstration de sin (3θ) = 3 sin (θ) - 4 sin^3 (θ)*



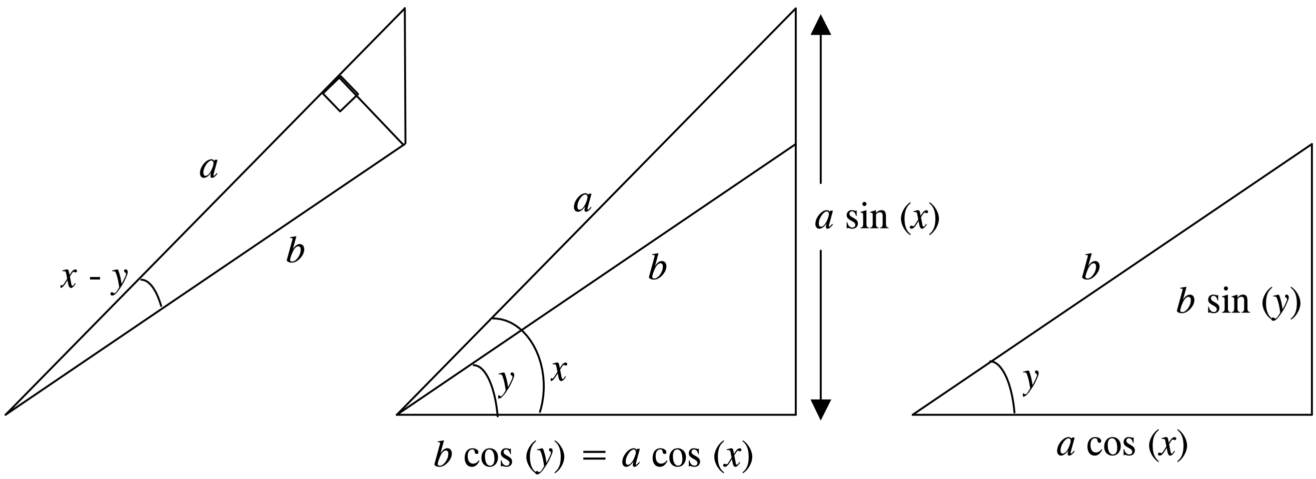
$$\boxed{\sin(3\theta)=3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)}$$

La seule petite difficulté est de VOIR le sin (3θ) (translaté) et surtout le 4 sin^3(θ) : Pour cela on doit VOIR 2 sin(θ) qui se multiplie par sin (θ) pour donner 2 sin^2(θ) le long d'un segment du haut, quantité qui se multiplie par 2, puis encore par sin(θ). Ce n'est pas si difficile.

Voyons ci-dessous, la démonstration lumineuse de la « formule d'addition » :

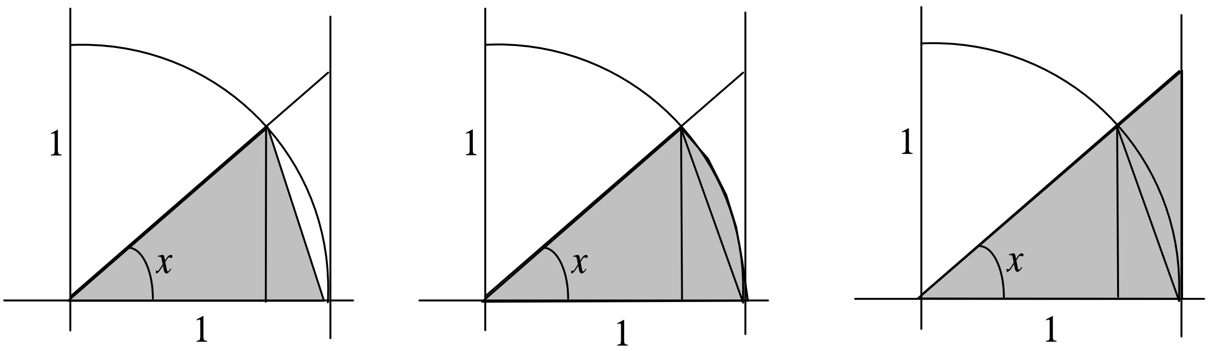
$$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Il y a eu simplification par *ab* en passant des aires de la figure à l'identité souhaitée.



$$\boxed{\sin (x - y) \qquad = \qquad \sin x \cos y \qquad - \qquad \cos x \sin y}$$

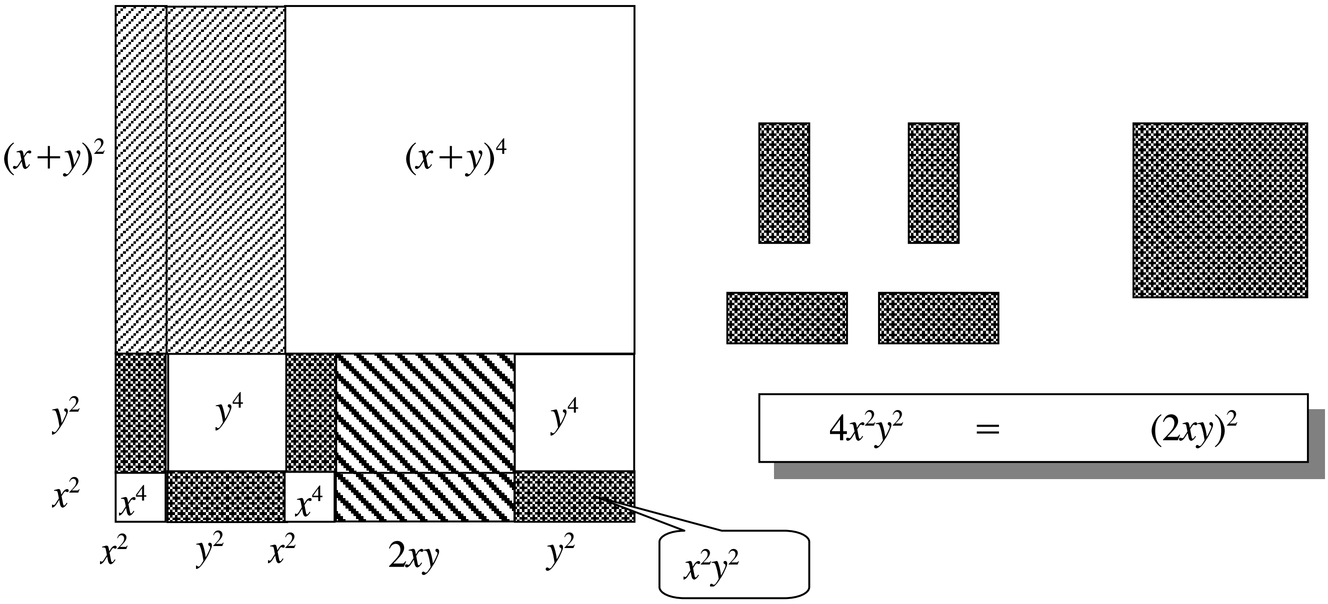
Toutes les formules de trigonométrie que j'ai apprises à l'école se démontrent visuellement.
Jean-Claude ANDRIEUX avait montré dans le numéro 61 de la feuille de vigne qu'il est très facile de VOIR pourquoi lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{1}{2}\sin(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan(x)$:



