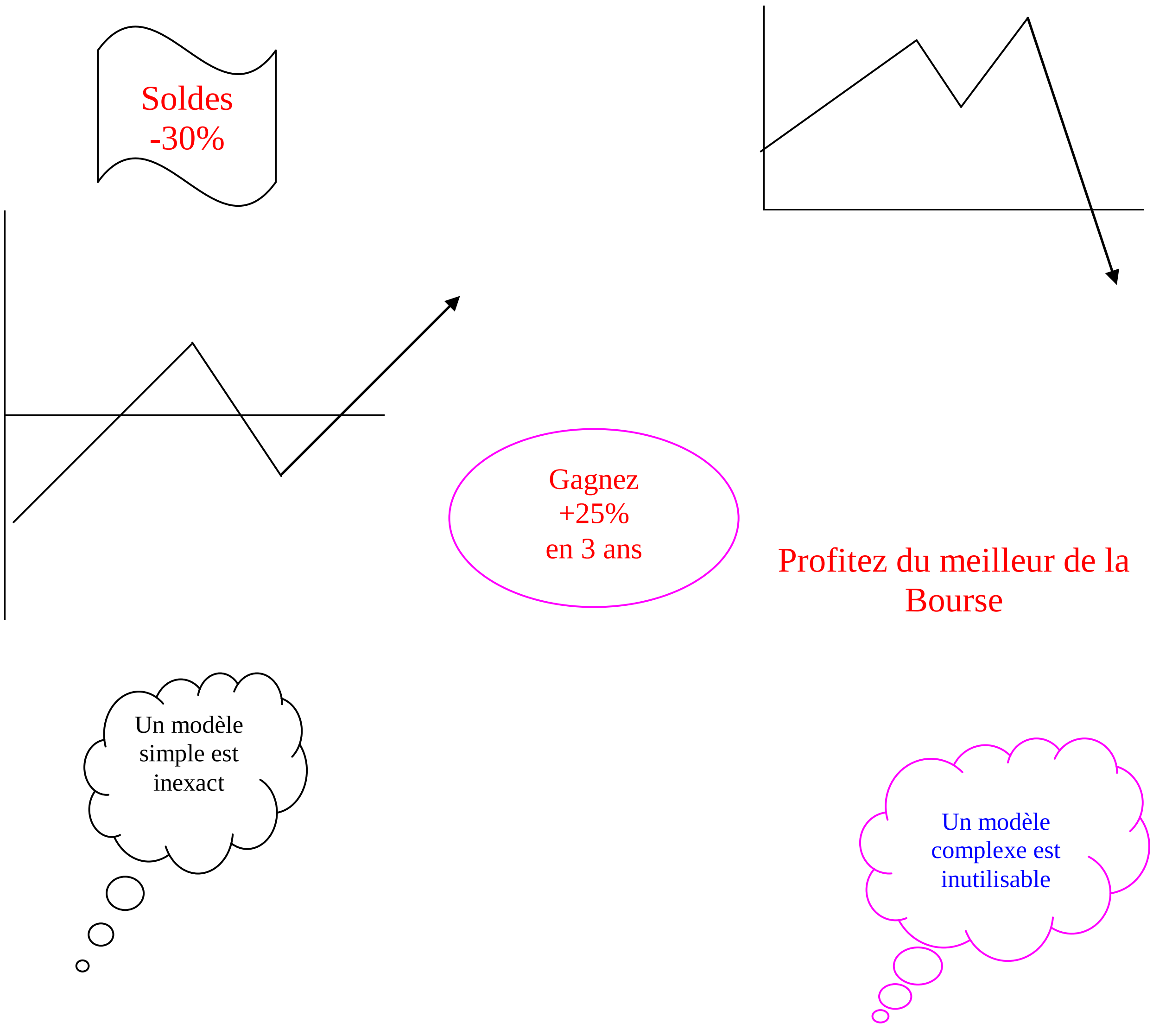
Université de Bourgogne
IREM

MATHEMATIQUES ET ECONOMIE AU LYCEE



Quelques situations

Leurs modèles mathématiques

Les limites de ces modèles

Juin 2010

Groupe Mathématiques-Sciences Economiques et Sociales
IREM de Bourgogne.

Préface

Cette troisième brochure du groupe Maths-SES de l'IREM de Dijon a pour but, comme les deux précédentes, de proposer des activités ou de donner des idées d'activités liant Mathématiques et Economie.
Les thèmes étudiés sont issus de problèmes économiques donnant lieu à modélisation ou directement mathématisés.
Cette brochure s'adresse bien sûr à des classes de SES mais aussi à des classes de S, car les activités mathématiques à support économique ne sont pas réservées aux seules classe de E.S.. Certains sujets sont d'ailleurs plus spécifiques de S (ou peuvent servir de support de TPE en 1ère ES ou S). Enfin, certains sujets peuvent être pertinents en BTS.
L'esprit général de cette nouvelle publication est orienté vers la formation du citoyen ou vers des problèmes non triviaux de la vie courante. Par exemple certains sujets ont pour but de donner des outils afin de contrôler le bien fondé d'informations voire de débattre de la validation d'un modèle. Autre spécificité, certains sujets peuvent conduire à des traitements informatiques. Enfin on verra comment la géométrie peut être utile pour traiter un de ces sujets.

La composition de cette brochure va permettre de préciser ce qui est écrit ci-dessus.

Partie I : Modèles et(ou réalités
On est amené à traiter :

- Du bon usage des mathématiques, où l'on se rend compte de l'usage dangereux qui peut être fait de certains modèles (en particulier en statistiques mais pas seulement) ; c'est là que se pose avec acuité le problème de la validation ou des limites d'un modèle.
- Des modèles pour produire des nombres au hasard ; quelle confiance peut-on accorder à ces modèles ? On rentre ici un peu dans la philosophie du hasard. Cet article n'est pas issu de l'économie, mais c'est une question que 'on s'est posée à propos des simulations d'expériences aléatoires.

Partie II : Des fonctions pour les sciences Economiques et Sociales

- Fonction associées (mathématiques et économie) ;
- Mathématiques SVT ; SES : deux situations pour un même modèle ; on s'est attaché ici à la crédibilité pédagogique de ces situations.

Partie III : Autour de la bourse, un peu de finance

- Initiation à la bourse
- Activités

Partie IV : Mathématiques financières

- Prêts, intérêts, mensualités où l'on peut soit utiliser un programme informatique mais aussi contrôler l'exactitude d'un taux ou d'une mensualité, ou avoir une idée de l'ordre de grandeur.
  Ce sujet permet de voir l'utilité de certaines applications des suites en particulier celles de la forme $u_{n+1} = au_n+b$.

Partie V : L'occasion de faire de la géométrie

- Quelle est la probabilité que la somme des arrondis de plusieurs nombres soit égale à l'arrondi de la somme de ces nombres ? (Suggéré par la conversion franc-euro). On est ainsi amené à déterminer des lois de probabilités à partir de volumes déterminés par des sections planes de cube.