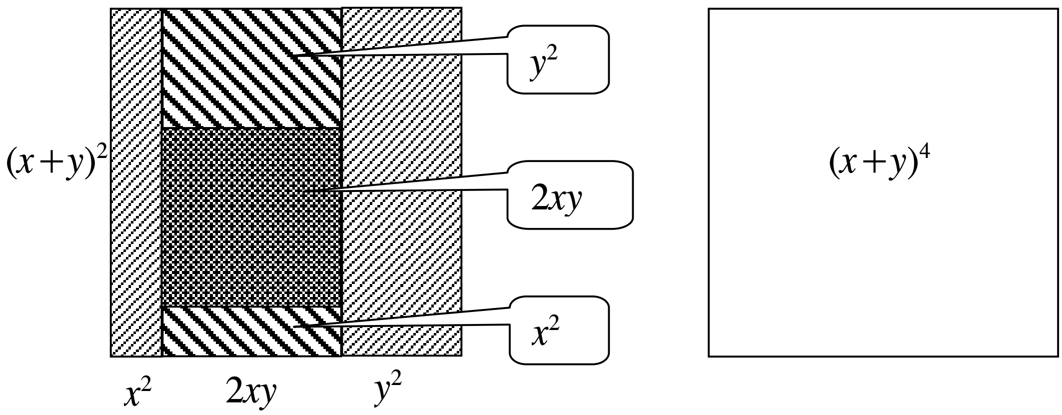
$$\frac{1}{2}\sin(x) \quad < \quad \frac{1}{2}x \quad < \quad \frac{1}{2}\tan(x)$$

- *Les identités.*

Passons sur le théorème de Pythagore déjà traité, et sur l'incontournable $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ qu'on peut facilement laisser comme exercice, pour piocher dans le degré 4 avec l'identité de Giacomo Candido comme l'appellent les Italiens et qui s'écrit $[x^2+y^2+(x+y)^2]^2 = 2[x^4+y^4+(x+y)^4]$.

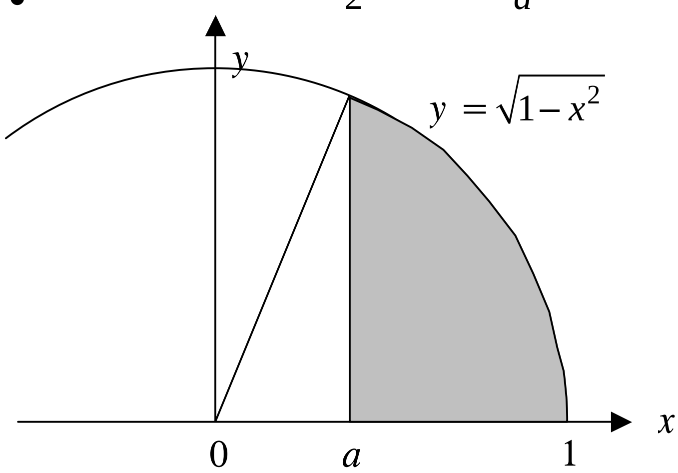


$$4x^2y^2 \quad = \quad (2xy)^2$$



$$(x^2+2xy+y^2)^2 \quad = \quad ((x+y)^2)^2 = \quad (x+y)^4$$

- *Le calcul intégral. Avec la valeur exacte de*
- $\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \dfrac{\cos^{-1} a}{2} - \dfrac{a\ \sqrt{1-a^2}}{a} \qquad a \in [-1,1].$



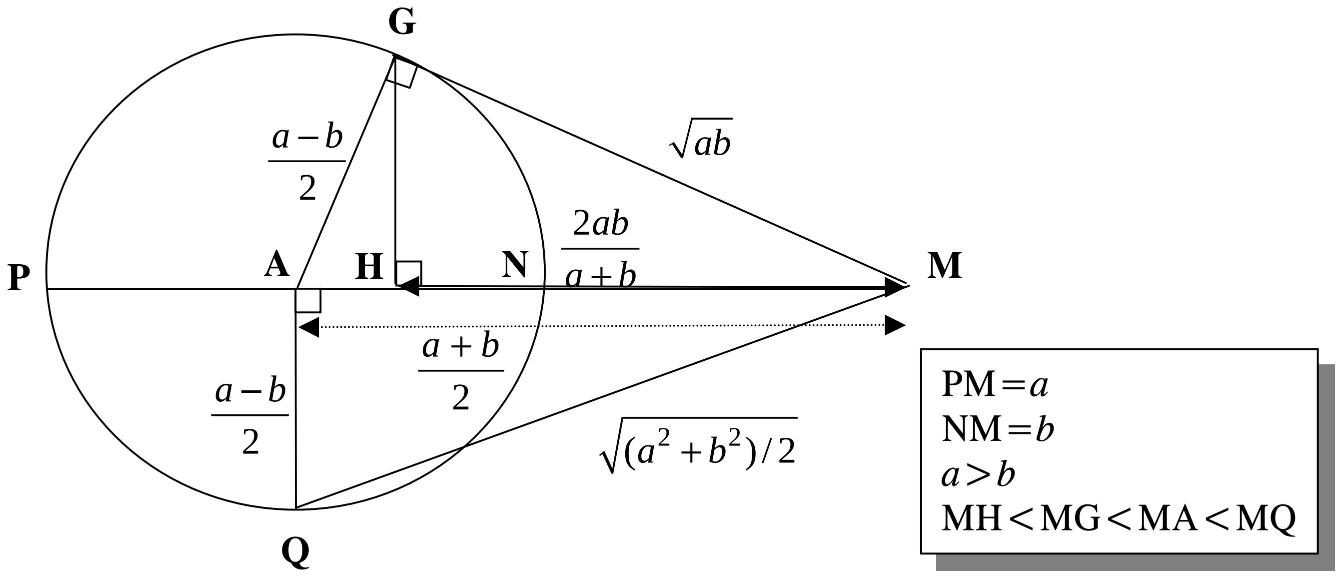
$a \in [0,\ 1]$

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\cos^{-1}(a)}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

Une autre figure démontrerait le résultat (identique) dans le cas $a \in [-1,\ 0]$.

- *Les inégalités.*

Voici la démonstration visuelle des inégalités classiques MH ≤ MG ≤ MA ≤ MQ où : MH, MG, MA, MQ sont respectivement les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique de deux réels positifs $a > b$.



Il faut VOIR dans l'ordre :

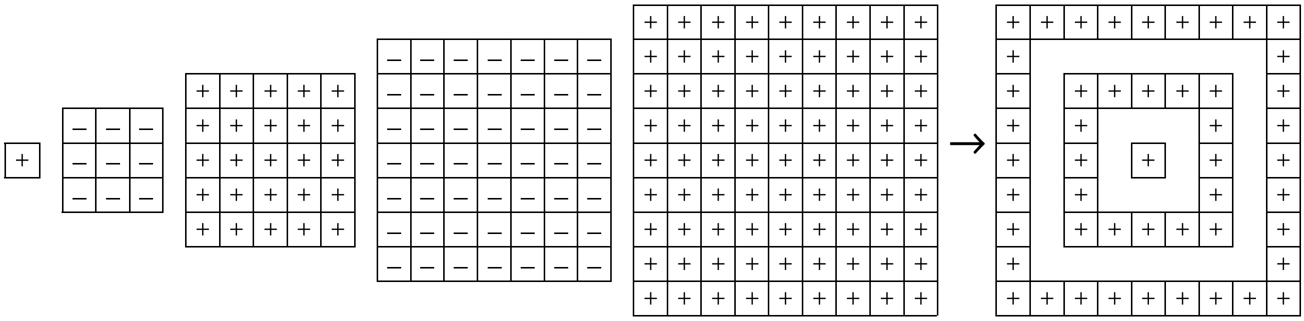
$$\frac{a-b}{2},\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{(a^2+b^2)/2},\ \frac{2ab}{a+b} = \text{MH. [Car MH. MA} = \text{MG}^2].$$

Le lecteur est censé connaître les expressions analytiques des moyennes et un peu de géométrie.

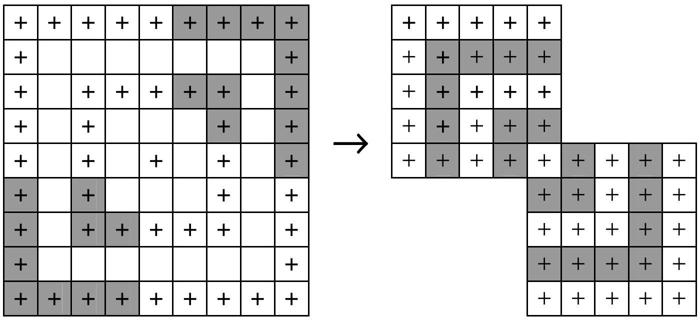
- *Les sommations finies.*

Si n est un entier <u>impair</u>, $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \ (2k-1)^2 = 2 \ n^2 - 1$.

La démonstration qui suit n'utilise pas un seul mot ! On pourrait même omettre la légende intermédiaire pour parvenir au dépouillement suprême :



1 **- 3²** **+ 5²** **- 7²** **+ 9²**



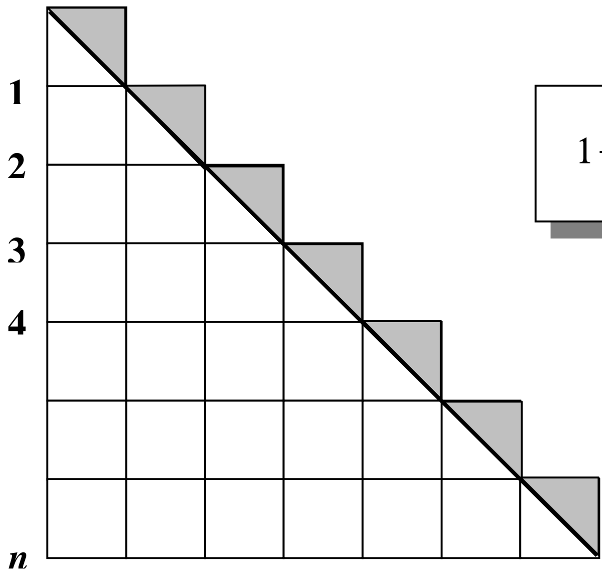
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (2k-1)^2 = 2n^2 - 1$$

$$n \equiv 1 \mod (2)$$

Remarque : la même technique permet de démontrer que si *n* est un entier pair :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \quad (2k-1)^2 = 2 \quad n^2 .$$

La preuve de $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est très connue :



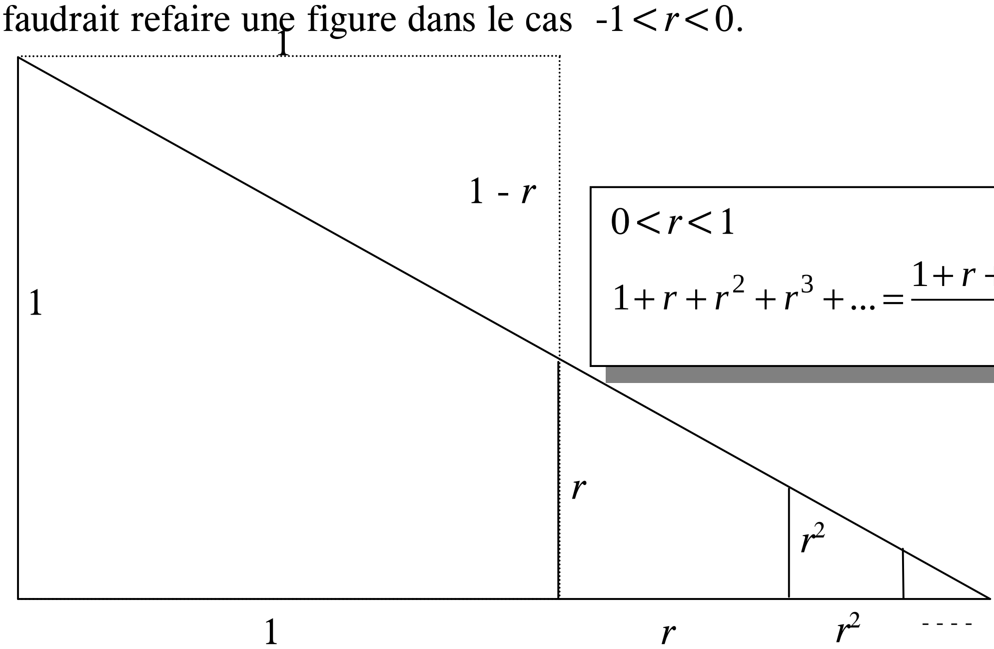
$$1+2+3+\text{---}+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dans la démonstration ci-dessous, un effort particulier est nécessaire pour bien VOIR les cubes.

$$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + \mathit{n}^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \mathit{n})^2}$$