Du "bon" usage de l'information chiffrée

Quelques thèmes de réflexion pour nos élèves de lycée

Jean-Marie THOMASSIN, lycée Carnot, Dijon

Argumenter, élaborer et justifier ses affirmations, démontrer, construire un raisonnement solide, logique, sans faille, valider une conjecture… On pourrait ainsi citer encore bien d'autres objectifs de l'enseignement des mathématiques. Pour beaucoup, un travail mathématique (considéré par certains à priori comme sans faille : on fait confiance à son auteur, spécialiste en la matière) apparaît souvent comme un argument irréfutable (on entend souvent des affirmations du type "de nombreuses études mathématiques ont prouvé mes affirmations"). C'est imparable, honte à celui qui conteste : s'il n'est pas d'accord, c'est qu'il ne comprend rien ou, pire, qu'il ose contester un spécialiste incontestable. Pourtant il existe quelques situations où l'on peut se permettre quelques critiques : il suffit que l'objet mathématique (naturellement beau et incontestable) soit, comme n'importe quelle autre citation, sorti de son contexte ou que l'on oublie involontairement de préciser le champ de l'étude ou le domaine de validité du travail réalisé. On connaît de nombreux exemples où un objet, un outil, détournés de ce pour quoi ils ont été conçus, ont servi à d'autres fins ; une clé à molette, une manivelle, un gigot, peuvent très bien devenir une œuvre d'art ou … l'arme du crime.

1. Comparaisons

Quoi de plus naturel et de plus convainquant que d'utiliser des "chiffres" pour comparer et convaincre. Et pourtant, il faut quelquefois être très attentif. En voici quelques exemples :

1.1. Location d'un véhicule

Un loueur de véhicules affiche, en très gros, le slogan "location à prix unique" suivi du tarif unique : 29,99€ par jour et d'une * renvoyant à un très petit : "voir condition en agence". En fait, sauf dans un cas très précis, il ne s'agit là que du montant de la "prise en charge" et il faut ajouter à cette somme le prix de chaque km parcouru et ce dernier dépend du type de véhicule choisi (en somme, le tarif indiqué est pour 0 km …)

Un autre loueur prétend être le moins cher sur le marché, mais le tarif qu'il indique dans sa publicité correspond, en fait, à une somme fixe augmentée du tarif au km, en somme pour un trajet global de 1 km.

On connaît de nombreux exercices proposant de rechercher le meilleur choix dans ce genre de situation : le choix se fera, en général, en fonction de la distance à parcourir et on sait que le moins cher n'est souvent pas toujours le même… Il faut comparer après avoir défini le trajet à parcourir… Voici un exercice parmi tant d'autres :

Exercice :

Avant de déménager, monsieur Autokar étudie la location d'une camionnette ; il a consulté quatre sociétés spécialisées situées à proximité de son domicile actuel. Les tarifs proposés sont les suivants :

- Société A : 29,99€ par jour plus 0,99€ par km parcouru ;
- Société B : 24,99€ par jour plus 1,29€ par km parcouru ;

- Société C : 49,99€ par jour, kilométrage illimité ;
- Société D : 34,99€ par jour plus 1€ par km au-delà de 200, les 200 premiers kilomètres étant offerts gratuitement.

Q1 : En ne considérant que le tarif journalier, quel est le meilleur choix ?
Q2 : En ne considérant que le tarif au km, quel est le meilleur choix ?
Q3 : En ajoutant les sommes indiquées, quel est le meilleur choix ?
Q4 : Que penser des méthodes de comparaison proposées dans les questions précédentes ?
Q5 : Quel sera le meilleur choix si monsieur Autokar estime le trajet à 160 km aller et retour ?
Q6 : On note x la distance totale à parcourir dans une journée ; exprimer chacun des tarifs en fonction de x ; représenter graphiquement chacune des fonctions obtenues puis définir graphiquement et par le calcul le meilleur choix en fonction de x.

Le futur locataire du véhicule ne devra pas oublier qu'il faut éventuellement aussi tenir compte de frais annexes que certaines des locations peuvent engendrer (assurances, rachat de franchises, frais de dossier, frais de lavage, de nettoyage, achat d'un kit de déménagement, carburant, etc.).

Pour établir une comparaison judicieuse, nos élèves doivent prendre conscience qu'il faut définir des critères de comparaison qui seront les mêmes pour tous et … pertinents.

1.2. Quelle est la meilleure équipe ?

Lors de jeux inter-villes, les équipes de 6 villes se sont affrontées ; chaque épreuve a donné lieu à la remise d'une médaille d'or, d'une médaille d'argent et d'une médaille de bronze ; on souhaite classer ces équipes. Les résultats sont les suivants :

Ville	Or	Argent	Bronze
A	3	2	1
B	5	0	0
C	2	3	2
D	0	5	1
E	1	2	1
F	1	0	6

Pour chacun des critères suivants, donner le classement correspondant et indiquer, selon vous, quel est le "meilleur" classement et pourquoi.

- Le nombre de médailles d'or.
- Le nombre de médailles d'argent.
- Le nombre de médailles de bronze.
- Le nombre total de médailles.
- L'ordre "lexicographique" (Or/argent/bronze).
- Le nombre de points (3 par médaille d'or, 2 par médaille d'argent, 1 par médaille de bronze).
- L'ordre alphabétique.
- Le nombre de points (3 par médaille d'or, 2 par médaille d'argent, 1 par médaille de bronze avec un bonus de 6 points pour la ville ayant obtenu le plus de médailles dans la même catégorie).
- Le nombre de points (3 par médaille d'or, 2 par médaille d'argent, 1 par médaille de bronze et on retranche 3 points par catégorie sans médaille).

Chacun pourra évidemment imaginer d'autres critères.

1.3. Quelle est la meilleure classe ?

Quoi de plus naturel que le souhait de comparer les résultats de plusieurs classes, de plusieurs écoles, de plusieurs lycées, de plusieurs auto-écoles ?
Voici quelques arguments publicitaires pour guider le choix d'une auto-école :

Auto école A+	Juin 2008 : 24 lauréats à l'examen du permis de conduire
Auto école APrime	Juin 2008 : 29 lauréats à l'examen du permis de conduire
Auto école Alpha	Juin 2008 : 41 lauréats se sont adressés à nous
Auto école Aleph0	135 lauréats depuis janvier 2008
Auto école Aleph1	45 ans d'expérience
Auto école Bêta	Votre permis pour 10€ par jour
Auto-école Ière	95% de réussite

Il s'agit là de quelques exemples où les comparaisons sont difficiles par manque d'information. Pour les auto-écoles A+ et Aprime, on ne dispose que de données brutes, or la situation n'est pas la même si on obtient 24 réussites en présentant 24 candidats ou 35… On amène alors naturellement les élèves à utiliser les pourcentages pour faire des comparaisons ; mais on sait que, pour avoir un taux de réussite élevé, il suffit souvent de ne pas présenter certains candidats "douteux". Quant à l'argument "41 lauréats se sont adressés à nous", il a été réellement utilisé par une société privée qui, à un concours, décomptait au nombre de ses succès tous les candidats qui s'étaient adressés à elle (au sens littéral) c'est-à-dire avaient pris au moins un renseignement (ex les tarifs) chez eux. En général, l'argument : "Votre permis pour 10€ par jour" omet une précision fondamentale : la durée de paiement. Quant à la durée (moyenne ?) nécessaire à l'obtention du permis, elle est en générale omise.

On peut facilement imaginer des comparaisons, naturellement plus polémiques, sur le taux de réussite de classes, d'établissements scolaires à un examen (quel critère utiliser : un pourcentage brut ou une formule tenant compte du parcours scolaire des candidats, de l'environnement social, de l'échange éventuel d'élèves entre établissements, de sorties "anticipées" ou "prématurées" ?)

1.4. Le prix du pain

Monsieur Dupin est en week-end dans une petite station balnéaire où sont établies quatre boulangeries ; il a relevé le prix d'une baguette de pain. Voici les résultats de son enquête :

Boulangerie	Avoine	Blé	Cébon	Disette	Prix moyen
Samedi	1,2	0,85	0,9	1,05	
Dimanche	Fermé	0,9	0,95	1,09	

1. Calculer le prix moyen d'une baguette de pain dans cette station le samedi.
2. Calculer le prix moyen d'une baguette de pain dans cette station le dimanche.
3. Quelle est l'évolution du prix moyen d'une baguette et l'évolution du prix dans chacune des boulangeries ?

1.5. Evolution de moyennes

L'exemple précédent illustre l'influence des extrêmes sur le calcul d'une moyenne qui, si la population de référence sur laquelle on fait le calcul évolue, peut donc varier dans un sens différent de celui des éléments qui la composent. Citons quelques exemples connus :
Dans une classe, la moyenne peut progresser sans qu'aucune note n'augmente, si certains élèves "bien choisis" sont absents et réciproquement.
Dans une classe de 30 élèves, les notes à un devoir se sont réparties comme suit :

Note	2	8	9	10	11	12	14	16	18	Moyenne
Effectif	1	3	5	6	5	3	4	2	1	

Quelle est la moyenne ? Au devoir suivant, les élèves ayant obtenu 2 ou 8 ont été absents ; tous les autres ont obtenu 0,5 point de moins ; comment évolue la moyenne ?
Dans une entreprise ou un secteur professionnel, le salaire moyen peut augmenter sans qu'aucun travailleur ne voit son revenu s'améliorer, il suffit que des employés dont les salaires sont les plus bas quittent l'entreprise (départ en retraite, chômage, délocalisation ou "externalisation" de leur activité….).

Exemple :
"Le fil d'or" est une entreprise textile disposant de 4 sites :

Site	Au gai travailleur	Au joyeux luron	Chic et Choc	Le Fil
Spécialité	Tabliers, blouses, vêtements de travail	Vêtements de détente et de sport	Articles de ville et de luxe	Conception et commercialisation d'articles textiles
Effectif	150	120	90	25
Salaire mensuel moyen	950€	1350€	1850€	2320€

1. Déterminer le salaire mensuel moyen dans la société "Le fil d'or".
2. La société "le fil d'or" décide de se séparer du site "Au gai travailleur" par vente à la concurrence ; que devient le salaire moyen dans la société ainsi transformée ? Même question si, en plus, les travailleurs restant acceptent une diminution "volontaire" de salaire de 50€ euros chacun dans l'intérêt de la société.

De manière analogue, chacun a déjà pu constater que le montant de ses achats n'évolue pas de la même manière que l'indice officiel des prix qui est une moyenne coefficientée calculée sur les prix de produits qui ne sont pas toujours ceux que l'ont est amené à acheter et qui peut intégrer l'effet de soldes dont on n'a pas toujours bénéficié…

1.6. Effet de structure

Dans un lycée ne présentant des élèves au baccalauréat que dans la filière L et dans la filière S_i, on a relevé les résultats suivants :

Série		Réussite	Echec	Total
L	Garçons	4	2	
	Filles	16	8	
S_i	Garçons	80	20	
	Filles	8	2	

1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer le taux de réussite des garçons et celui des filles en série L ; les comparer et donner le taux de réussite en série L dans l'établissement.
3. Déterminer le taux de réussite des garçons et celui des filles en série S_i ; les comparer et donner le taux de réussite en série S_i.
4. Déterminer le taux de réussite des garçons et celui des filles dans l'établissement ; les comparer, expliquer l'écart constaté et donner le taux de réussite global dans l'établissement.

Ainsi, une constatation faite sur chaque sous-groupe (ici égalité des "chances" de réussite entre garçons et filles dans chaque série) peut ne pas être vraie sur le groupe complet (le lycée). C'est l'effet de structure lié à la constitution de chaque sous-groupe. En outre, peut-on sans problème, faire des statistiques sur le regroupement des résultats à un examen des candidats de deux séries très différentes ? C'est une autre question à se poser….

1.7. Fromage ou dessert

A la cantine d'un lycée, il y a deux chaînes où les élèves se servent ; chaque rationnaire est affecté à une seule des deux chaînes. Pour résoudre le problème du choix entre le fromage et le dessert, on a décidé que, dans la chaîne 1, on ne propose que du fromage (trois variétés différentes) et dans la chaîne 2, on ne propose que des desserts (2 variétés différentes) ; les autres plats sont identiques dans les deux chaînes de distribution. A l'issue du repas, on demande à chaque rationnaire s'il est satisfait de son sort. On a regroupé les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

		Taux de satisfaction	Nombre de satisfaits	Effectif total
Chaîne 1 (fromage)	Seconde	40%	18	
	Première	30%	12	
	Terminale	60%	84	
	Total			
Chaîne 2 (dessert)	Seconde	60%	48	
	Première	40%	64	
	Terminale	70%	14	
	Total			

1. Pour chaque chaîne, calculer l'effectif total par niveau.
2. Déterminer le taux de satisfaction parmi les élèves à qui on a proposé du fromage.
3. Déterminer le taux de satisfaction parmi les élèves à qui on a proposé un dessert.
4. Des deux taux précédents, quel est le plus élevé ? Peut-on en déduire que les élèves préfèrent le fromage ? Expliquer le paradoxe apparent : en seconde, en première, en terminale, niveau par niveau, le taux de satisfaction est plus élevé quand on propose un dessert et, pourtant, globalement, il y a inversion de l'ordre.

1.8. Mortalité

Sur le site internet www.statistiques-mondiales.com, on peut trouver, pour chaque pays, les valeurs de divers indicateurs pour l'année 2008. Voici quelques extraits du tableau concernant le taux mortalité en 2008 (en "pour 1000").

Afghanistan	19,56	Afrique du sud	22,70	Algérie	4,62
Arabie Saoudite	2,52	Belgique	10,38	Canada	7,61
Chili	5,77	Chine	7,03	Colombie	5,54
Costa Rica	4,34	E A U	2,13	Equateur	4,21
USA	8,27	Finlande	10	France	8.48
Libye	3,46	Suède	10,24	Tunisie	5,17

Peut-on en déduire que les médecins sont plus efficaces en Arabie Saoudite ou en Libye qu'en France, en Belgique ou en Suède ? Il y a là aussi un problème de structures différentes des populations et divers thèmes de réflexion. On trouvera aussi sur ce site, des tableaux concernant l'espérance de vie par pays, l'âge médian ou le PIB et un indicateur peu connu dit "Indice de Développement Humain" qui fait une moyenne arithmétique (?!) entre trois grandeurs totalement différentes : le taux de scolarisation et d'alphabétisation, l'espérance de vie et une quantité calculée à partir du logarithme décimal du PIB….

1.9. Quelques pratiques bancaires

a. Cartes de crédit

Comment comparer des crédits offerts par des organismes différents sur des périodes différentes, à des taux évidemment différents ? Les entreprises spécialisées ont appris depuis longtemps à détourner l'attention de la clientèle et savent mettre en exergue un argument frappant du type "payer dans 3 mois", "acheter à crédit pour seulement quelques euros de plus", "acheter à crédit et on vous offre un stylo, une assurance vol ou bris", etc. Un vendeur de voitures en est même arrivé à l'affirmation "repartez avec votre voiture neuve et un chèque de 3000€". Il est bon de faire réfléchir nos élèves sur ces pratiques et de rappeler qu'un outil de comparaison existe : le TEG ; on pourra alors souvent se rendre compte que certaines propositions apparemment alléchantes induisent un TEG de l'ordre de 19% l'an ou plus, c'est-à-dire à la limite du taux de l'usure. Avec un tel taux, une remise de 10% sur le montant du premier achat fait avec la carte de crédit ne ruine pas l'organisme prêteur.

b. Un placement

Au plus fort d'une période d'envolée boursière, une banque a proposé à ses clients un placement sur trois ans de type SICAV indexé sur le CAC 40 avec un taux d'intérêts minimum annuel garanti de l'ordre de 4% avec la mention "que le CAC 40 fasse 0% ou plus" ; on faisait comprendre aux clients que, même si la bourse ne progressait pas, hypothèse très pessimiste, ils verraient leur capital augmenter au moins du taux minimum (sans indiquer qu'il y avait aussi un taux maximum…) ; la bourse s'est effondrée et les clients n'ont pas retrouvé leur capital initial, ce qui n'est pas contraire à l'argument publicitaire utilisé. Il y a eu seulement omission d'un risque.