- *Les séries.*

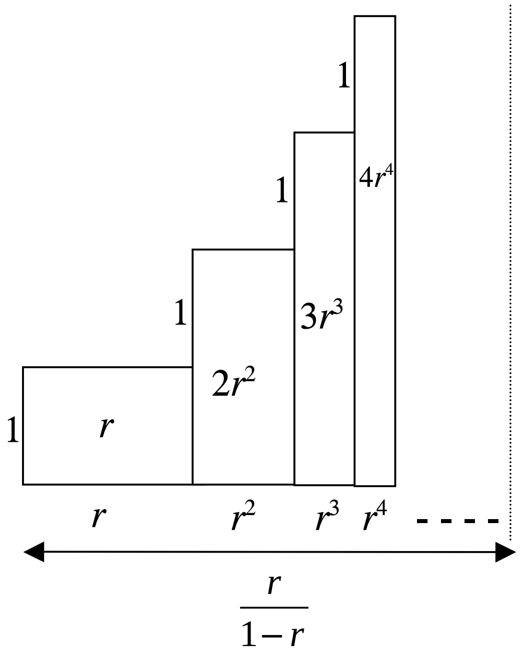
On ne peut pas éviter la preuve visuelle de la somme d'une série géométrique faite ici dans le cas $0 < r < 1$.
Il en existe de nombreuses, la preuve ci-dessous est une des plus simples.
Il faudrait refaire une figure dans le cas $-1 < r < 0$.

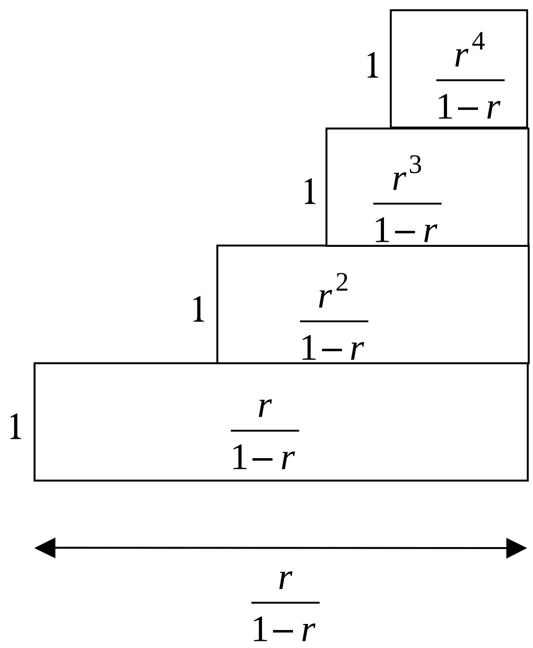


$0 < r < 1$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1 + r + r^2 + r^3 + \ldots}{1} = \frac{1}{1 - r}$$

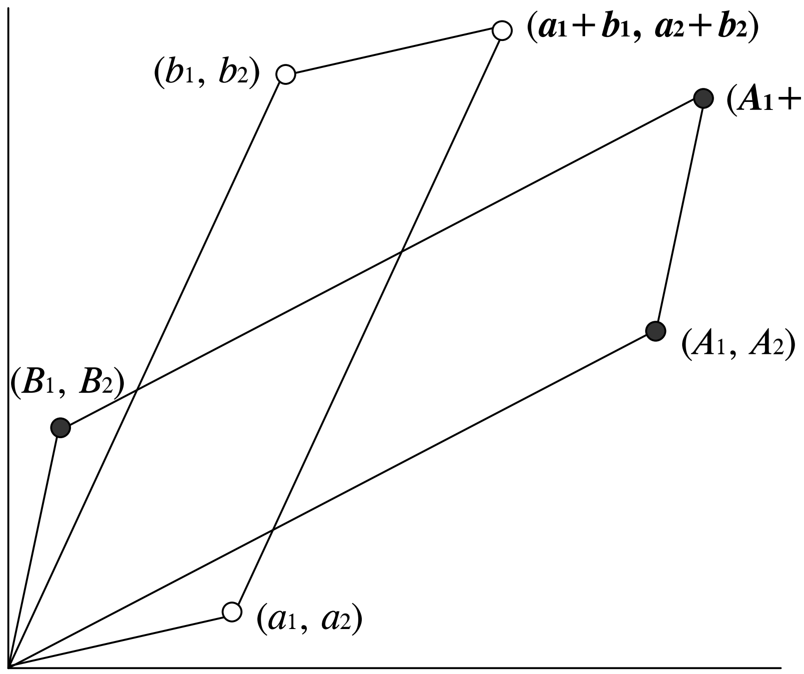
Voici la très belle démonstration de $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$ qui suppose connue la démonstration précédente, et basée sur ce qu'on appelle l'escalier de Gabriel :





$$\boxed{r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \dots = \frac{r}{1-r}\left(1 + r + r^2 + r^3 + \dots\right) = \frac{r}{(1-r)^2}}$$

- *Les statistiques.*



$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{A_2}{A_1} \qquad \frac{b_2}{b_1} < \frac{B_2}{B_1}$$

$$\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1} > \frac{A_2+B_2}{A_1+B_1}$$

L’explication visuelle du paradoxe de Simpson, ci-dessus, est bien meilleure que les contre-exemples qu’on donne habituellement pour comprendre ce qu’on appelle aussi « L’effet de structure ».

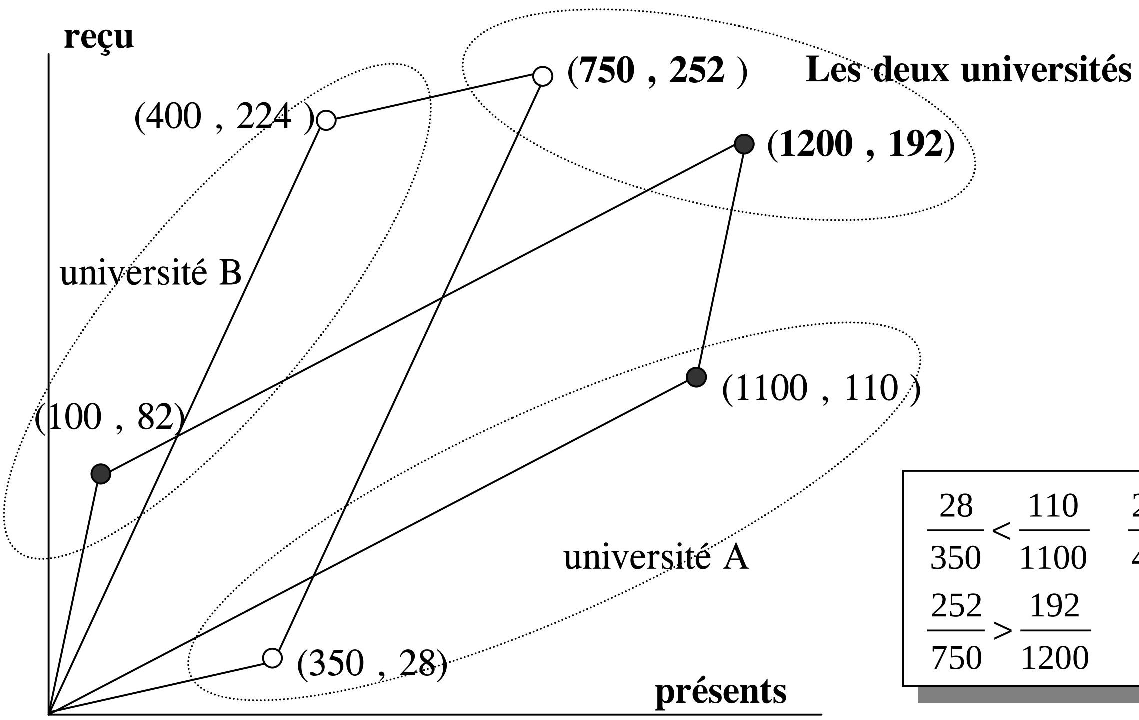
Une explication s’impose :