Certaines banques n'hésitent plus désormais à indiquer pour taux d'intérêts, non plus un taux annuel, mais celui correspondant à la durée totale du placement ; des activités de comparaison sur ce thème seront utiles à nos élèves. Exemple d'argument : gagner 25% en 5 ans (question à se poser : quel est le taux annuel moyen équivalent, selon le principe des intérêts composés ?).

"Profiter du meilleur de la bourse", tel était l'argument d'un placement sur 3 ans indexé sur un panier contenant 12 actions différentes du CAC 40 ; le principe consistait chaque trimestre à prendre pour évolution de référence pour le calcul des intérêts, l'évolution la meilleure des actions du panier. Chaque trimestre, le client bénéficiait donc, théoriquement, du meilleur des taux d'évolution constaté. Puis venait le trimestre suivant… Ce qu'on évitait de dire au client mais qui figurait dans les petites lignes était que l'action observée comme la meilleure pour le trimestre et dont l'évolution a servi de référence, était retirée du panier même si, le trimestre suivant, c'est encore elle qui est la plus performante…. Toutes les actions du panier servent donc une et une seule fois pour le calcul de l'évolution…

1.10. Comment choisir ?

Préférez-vous deux fois plus de café ou un café deux fois moins cher ?
Préférez-vous 40% de remise sur l'ensemble du stock ou un rabais sur 50% du stock ?

1.11. Soldes : 2^{e} démarque

1. Après une première baisse de 30%, on propose une deuxième baisse de 20% sur le prix soldé ; obtient-on ainsi une baisse de 50% ? Quelle est la baisse globale ?
2. Après une première baisse de x% (x dans [0 ; 50]), déterminer le taux t(x) à appliquer pour obtenir une baisse totale de 50% ; étudier la fonction t(x).

1.12. Promotion : 50% de remise sur le deuxième article

Par définition, le 2e article est le moins cher des deux.
1. Quel est le pourcentage global de remise si les deux articles sont de même valeur ?
2. Quel est le pourcentage global de remise sur les deux articles si l'un vaut 60€ et l'autre 40€ ?
3. Le premier article vaut 60€ et le deuxième x€, avec $0<x<60$; déterminer le pourcentage f(x) de remise sur l'ensemble des deux articles ; étudier cette fonction.

<u>Variante</u> : carte de réduction transport où le client a droit à une remise de 50% sur le prix de chaque trajet pendant 6 mois moyennant l'achat de la carte de réduction au tarif de 150€. On note x le prix initial de l'ensemble de tous les trajets envisagés sur la période et f(x) le taux de réduction réel en tenant compte de l'achat de la carte ; déterminer, étudier et représenter graphiquement f.

1.13. Photocopieuse :

Pour utiliser une photocopieuse, il faut payer un abonnement mensuel ; chaque photocopie est ensuite facturée, le client réglant chaque facture en fin de mois. Deux sociétés proposent leurs services :

- Société A : 1,5€ par mois, les 4 premiers mois d'abonnement sont gratuits (mais pas les photocopies).
- Société B : 2€ par mois, les 6 premiers mois d'abonnement sont gratuits (mais pas les photocopies).

Déterminer, en fonction de la durée totale prévisible de l'abonnement, le meilleur choix, les photocopies étant facturées au même prix dans chacune des deux sociétés.

Toute ressemblance avec certaines pratiques n'étant pas forcément à exclure…

Il faut donc attirer l'attention des élèves sur la recherche des bases et références utilisées pour les calculs et les comparaisons. Les TPE s'y prêtent bien.

2. Evolution

2.1. Evolution du prix du ticket de bus

(*pour quelques centimes de plus)*

Dans une ville moyenne, on a pu relever les prix successifs du ticket individuel de bus en quelques années (2 hausses par an, pas toujours annoncées à l'avance) :

Prix	0,80€	0,85€	0,90€	0,95€	1€
Pourcentage de hausse par rapport à la valeur précédente					
Pourcentage de hausse par rapport à la valeur initiale					

1. Calculer le pourcentage de chaque hausse par rapport à la valeur précédente.
2. Calculer le pourcentage de chaque hausse par rapport à la valeur initiale de 0,80€.
3. Justifier ou commenter les affirmations suivantes :
   - Toujours plus.
   - Une hausse de quelques centimes seulement (pour un meilleur service).
   - Une hausse constante.

- La hausse est en baisse.
- Le pétrole augment plus vite.
- Une hausse limitée grâce à l'usage dus gaz naturel.

4. Chez mon boulanger, la baguette est aussi passée, de la même manière, de 0,80€ à 0,85€ puis 0,90€ et enfin 0,95€ (argument utilisé : le prix du blé augmente). Puis-je en déduire que :

- Prix du ticket de bus et prix de la baguette sont liés par une très forte corrélation ?
- Je vais bientôt payer ma baguette 1€ ?
- Le prix du blé et le prix du pétrole sont liés ?

2.2. Evolution d'un revenu

Dans un quotidien aujourd'hui disparu, on a pu lire le titre suivant :

"Revenu agricole : –7,3% en 1991". (Source : INSEE)

L'article précise que le calcul a été fait par rapport à l'année précédente. Mais il ne faut pas séparer cette information des suivantes :

- Les deux années précédentes ont été très favorables (+6,7% en 1989 et +9,3% en 1990).
- L'évolution est calculée en <u>francs constants</u>, c'est-à-dire inflation déduite.
- Il s'agit d'un revenu moyen représentant des situations très différentes et pas toutes aussi favorables.
- L'évolution de la population agricole (il suffit quelque fois d'un classement différent de certaines catégories parmi les moins favorisées pour faire évoluer favorablement un indice…).

On peut facilement trouver de très nombreux exemples bâtis sur le même modèle. On peut citer, entre autre, l'exemple classique qui réapparaît périodiquement et concerne l'évolution de la délinquance, du taux d'occupation des prisons, du taux d'affaires non élucidées par la police (pour faire baisser ce taux, il suffit d'inciter les victimes de certains "faits divers" à ne pas déposer plainte mais à faire une simple déclaration enregistrée sur une "main courante" suffisante pour les assurances…).

Les activités proposées et les TPE sont l'occasion d'attirer l'attention de nos élèves sur le bon usage des "chiffres" et de manière plus générale de l'information récoltée. On veillera donc à ce que les élèves mettent en pratique quelques principes simples :

- Vérifier chaque information récoltée ;
- Ne pas se fier à une seule source d'information, même réputée fiable, les diversifier ;
- Eviter des arguments du type : "c'est écrit dans le journal ou sur Internet", "on l'a entendu à la télé… donc c'est vrai" ;
- Recouper les informations ;
- Récolter plusieurs points de vue différents ;
- Confronter les opinions ;
- Connaître la manière d'élaboration des informations chiffrées recueillies et leur champ de validité ;
- Bien identifier les différents types d'évolution.

3. Du bon usage d'une étude statistique

Un classique

Le 1/10/2003, dans un quotidien à diffusion nationale, on peut lire l'information suivante : "l'expérience de dédoublements de cours préparatoires, mise en place depuis un an dans une cinquantaine d'écoles, ne donnerait que des résultats minimes, selon les évaluations communiquées hier. En mars, les élèves de CP à effectifs réduits avaient réussi des épreuves à 65,2% en moyenne, contre 64,1% pour les élèves de CP "normaux". Le ministre de l'Education doit prochainement annoncer des mesures pour poursuivre sa lutte contre l'illettrisme".

A la lecture du texte, on est naturellement amené à se demander si une telle mesure, naturellement coûteuse est à maintenir, compte tenu de la faible augmentation du taux de réussite (+1,1%). Le texte, cité dans son intégralité, ne précise ni le contexte de la mesure ni celui de l'étude statistique dont, à priori, on ne mettra pas en doute les résultats chiffrés. Il me semblerait nécessaire de connaître quelques informations supplémentaires :

- L'expérience est-elle terminée ou est-ce un contrôle "d'étape" ?
- Que contenait l'évaluation, quels étaient ses objectifs (contrôle de connaissances, d'aptitudes normalement acquises ou mesure du "degré d'acquisition") ?
- Le taux de réussite de 64,1% obtenu par les élèves de CP "normaux" paraît bien faible au novice que je suis. Est-ce normal ? Peut-on espérer, par exemple en fin d'année, un taux de réussite supérieur au même test ?
- Y a-t-il un lien entre ce taux et le pourcentage d'élèves d'une tranche d'âge ayant le baccalauréat (les deux nombres me semblent voisins) ?
- Le test a-t-il été réalisé sur l'ensemble des élèves bénéficiant du dispositif ou sur un échantillon (choisi comment) ?
- Comment ont été choisies les écoles ou classes bénéficiant du dispositif, par tirage au sort ou en fonction de résultats de tests préalables ? Quels étaient les résultats de chacun des deux groupes avant la mise en place du dispositif ?
- Quel était plus précisément ce dispositif ? En effet, dans certaines classes, le dispositif a consisté à dédoubler 3 heures d'enseignement hebdomadaires alors que dans d'autres la période de dédoublement était plus importante. A-t-on, dans l'étude statistique, séparé ces deux groupes ?
- Quel aurait été le résultat du groupe bénéficiant du dispositif s'il n'en avait pas bénéficié ? On peut raisonnablement penser que le taux de réussite aurait été inférieur à celui du groupe dont on pense qu'il n'a pas besoin du dispositif. Quel aurait été le résultat de l'autre groupe s'il avait bénéficié du dispositif ?

On trouve ici un exemple classique d'une utilisation abusive de la comparaison des résultats obtenus pour une même étude statistique menée sur deux groupes aux caractères différents. On pourrait de la même manière étudier d'autres dispositifs d'aide individualisée….

Il y a quelques années, on utilisait, de la même manière, les statistiques pour réduire le nombre de redoublements :

On considère deux cohortes d'élèves d'une même classe d'âge dont on mesure le taux de réussite au baccalauréat. Le premier groupe est constitué d'élèves n'ayant jamais redoublé au cours de leur scolarité, le deuxième ne contient que des élèves ayant redoublé au moins une fois. On constate ensuite que, dans le premier groupe, le taux de réussite au Bac est plus élevé que dans le second. On en déduit donc tout naturellement qu'il vaut mieux être dans le premier groupe que dans le deuxième et donc que le redoublement n'est pas favorable à la réussite au Bac. Il faut donc supprimer les redoublements.

On ne peut pas comparer les deux groupes ainsi constitués car ils ne contiennent pas, en termes de réussite au Bac, la même population, sauf à considérer que les décisions de redoublement sont prises par tirage au sort, ce qui ne semble pas être le cas. Dans quelle catégorie doit-on placer les élèves ayant échoué au Bac et suivant une deuxième année de terminale, sans avoir redoublé au préalable ?

Si comparer les résultats d'une étude sur deux groupes peut naturellement apporter certains enseignements, il faut tenir compte de la manière dont ont été constitués les deux groupes pour donner des conclusions valables. Ainsi, un chef d'établissement d'un lycée disposant de 4 classes de 1ère S avait-il constitué 3 classes avec 35 élèves pour chacune des trois et une dernière classe avec 24 élèves seulement (mais "bien choisis"…). A la fin de l'année scolaire, il constata que, sur l'ensemble des 105 élèves des trois classes "chargées", le taux de passage en terminale était supérieur à celui de la classe ayant 24 élèves (à cette époque, le passage en terminale était encore du ressort du conseil de classe). Il en déduit donc tout naturellement qu'il valait mieux constituer des classes à 35 élèves que des classes à 24, oubliant la manière dont il avait choisi les élèves de la classe à 24. De la même manière, le fait, pour un élève, d'entrer dans un lycée ayant un taux de réussite "bon" au Bac ne suffit pas pour réussir, il doit en plus fournir un certain travail et faire preuve par lui-même de certaines capacités. On ne désigne pas les lauréats par tirage au sort…. Le sort de chacun **ne résulte pas** **de la simple** **appartenance passive** à un groupe où chacun, indépendamment de son action, aurait la même probabilité de réussite. Il faut se présenter à l'examen, fournir un certain travail…..

Au Bac, on peut aussi se demander s'il est licite de comparer les taux de réussite dans des séries différentes, les contextes (populations, épreuves, débouchés, …) étant naturellement différents. Que peut-on raisonnablement déduire de ces comparaisons ou de moyennes diverses calculées sur un ensemble comportant des candidats de séries différentes ? Il faudra prendre garde à certaines conclusions un peu trop hâtives qui pourraient être faites. Ainsi, il est arrivé qu'un observateur, constatant que le taux de réussite était supérieur en série STT qu'en série S, en déduise que les élèves de STT étaient meilleurs que ceux de S puisqu'ils réussissaient mieux au BAC et que, pour augmenter le nombre d'élèves en S, il suffisait d'aller les chercher en série STT…

Remarque :

Il a été mentionné plus haut, un taux passant de 64,1% à 65,2% ; la valeur indiquée pour la hausse a été de +1,1%. On a classiquement, ici deux présentations possibles de cette variation :

- La variation absolue : 65,2-64,1 = 1,1 ; le symbole % indiqué est donc impropre ; on utilise alors souvent le terme de "points".
- La variation relative : on compare l'évolution à la valeur initiale 64,1 : ici on a alors une hausse de 1,72% du taux de réussite, ce qui est numériquement supérieur à 1,1.

Le choix de l'une ou l'autre des deux versions n'est en général pas innocent.

Quand le taux de chômage passe de 9% à 10% de la population active, comment présenter cette évolution :

- Hausse de 1 point du taux de chômage ;
- 1% de plus des actifs sont sans travail ;
- Le taux de chômage augmente de 11,2% ?

A vous de choisir.

Les TPE sont une activité propice pour attirer l'attention sur l'usage qui peut être fait de certaines affirmations chiffrées.