Pour un même examen, on compare les proportions de reçus chez les étudiantes et chez les étudiants dans deux universités A et B, puis globalement :

	Étudiantes			Étudiants		
A	présents	1100	**10 %**	présents	350	**8 %**
	reçus	110		reçus	28	
B	présents	100	**82 %**	présents	400	**56 %**
	reçus	82		reçus	224	
A ∪ B	présents	1200	**16 %**	présents	750	**33,6 %**
	reçus	192		reçus	252	

Le paradoxe est que dans les deux universités les étudiantes font mieux que les étudiants, soit en pourcentages : [$10 > 8$ et $20 > 56$], alors que globalement les étudiantes font moins bien que les étudiants soit en pourcentages : [$16 < 33{,}6$].

Les 12 effectifs du tableau sont représentés par les 12 coordonnées du graphique ci-dessous. Les abscisses sont les présents et les ordonnées les reçus. Les données des étudiants sont les ronds blancs, celles des étudiantes les ronds noirs.



$$\frac{28}{350} < \frac{110}{1100} \qquad \frac{224}{400} < \frac{82}{100}$$

$$\frac{252}{750} > \frac{192}{1200}$$

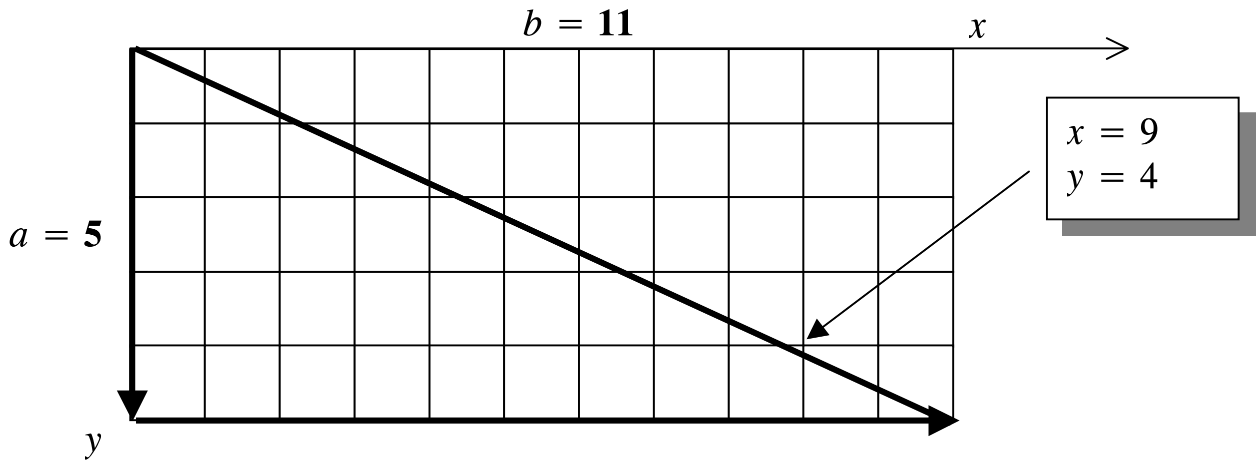
Les proportions de succès deviennent donc des pentes de droites, et on VOIT bien comment peut apparaître le paradoxe.

- *La théorie des nombres semble absente. Ce serait dommage !*

Le crible d'Ératosthène est bien une manière géométrique de déterminer les nombres premiers, mais il est vrai qu'on ne voit guère comment représenter géométriquement les notions de PGCD, de congruences etc. Et pourtant, terminons par une résolution sans calcul de l'équation de Bezout :

$ax+by = 1$. [a, b entiers donnés premiers entre eux]

Exemple : Soit à résoudre $5x - 11y = 1$ dans Z.

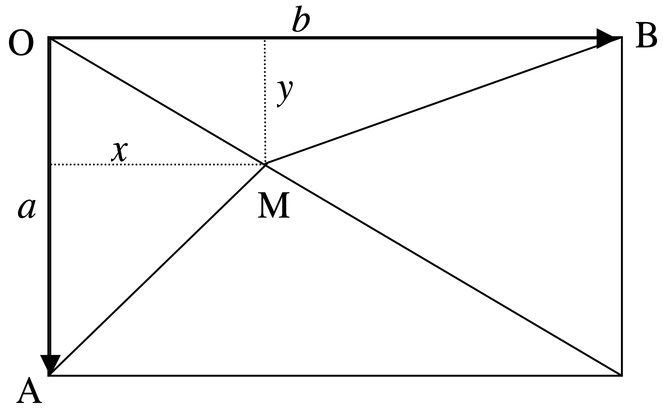


Il faut une explication, pour dire où l'on doit regarder.

La solution « fondamentale » de l'équation s'obtient ainsi :

On construit un triangle rectangle de côtés $a=5$; $b=11$ (les deux paramètres de l'équation).
On choisit le point du quadrillage extérieur au triangle qui est le plus près de l'hypoténuse.
Les coordonnées de ce point donnent la solution fondamentale, ici $x=9$, $y=4$.
Vérification : $5\times 9-11\times 4=1$.
Et on sait que la solution générale de $5x-11y=1$ dans Z est alors $x=9+11t$;
$y=4+5t$ $t \in$ Z.
Remarque : Pour résoudre $5x-11y=-1$ dans Z on procède comme ci-dessus, mais on choisit le point du quadrillage intérieur au triangle qui est le plus près de l'hypoténuse. Ici $x=2$, $y=1$.

L'explication ?



Dans le rectangle ci-dessus, les triangles MOA et MOB ont la même aire (si M est sur l'hypoténuse).

Ce qui se traduit avec les notations de l'équation précédente par l'égalité $ax–by=0$.