4. Le choix d'un modèle

4.1. Courbes de régression

L'exemple le plus simple de l'utilisation des mathématiques pour appuyer un raisonnement ou une affirmation est celui de l'utilisation de résultats issus des statistiques. Dans ce cas, il ne s'agira en général pas seulement de décrire un phénomène mais aussi de décrire son évolution en fonction des variations de tel ou tel paramètre, le plus connu est naturellement le temps mais on étudie aussi souvent l'évolution d'une quantité "variable" en fonction d'une autre à laquelle elle est liée. Une démarche classique, la trame de nombreux exercices proposés à nos élèves peut se décrire, de manière très simplifiée, comme suit :

1. On réalise une étude statistique à deux variables agrémentée de la construction du nuage des points ;
2. On recherche une courbe ou une droite de régression traduisant "l'allure du nuage et l'évolution constatée" ; la courbe ainsi tracée est en général la représentation graphique d'une fonction.
3. On utilise la fonction ainsi construite pour décrire certaines évolutions prévisibles et faire des prédictions (les plus sérieux indiqueront, avec les conclusions, une mention du type "si la tendance constatée se maintient") ;
4. On oublie assez vite l'étude statistique et le nuage d'origine pour ne conserver que la fonction obtenue qui prend alors en quelque sorte un statut de "loi" établie ("par une étude mathématique") ; les choix faits lors de l'étude statistique ont été oubliés.
5. On applique à la fonction ainsi construite divers résultats mathématiques qui induisent des conclusions sur le phénomène étudié.
6. On oublie le procédé de construction de la fonction et les choix faits pour ne retenir que les conclusions obtenues, devenues certitudes, sans préciser les limites du modèle.
7. On dégage des prévisions pour l'avenir qui deviennent trop vite des certitudes…..
8. On élabore en loi des propriétés de la fonction étudiée, le cas le plus classique étant celui du sens de variation : on élabore une relation $y = f(x)$ entre deux "variables" économiques ; on constate par exemple que f est croissante et on en déduit aussitôt que si x augmente alors y augmente aussi (et réciproquement…) ; les plus honnêtes parleront en termes de "tendances", mais tous auront oublié que, f étant le résultat d'une étude statistique et non de la réalité, il n'y a pas une réelle relation fonctionnelle entre x et y ; dans un nuage statistique (sauf pour les séries chronologiques) plusieurs points peuvent avoir la même abscisse ce qui est beaucoup plus rare pour la représentation graphique d'une fonction.

Il est donc nécessaire de bien faire comprendre (et faire savoir à tous) qu'une courbe de régression n'est que la simplification d'un phénomène trop complexe et non le phénomène lui-même : on a un outil pour décrire et prévoir, "toute chose égale par ailleurs", des évolutions ou des variations mais les résultats obtenus peuvent se révéler par la suite inexacts, surtout lorsqu'on étudie les évolutions en dehors du champ des valeurs initiales des variables considérées. En voici deux exemples concernant la régression affine, la plus connue et la plus facile à pratiquer :

A partir de la fonction x^2, il est facile de construire une série statistique à deux variables (x,y) où le coefficient de régression linéaire dépasse 0,999, les points ayant donc une très forte tendance à s'aligner ; pourtant le phénomène ainsi approché n'est pas linéaire ou affine. Si, dans un certain intervalle, l'approximation par une droite peut se justifier, on voit facilement les erreurs qui peuvent être faites si on s'écarte trop de l'intervalle initial d'étude. On peut généraliser cet exemple en considérant une courbe et ses tangentes.

Il est des données pour lesquelles une approximation affine peut amener à des conclusions manifestement peu valables : les pourcentages de la catégorie "part d'un tout", par exemple le taux de réussite au baccalauréat, le taux d'équipement des ménages en machine à laver le linge, en machine à sécher le linge, en ordinateur etc. Une étude statistique avec régression affine peut amener rapidement à une prédiction d'un taux dépassant 100%. Dans ce cas, on prendra soins de se demander si effectivement tous les ménages seront équipés, voir suréquipés à la date prévue ou s'il faut changer de modèle.

Des processus de contrôle ou de validation des résultats obtenus existent ; même s'ils ne sont pas enseignés dans nos classes, on peut attirer l'attention sur leur existence, leur nécessité et en présenter quelques exemples simples. N'oublions pas que former un citoyen c'est aussi l'aider à être non un consommateur mais un utilisateur "raisonnable" des outils à sa disposition ; il doit donc apprendre à comprendre certaines pratiques.

4.2. Le choix du modèle

Dans les études statistiques, lors de la construction d'une courbe de régression, on va souvent choisir une régression affine : c'est la plus simple, la plus connue, la plus facile à construire graphiquement (une ligne droite, c'est facile à construire… et à … comprendre) et … la seule au programme. Par le biais de la fonction logarithme népérien, on peut en proposer d'autres en exercice à nos élèves : régressions logarithmique, exponentielle ou de type x^r. On peut aussi explorer les possibilités nouvelles offertes par certaines machines à calcul sophistiquées et par les logiciels spécialisés. Il sera alors très profitable de faire construire les différentes courbes de régression obtenues dans un même repère et de faire constater que, dans certains cas, les prévisions faites pour l'avenir peuvent varier de manière spectaculaire, ce que l'on faisait aussi jadis en comparant les prévisions obtenues par la méthode de régression des moindres carrés de y en x à celles obtenues par la même méthode mais en faisant une régression de x en y.

Plus généralement, lorsque l'on dispose de deux "variables" économiques quantitatives x et y entre lesquelles on a constaté ou soupçonné un certain lien liant leurs évolutions respectives, on va modéliser cette relation par une fonction mathématique. Comment choisir ? On peut naturellement utiliser des outils statistiques, mais, parmi les modèles proposés, il faudra choisir et le choix fait peut amener à des conclusions qui ne sont pas liées au phénomène étudié mais au modèle choisi et (/ou) à certains non dits ou a priori… La sélection n'est pas toujours innocente… En voici un exemple.

Dans certains modèles économiques, on estime que le taux x du chômage et le taux de l'inflation y varient en sens inverses. On va donc chercher à modéliser cette situation par une relation du type $y = f(x)$ où f est une fonction décroissante. Mais comment construire f ? On dispose de nombreuses données statistiques exploitables ; on choisira un pays et une période où cette relation est apparente (ce n'est pas toujours le cas, il y a des périodes "contre exemple"). Le choix fait, il reste à trouver une fonction. Pour des raisons déjà évoquées, on élimine rapidement les fonctions affines. Les fonctions polynômes sont peu accessibles (en lycée, la résolution de systèmes est très limitée), difficiles à construire avec des outils statistiques élémentaires, sans parler des "grandes valeurs de x". On pense alors à la fonction inverse ; elle permet facilement de construire une fonction décroissante (pour les valeurs positives de x). On va donc construire une relation du type : $xy = k$ où k sera une constante positive facile à déterminer. Plus généralement, ce choix implique certaines conséquences :

- A chaque x correspond une seule valeur de y, ce qui, dans la réalité est loin d'être le cas ;
- A chaque y correspond une seule valeur de x, ce qui, dans la réalité est loin d'être le cas ;
- En raison de la formule choisie, les nombres x et y sont des réels strictement positifs ; ce qui élimine d'office le plein emploi ($x = 0$), situation que beaucoup considèrent effectivement comme irréaliste, mais aussi l'inflation nulle (pas de hausse des prix!) et la déflation (si, il arrive parfois que les prix baissent : quand il faut vendre et que personne n'achète…) ;
- L'existence d'une relation du type $y = f(x)$ implique que l'on ne peut agir que sur une et une seule des deux variables, le sens de variation de f impliquant la variation de l'autre variable : si f est décroissante, on ne peut donc pas à la fois faire baisser le chômage et l'inflation, inutile que les hommes politiques se fatiguent, c'est ainsi mathématiquement démontré…..

- L'hypothèse de continuité est généralement admise : une légère variation de x entraîne une petite variation de y et réciproquement, une légère variation de y entraîne une variation raisonnable de x.
- L'hypothèse de dérivabilité est-elle aussi couramment admise.

On peut faire des remarques analogues avec des fonctions du type $y = kx^c$ (k>0 et c réel bien choisi) ou du type $y = pa^x$ (p>0 et a réel positif bien choisi).

Si l'on estime qu'il existe un taux de chômage où l'inflation est nulle, il faudra modifier le modèle. Autres questions à se poser :

- Peut-on avoir un taux de chômage de 100% ?
- Y-a-t-il une limite supérieure pour le taux de chômage ?
- Que se passe-t-il si le taux de chômage tend vers cette limite ?
- Que se passe-t-il si le taux de chômage tend vers 0 ?
- Dans quelles limites varie l'inflation ?

4.3. Canevas pour un problème

Choisir une série statistique double $(x_i ; y_i)$.

1. Faire construire le nuage des points et observer son allure.
2. Déterminer une droite de régression de y en x (en général par la méthode des moindres carrés, mais on peut utiliser une autre méthode) ; puis faire une estimation de y pour une valeur de x ne figurant pas dans la série (pour les séries chronologiques ce sera en général une prévision).
3. Compléter le tableau $(x_i ; y_i ; z_i = \ln(x_i) ; v_i = \ln(y_i))$.
4. La droite de régression de y en z donne une courbe du type $y = a\ln(x)+b$; on peut alors utiliser cette nouvelle expression pour donner une estimation de y pour la même valeur de x qu'à la question 2 et comparer.
5. La droite de régression de v en x donne une courbe du type $\ln(y) = ax+b$ d'où on tire une expression du type $y = kp^x$; on peut alors utiliser cette nouvelle expression pour donner une estimation de y pour la même valeur de x qu'à la question 2 et comparer.
6. La droite de régression de v en z donne une courbe du type $\ln(y) = a\ln(x)+b$ d'où on tire une expression du type $y = kx^a$; on peut alors utiliser cette nouvelle expression pour donner une estimation de y pour la même valeur de x qu'à la question 2 et comparer.
7. Construire toutes les courbes obtenues sur le même graphique et comparer entre elles les différentes estimations obtenues.

On peut aussi explorer les différentes possibilités offertes par les nouvelles machines à calculer et utiliser (avec précautions) le coefficient de corrélation linéaire.

Un modèle n'est donc souvent qu'une simplification de la réalité ; il n'est pas la réalité mais, basé sur des constatations et observations, il permet d'observer et prévoir ; c'est un outil qui doit le rester avec la conscience de la manière dont il a été construit, de ses apports et de ses limites, comme les modélisations successives en physique. Il peut aussi permettre de vérifier si les hypothèses qui ont permis de le construire sont valables.

Les nombres au hasard.

Une application de l'arithmétique dans le domaine des probabilités et des statistiques via l'informatique.

Michel PLATHEY, lycée Hippolyte Fontaine, Dijon

Dans les années 1970, en même temps que les mathématiques dites modernes, sont apparues dans l'enseignement des mathématiques, une branche des mathématiques, appelées probabilités. Simultanément, une vieille discipline, l'arithmétique, qui plonge ses racines dans la plus haute antiquité, à l'origine du calcul, disparaît des programmes. Depuis, elle a été remise à l'honneur, mais seulement en Terminale Scientifique, en tant que spécialité. De ce fait, son importance est de nouveau reconnue dans l'enseignement. Cette reconnaissance vient par exemple, du rôle des nombres premiers dans l'établissement des codes secrets à clé révélée, largement utilisés pour la sécurité sur internet.

Actuellement l'enseignement des statistiques se développe dans les classes de collège d'abord, puis ensuite en lycée. Je pense que cette évolution est bonne car les statistiques et les probabilités apparaissent proches du réel, apportant des réponses parfois intuitives, parfois paradoxales à des questions qu'on peut se poser sans être entré très avant dans l'étude de ces domaines, qui, au niveau où on les traite, ne demandent que peu de connaissances préalables.

Pour enseigner ces matières, on se base sur l'idée naturelle qu'a l'élève de la probabilité d'un évènement. Par exemple, la symétrie d'un dé cubique parfait entraîne logiquement que la probabilité de chaque évènement élémentaire lié au jet de ce dé est de $\frac{1}{6}$. On n'a en général pas de peine ensuite à définir une fonction probabilité liée à une expérience aléatoire, dont l'univers contient un nombre fini d'éléments, comme une application $p : P(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant $p(\Omega) = 1$ et $(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (p(A \cup B) = p(A) + p(B))$ où Ω est l'univers de l'expérience et A et B deux évènements, c'est-à-dire deux sous-ensembles de Ω.

Cependant, en probabilités, notre intuition est-elle parfaite ? La réponse est non et les paradoxes abondent. Pour reprendre l'exemple du jet d'un dé cubique symétrique, qui représente le prototype parfait du jeu de hasard, je peux, en tant que joueur, être intéressé à la sortie du « six » si j'ai misé une somme d'argent sur ce résultat. Et j'aurai peut-être à me désoler que le « six » n'apparaisse pas assez souvent, ce qui me semble un manque de chance anormal. D'où le questionnement naturel : Est-ce qu'une plus ou moins grande rareté de la sortie du « six » dans un jeu avec un dé cubique parfait, est anomale ? On peut répondre à cette question de façon théorique depuis plusieurs points de vue. On peut aussi essayer de faire un grand nombre de simulations de cette expérience pour essayer d'affiner notre intuition.

Dans un exemple célèbre, le Chevalier de Méré, joueur impénitent du XVII^{e} siècle, avait remarqué que, lorsqu'on lance 3 dés cubiques parfaits et que l'on fait la somme des nombres obtenus, on obtient plus souvent 10 que 9, alors que 10 et 9 se décomposent tous deux de 6 façons différentes en sommes de 3 nombres entiers compris au sens large entre 1 et 6. Cela lui semblait anormal. Le Chevalier présenta alors le paradoxe au grand philosophe, physicien et mathématicien

Blaise Pascal. La résolution par Pascal de ce problème fut alors un acte fondateur de cette nouvelle science : le calcul des probabilités. Aujourd'hui, on peut reposer ce problème à nos élèves. Mais ceux-ci, pour ne pas se trouver en état d'infériorité par rapport à Pascal qui savait que le Chevalier du Méré, en excellent professionnel du jeu qu'il était, ne se trompait certainement pas, doivent pouvoir acquérir, en accéléré, la certitude donnée par les multiples expériences du joueur. Comment faire ? En 1970, il était difficile de réaliser des simulations d'expériences aléatoires. On pouvait, bien sûr, faire lancer un dé aux élèves, qui, travaillant par groupes, établissaient des listes de résultats. Cette méthode, bien qu'intéressante, n'est pas facile à mettre en œuvre et demande trop de temps. On pouvait aussi, au lieu de réaliser physiquement les expériences, utiliser des tables de nombres au hasard, formées en général de nombres décimaux compris entre 0 et 1, avec quatre chiffres après la virgule. Pour éviter les répétitions, on prenait ces nombres de droite à gauche, de bas en haut, en diagonale, un nombre sur deux, un nombre sur trois, on les tronquait, etc. Pour simuler le jet d'un dé, il faut alors multiplier le décimal obtenu par 6, ajouter 1 puis prendre la partie entière du résultat. L'aspect fastidieux et répétitif de l'exercice pouvait cependant aussi finir par lasser.