Mais a, b étant premiers entre eux, M ne peut pas avoir ses deux coordonnées entières en restant sur l'hypoténuse. On minimisera donc ax-by en choisissant M (de coordonnées entières) le plus près possible de l'hypoténuse.

Bien sûr, il faut prouver que ce minimum en valeur absolue est 1.

5. Bibliographie.

Complexités. Jean-Paul Delahaye ; 2006 ; Belin pour la science (Paris) ;
(pour la remarque du paragraphe II).

Proofs without words. Roger B. Nelsen ; 1993 ; The Mathematical Association of America (Washington).
Il y a deux tomes entièrement consacrés aux preuves visuelles.
Presque toutes les figures de cet article sont extraites du tome 1.
On peut y déguster entre autres, des démonstrations visuelles :

De l'inégalité de Bernoulli ;
De l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
De la sommation des carrés des n premiers entiers ;
De la formule du volume de la sphère ;
De la formule donnant la distance d'un point à une droite ;
De la somme de la série harmonique alternée soit ln (2) ;
Et même de l'égalité $\quad 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\ (x/2^n)}{\sin\ (x/2^{n-1})}=\tan(\frac{x}{2})$ pour $|x|<\pi$!

Hypatie, femme, grecque, mathématicienne oubliée

Marie-Noëlle RACINE, IREM Dijon,

Résumé : *Hypatie vécut à Alexandrie. Elle y professa les mathématiques et la philosophie. Née à la fin du 4e siècle, elle fut massacrée en 415. Cet article a pour but de replacer sa vie dans le contexte social, politique, culturel, mathématique de son époque (l'Antiquité grecque), de faire travailler, à partir d'un texte de son père Théon d'Alexandrie, sur des mathématiques qu'elle a pu pratiquer : l'algorithme d'extraction d'une racine carrée.*

Mots clés : *Hypatie, mathématicienne, Théon d'Alexandrie, extraction d'une racine carrée.*

L'histoire n'accorde aux femmes qu'une place minime, même quand elles ont joué un rôle de premier plan, plus particulièrement dans le domaine des mathématiques. Cet article a pour but de replacer Hypatie dans son contexte social, politique, culturel, mathématique, de faire travailler sur des mathématiques qu'elle a pu pratiquer.
Les mathématiques sont nées dans l'Antiquité, commençons notre histoire dès l'Antiquité. Rapprochons-nous de l'Europe, nous arrivons dans la Grèce antique. La période usuellement appelée de cette façon pourrait débuter avec les premiers jeux olympiques vers -776, et se poursuivre jusqu'au milieu du 6ème siècle de notre ère. C'est-à-dire que cette période s'étale sur plus de mille ans, voire presque douze siècles.
Hypatie vécut à la fin de la période que nous considérons.

1. Sur le plan politique et culturel.

Depuis le 8e siècle avant notre ère, nous pouvons citer Homère, la bataille de Marathon, la construction du Parthénon, Périclès (-460 ; -430), les guerres médiques, Aristophane (-415 ; -399), Socrate, Platon et son Académie (-360), Aristote (-340), Alexandre, la création de la ville d'Alexandrie et de sa bibliothèque (vers -300), puis le développement de Pergame et l'apparition du parchemin alors qu'à Alexandrie on utilisait toujours le papyrus, la conquête romaine, Cicéron, César, puis l'Egypte qui devient entièrement romaine après la capitulation de la dernière des souverains Ptolémée, Cléopâtre, l'étouffement des sciences pures au profit des applications techniques. Débute alors l'ère chrétienne, c'est le règne de Néron, Trajan, c'est la catastrophe de Pompeï. Vers 300, Byzance, qui s'appellera Constantinople puis actuellement Istanbul, devient la capitale de l'empire romain. Vers 500, on y construira l'église Sainte Sophie.

2. Sur le plan mathématique.

Que s'est-il passé ? On parle de l'émergence d'une pensée abstraite dans l'école ionienne, avec des personnages comme Thalès (-624 ; -548), puis Pythagore et son école dans laquelle les femmes étaient admises à travailler, sans doute comme leurs condisciples hommes, après plusieurs années en tant qu'acousmaticiens (qui recevaient seulement les résultats) avant de faire partie des initiés (qui recevaient aussi les démonstrations). Après ce premier foyer mathématique, se développe un deuxième foyer autour de la bibliothèque d'Alexandrie, à partir de -300 environ, dont les plus célèbres représentants furent Euclide, Aristarque (-290), Archimède (-287 ; -212), Eratosthène (-250), Apollonius (-230). Citons ensuite, au premier siècle avant notre ère, l'architecte romain Vitruve, puis dès le premier siècle de notre ère, Nicomaque, Claude Ptolémée (100 ; 170), Diophante (vers 200), Pappus (320), Théon d'Alexandrie et Proclus de Lycie. Hypatie, fille de Théon, pratiqua les mathématiques à ce moment-là.

3. Sa vie.

Hypatie serait tombée dans l'oubli si un auteur anglais du 18ème siècle, Gibbon, qui effectuait des recherches au Vatican sur la décadence de l'empire romain, n'avait pas retrouvé sa trace dans les écrits de Socrate le scolastique, l'un des contemporains d'Hypatie. On fixe généralement sa naissance vers 355, ou 370, voire 380 selon les auteurs. Comme elle a travaillé avec son père décédé en 377, elle est donc plus probablement née bien avant 370. A la fin du 4ème siècle, Alexandrie est gouvernée par les Romains. Ils veulent imposer leur religion, le christianisme. Hypatie, platonicienne, parle grec, serait sans doute athée, professe la philosophie et les mathématiques non seulement au museum à la suite de son père, mais aussi dans la rue. Son influence est grandissante même auprès des autorités romaines comme le préfet Oreste, ou ecclésiastiques comme l'évêque Synésius de Cyrène. Sa beauté est légendaire, mais il ne subsiste aucun portrait de son vivant. Cette influence grandissante a pu générer des jalousies et contrarier l'évêque romain Cyrille, successeur de Synésius, catholique convaincu qui a développé une communauté de moines fanatiques, qui s'occupaient des pauvres et des handicapés, des malades contagieux et profitaient de toutes occasions pour embrigader la population qui se laissait aveugler par leurs manières sournoises. Jalousies, fanatisme religieux ? On ne saura sans doute jamais exactement ce qui incita la foule furieuse à tuer Hypatie à coups de pierres, à brûler tous ses écrits. Cette mathématicienne philosophe connut une fin tragique. Cyrille fut sanctifié, Hypatie rejetée dans l'oubli. Théon et Hypatie furent les derniers mathématiciens connus de l'antiquité. Le museum fut fermé, la bibliothèque désertée quelques 100 ans plus tard puis incendiée et détruite. Ces événements sont aussi associés au déclin de l'empire romain.

4. Comment considérait-on les femmes à son époque ?

Dans la tradition grecque, reprenons les écrits d'Aristophane. Dans la Grèce antique, les femmes n'ont pas la parole, elles n'ont même pas le droit de siéger aux assemblées (d'ailleurs en France, le vote des femmes n'a été acquis qu'après la deuxième guerre mondiale). Dans sa pièce *l'assemblée des femmes*, Aristophane (-415 ; -399) décrit une situation où les femmes tentent de faire entendre leur voix. Elles ont pris les habits de leurs maris et s'en sont vêtues pour pouvoir entrer à l'assemblée. C'est Praxagora qui est à la tête du mouvement. Voici quelques extraits de ce que Aristophane lui fait dire dans une harangue :

> *« Elles se font des petits plats comme avant ; Elles aiment le vin pur comme avant ; Elles ont plaisir à être baisées comme avant. A elles donc, ô hommes, confions l'état sans ergoter ; et ne nous demandons pas ce qu'elles vont faire, mais laissons-les tout bonnement gouverner. Considérons seulement ceci : d'abord qu'étant mères elles auront à cœur de sauver les soldats. Ensuite, pour ce qui est des vivres, qui mieux qu'une mère pressera l'envoi ? Pour se procurer de l'argent rien de plus ingénieux qu'une femme ; au pouvoir, elle ne sera jamais dupée ; car elles-mêmes sont habituées à tromper. »*

Voilà des propos bien moqueurs, nuancés toutefois par le fait que les femmes sauront permettre de trouver des compromis pour faire cesser les guerres médiques ravageuses.
Dans la tradition romaine, que dire sinon que la femme est réduite à son rôle de mère et à une totale soumission à la vie familiale.

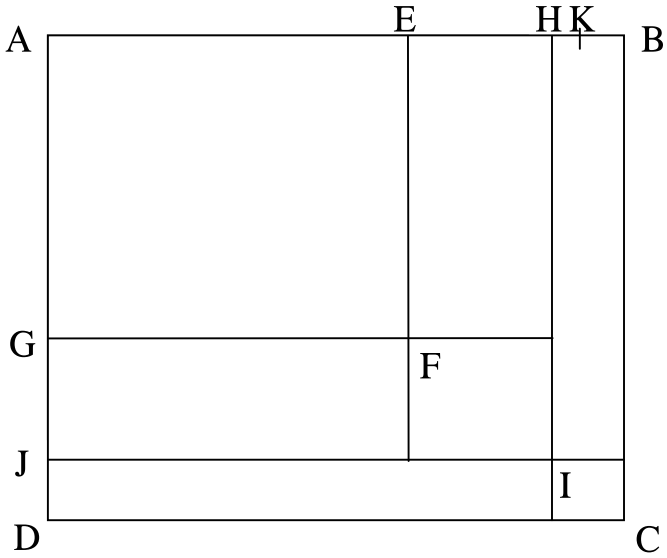
5. Son œuvre et les mathématiques qu'elle a pu pratiquer.

On ne connaît les travaux d'Hypatie qu'à travers les lettres de ses amis. Elle aurait imaginé un planisphère, serait à l'origine de l'aréomètre (ou pèse-liqueur), aurait

commenté les *Coniques* d'Appollonius, ainsi que les livres d'arithmétique de Diophante. Elle aurait, avec son père Théon, commenté les travaux d'Euclide et aurait participé à l'élaboration des tables d'astronomie accompagnant le commentaire de l'*Almageste* de Ptolémée. Pour connaître le genre de mathématiques ou de calculs pratiqués par Hypatie, reprenons un texte de son père Théon d'Alexandrie : dans l'*Almageste*, Ptolémée donnait comme valeur approchée de la racine carrée de 4500, 67°4'55'', sans explications. Théon détaille le calcul.
Extrait du commentaire sur le premier livre de la syntaxe mathématique de Ptolémée.
Texte grec in Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, ed. A. Rome, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936 (t.II, p.471-473). Trad M. Crubellier. Et paru dans « Histoires d'algorithmes » édité par Belin, auteurs Chabert, Barbin, Guillemot, Michel-Pajus, Borowczyk, Djebbard, Martzloff, à Paris en 1994, pages 233 et 234.
« Soit une surface carrée ABCD, exprimable en puissance seulement, dont l'aire est de 45OO degrés ; on demande de calculer le côté du carré le plus proche. Puisque donc le nombre carré le plus proche de 4500 qui ait un carré fait d'unités entières est 4489 unités, dont le côté est de 67, retranchons du carré ABCD le carré AF qui vaut 4489 unités, dont le côté est de 67 unités. Le reste, le gnomon BFFD vaut donc 11 unités, que nous exprimons en les réduisant en minutes, soit 660'. Ensuite nous doublerons le segment EF, parce que le rectangle de côté EF [est pris] deux fois, comme si l'on posait que EF est sur la droite FG, puis nous diviserons 660 minutes par le résultat 134, et le résultat de la division, 4 minutes, nous donnera les deux [segments] EH et GJ. Et en complétant les parallélogrammes HF, FJ, nous trouverons que ceux-ci valent 536 minutes, chacun des deux valant 268. Ensuite, nous réduirons à leur tour les 124 minutes restantes en 7440 secondes et nous soustrairons le carré FI construit sur [un côté égal à] 4 minutes, qui vaut 16 secondes, afin que, ayant placé un gnomon autour du carré initial AF, nous obtenions le carré AI de côté 67°4', constitué de 4497 degrés 56'16'', et comme reste, cette fois le gnomon BIID qui vaut 2 degrés 3'44'', c'est-à-dire 7424 secondes. Nous doublerons cette fois HI, comme si HI se trouvait sur la droite IJ, et, ayant divisé les 7424 secondes par le résultat 134'8'', le résultat de la division 55 secondes à peu près, nous donne une approximation des deux [segments] HB, JD. Et en complétant les parallélogrammes BI, ID, nous trouverons que ceux-ci valent 7370 secondes et 440 tierces, chacun des deux valant d'une part 3685 secondes et 220 tierces. Et il est resté comme différence 46 secondes et 40 tierces, ce qui fait à peu près le carré IC dont le côté se trouve être de 55 secondes, et nous avons trouvé que le côté du carré ABCD qui se compose de 4500 degrés, est à peu près de 67°4'55''.
De sorte qu'en général, si nous cherchons à calculer la racine carrée d'un nombre, nous prenons d'abord le côté du nombre carré le plus proche. Puis nous le doublons et nous divisons par le résultat le nombre restant, après avoir réduit en minutes, et du résultat de la division nous retranchons un carré, puis ayant réduit à

son tour le reste en secondes, en le divisant par le double des degrés, minutes et secondes, nous obtiendrons à peu près le nombre que nous cherchons, celui du côté de la surface carrée [donnée]. »
Nous pouvons de suite faire une remarque : sous domination romaine, Théon, et Hypatie, parlaient et écrivaient en grec, mais pour les calculs, ils n'utilisaient ni le système de numération grec, ni le système de numération romain peu pratiques pour les opérations. Le système sexagésimal babylonien était plus courant pour eux.