On pouvait aussi créer soi-même ses propres nombres au hasard. Voici comment il est possible de faire avec une petite calculatrice. On part d'un nombre entier, noté u_0 compris strictement entre 100 et 149. On le multiplie par 10 et on effectue la division euclidienne du résultat par 149. On verra par la suite pourquoi 149 est un choix relativement bon. On obtient un reste noté u_1. On multiplie u_1 par 10 et on effectue la division euclidienne du résultat par 149. On obtient un autre reste noté u_2. Et on recommence. On obtient alors la suite des restes partiels de la division euclidienne de u_0 par 149. Le nombre $\frac{u_0}{149}$ n'étant pas décimal car 149 est un nombre premier, le nombre 0 n'apparaît pas dans la liste des restes partiels. De plus, d'après le lemme des tiroirs de Dirichlet[1], il existe deux indices différents, $k;l;k<l$ tels que $u_k = u_l$. Soit k_0 le plus petit entier naturel vérifiant la condition précédente et soit l_0 le plus petit entier naturel strictement supérieur à k_0 tel que $u_{k_0} = u_{l_0}$. Alors le lemme des tiroirs encore montre qu'on a $l_0 - k_0 \leq 149$. La suite $(u_n)_{n\in N}$ est alors périodique de période $l_0 - k_0$[2]**. Voyons ce qu'il en est dans ce cas précis. On peut faire faire le travail par un tableur (voir feuille de calcul page 17, colonne L) :

- en cellule L2, on écrit par exemple : = 100 ;
- en cellule L2, on écrit : = MOD (L2*100 ; 149)
- et on calcule les termes successifs de la suite en sélectionnant la cellule L3 et en tirant la poignée de recopie vers le bas.

On obtient alors, surprise ou non, dès le départ, 148 nombres différents avant de retomber sur $100 = u_{148}$. Puis, en continuant, on retrouve la même séquence de 148 nombres entiers. La suite obtenue est périodique, de période maximale égale à 148.

On pose ensuite $v_n = 10^{-4}.E(10^4.\frac{u_n}{149})$; $0 \leq n \leq 147$, où E est la fonction partie entière définie sur les réels. Cela calcule le nombre décimal compris entre 0 et 1 égal à la troncature à 4 chiffres après la virgule du nombre $\frac{u_n}{149}$ (voir colonne M de la feuille de calcul page 32). On obtient ainsi une suite

[1] Lemme des tiroirs de Dirichlet.
Étant donnés n tiroirs et $m > n$ objets, alors au moins un des tiroirs doit contenir au moins deux objets.

[2] La même preuve montre que la suite des décimales du développement décimal d'une fraction est périodique, la longueur de la période étant inférieure au dénominateur.

périodique où la période est constituée par la suite finie $(v_0;v_1;...;v_{147})$ de 148 nombres décimaux appartenant à $[0;1[$ ayant 4 chiffres après la virgule. Une telle suite peut-elle être considérée comme aléatoire. Strictement parlant, bien sûr que non, car elle est définie de façon déterministe d'une part et d'autre part, elle est périodique. Mais on peut déplacer la question et se demander si une telle suite déterministe peut modéliser de façon adéquate le hasard ? La réponse ici est encore non, à cause de la trop petite période de la suite *v*. En utilisant la suite *v* un certain nombre de fois, les répétitions ne manqueraient pas de se faire remarquer, ce qui détruirait la qualité essentielle d'une suite aléatoire, qui est l'imprévisibilité. Ainsi, cette suite *v* ne peut pas paraître aléatoire.

Il n'en reste pas moins vrai, que les termes successifs de la suite *v*, dévoilés les uns après les autres, sont impossibles à deviner, même de façon approchée, en l'absence d'une connaissance précise du mode de formation de la suite, tant qu'on n'a pas repéré son caractère périodique. Le remède pour pallier à l'inconvénient rédhibitoire que je viens de souligner, ayant pour cause la périodicité de la suite *u* est de rendre la période très longue, si longue qu'aucune répétition d'utilisations de cette procédure n'en puisse jamais venir à bout. Dans ce but, il ne faut pas choisir le nombre 149, mais un nombre beaucoup plus grand. J'ai fait ce calcul aux colonnes N et P de la feuille de calcul page 32 avec les suites $u_0 = 1000000; u_{n+1} = 10.u_n (\text{mod}.8000009)$ et $v_n = 10^{-4}.E(10^4.\frac{u_n}{8000009})$. Les logiciels actuels de mathématiques permettent de calculer très rapidement (addition, multiplication, division euclidienne) sur des nombres entiers énormes qui dépassent de très loin le nombre d'utilisations qu'on peut faire de termes successifs de cette suite. Mais on doit rester prudent, et le fait de pouvoir supprimer un inconvénient ne signifie pas qu'il n'y en a pas d'autres. Avant de traiter ce sujet plus en détail, je voudrais d'abord mettre en exergue l'importance de disposer à volonté de nombres qui simulent de façon fiable le hasard.

A ce propos, une nouvelle notion a fait son entrée il y a quelques années: c'est celle de modélisation. Les travaux personnels encadrés (T.P.E.) auraient dû pouvoir donner l'occasion aux élèves de réaliser quelques modélisations simples de quelques phénomènes naturels issus des sciences physiques ou biologiques ou économiques ou technologiques ou autres (géographie, histoire, langues, jeux et sports…). Modéliser une expérience, c'est en réaliser une théorie que l'on met en œuvre ensuite sur ordinateur. Les conditions réelles d'une expérience contiennent presque toujours une part d'aléatoire qu'il ne faut pas négliger. Les nombres simulant l'aléatoire joueront ici un rôle crucial.

L'obtention de nombres au hasard est indispensable dans la modélisation de toutes les expériences où le hasard pourra ou devra jouer un rôle. Ainsi :

- Je devrai les utiliser dans la classe si je veux modéliser simplement les résultats d'un jeu de pile ou face, ou du jet d'un dé, ou d'un tirage de boules dans une urne. Ces modélisations sont élémentaires, mais donnent certainement une bonne image de ce qui se passe dans le monde réel. Du moins, c'est l'impression intuitive que j'en ai. On pourra aussi modéliser des situations beaucoup plus compliquées comme la distribution d'échantillonnage d'une moyenne. On peut tirer, de façon indépendante, 1000 échantillons de taille 100 d'une variable aléatoire de moyenne *m* et d'écart type σ. On dressera ensuite un histogramme des moyennes arithmétiques des valeurs de chaque échantillon. On pourra alors constater que cette variable aléatoire, moyenne arithmétique de 100 variables aléatoires indépendantes de moyenne *m* et d'écart type σ suit *approximativement* une loi normale de moyenne *m* toujours, mais d'écart type $\frac{\sigma}{10}$. Cela permet de concrétiser le théorème de la limite centrale dont certaines applications figurent aux programmes de brevet de technicien supérieur. Cette concrétisation est impossible sans les nombres au hasard et la puissance de calcul des ordinateurs qui permet de les engendrer.

- Les probabilités sont issues des jeux de hasard, domaine futile s'il en est. Cependant, le monde des jeux de hasard a actuellement, du fait de l'énorme diffusion des jeux vidéo, un certain poids économique, que l'on ne peut que prendre en compte. Et le calcul des nombres au hasard y intervient de façon constante. Mais l'importance des jeux ne se limite pas à cela. Acheter ou vendre une action en Bourse est en soi un pari. Et la théorie afférente à cette activité économique s'appelle actuellement « les mathématiques financières » qui ont eu plusieurs fois l'honneur du prix Nobel d'économie. Il est important de pouvoir effectuer des simulations pour pouvoir prévoir le cours ultérieur de la Bourse dans un avenir plus ou moins proche. Là aussi, les nombres au hasard fourniront les moyens (fiables si la théorie sous-jacente est bonne) de tracer une courbe du montant de l'action dans le futur. Cette courbe aura naturellement un aspect très *fractal* comme ce qui se passe dans la réalité.

- Les instituts de sondage aussi sont dans la nécessité d'utiliser les nombres au hasard. Souvent, voire tous les jours, les différents media nous donnent leurs résultats. Nous en sommes