Suivons ces calculs pas à pas avec la figure ci-dessous :



L'aire du carré ABCD est 4500. L'unité annoncée dans le texte est le degré. Comme l'unité qui mesure le côté est aussi le degré, l'unité qui mesure l'aire serait, pour nous, le degré carré. L'aire de AEFG est 4489 degrés (degrés carrés). Une première valeur approchée de la racine carrée de 4500 est 67 car 67^2 est égal à 4489, plus grand carré entier contenu dans 4500. « retranchons du carré ABCD le carré AF » signifie « retranchons de l'aire du carré ABCD, l'aire du carré AEFG », l'aire du carré AEFG étant désignée par « le carré AF » : il est courant, dans les textes de cette époque, de nommer l'aire d'un carré simplement par la nomination d'une diagonale dudit carré, ce que nous nous permettrons aussi dans la suite du commentaire. « retranchons du carré ABCD le carré AF qui vaut 4489 unités, dont le côté est de 67 unités » on retrouve la confusion entre les unités (de mesure de longueur) et les unités carrées (de mesure d'aire). « Le reste, le gnomon BFFD » : un gnomon est ce qui reste lorsqu'on enlève à une figure, depuis un sommet, une figure semblable. Ici, au carré ABCD, on enlève une figure semblable, c'est-à-dire un autre carré, en l'occurrence AEFG, depuis le sommet A. La figure restante que nous nommerions aujourd'hui par tous ses sommets est l'hexagone BCDGFE. Ce gnomon est formé de deux rectangles, de diagonales respectives BF et FD, et d'un carré de diagonale FC. Il est désigné par le raccourci « BFFD ». L'aire de ce gnomon « vaut donc 11 unités, que nous exprimons en les réduisant en minutes, soit

660’ », nous avons bien compris que $4500 - 67^2 = 4500 - 4489 = 11$, le mot « unité » désignant ici le degré carré. En multipliant 11 par 60, on obtient bien 660, mais l’unité n’est pas tout à fait la minute comme il est annoncé dans le texte, il s’agit d’une unité qui est le degré $\times$ minute, si l’on veut l’homogénéité. Ensuite, cherchons quelle largeur, en minutes, donner à EH, pour que l’aire des deux « rectangles HF et JF » soit contenue dans le « gnomon BFFD ». On double la longueur EF, car il y a deux rectangles (EF + FG = 2 EF, soit 134, en degrés). On obtiendra bien une aire des deux rectangles en degré $\times$ minute, qui sera une approximation de l’aire du gnomon BFFD. Pour chercher la longueur de EG, on néglige l’aire du petit carré FI, et dans un premier temps, le reste, c’est-à-dire $660 - 4 * 134$, soit 124, est transformé en secondes (on l’a bien compris, il s’agit là encore d’une unité spéciale degré $\times$ seconde), soit $124 * 60 = 7440$. Mais ce 7440 ne servira jamais par la suite car on rétablit le fait que du gnomon BFFD, on n’enlève pas seulement deux rectangles, mais on retire deux rectangles et un carré. Le côté du carré FI mesure 4 minutes. L’aire de ce carré est donc 16 minutes carrées, et le carré AI a bien un côté de 67°4’. L’aire correspondante est $(67 + 4/60)^2$ et sera ainsi exprimée en degrés carrés. Ce qui donne $67^2 + 67*4/60 + 4^2/60^2$. Les soixantièmes de degrés carrés sont des degrés x minutes, et sont notés comme des minutes, les trois-mille-six-centièmes de degrés carrés sont des degrés $\times$ secondes, notés comme des secondes. Avec ces notations, on obtient bien l’aire du carré AI égale à 4497°56’16’’. L’aire du gnomon BIID vaut 2°3’44’’, c’est-à-dire 7424’’ car $4500 - (67°4’)^2 = 2°3’44’’$, $2*60^2+3*60+44$. l’unité est appelée dans le texte la seconde, rappelons qu’il s’agit de degrés $\times$ secondes. De même que l’on a cherché une longueur EH telle que le double de l’aire du rectangle HF soit contenu dans le gnomon BFFD, on cherchera maintenant une longueur HK, exprimée en secondes, telle que le double de l’aire du rectangle KI soit contenu dans le gnomon BIID. Les calculs sont similaires aux précédents, précisons juste que la tierce est un sous multiple de la seconde :
1 degré = 60 minutes ; 1 minute = 60 secondes ; 1 seconde = 60 tierces.
Théon proposait d’approximer EH en cherchant combien de fois le double de l’aire du rectangle HF est contenu dans le gnomon BFFD, puis il rajoutait l’aire du carré FI. C’est à peu près la méthode actuelle puisqu’aujourd’hui, nous cherchons directement combien de fois le gnomon HFFJ est contenu dans le gnomon BFFD.
Voilà donc le genre de calculs que pouvait pratiquer Hypatie lorsqu’elle avait à approcher la racine carrée d’un nombre.

6. Références

- A. Rebière, « les femmes dans la science », librairie Nony, Paris 1897
- Chabert Jean-Luc, Barbin Evelyne, Guillemot Michel, Michel-Pajus Anne, Borowczyk Jacques, Djebbard Ahmed, Martzloff Jean-Claude, « Histoires d'algorithmes » Paris, Belin, 1994.
- Hypatia – Arnulf Zitelmann - Editeur : L'Ecole des loisirs (1 janvier 1990) - Collection : Médium
- Thèse philosophie rédigée en latin de B. Ligier – 1879 – De Hypatia Philosopha et Eclectismi Alexandrini Fine. Il s'agit d'un complément d'une thèse de lettres rédigée en latin en 1879. Cote 71210 BU Dijon – Consultable à la BU Lettres de Dijon.
- Mathématiciennes : des inconnues parmi d'autres – Eliane EYCHENNE – IREM de Besançon – novembre 1993.
- "L'Assemblée des femmes", pièce d'Aristophane, texte établi par Victor Coulon, traduit par Hilaire Van Daele, éditeur les Belles Lettres, Paris 1930, pages 24 et 25.

Je remercie très sincèrement Michelle Jeannin, avec qui j'ai préparé l'intervention "Femmes et Math" en janvier 2005.
Merci à Michel Lafond pour sa relecture attentive et pour les explications complémentaires que nous vous livrerons dans un prochain numéro.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Fakredine GHOMMID
Patrick GABRIEL
Michel LAFOND
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 183 – 1er semestre 2008

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem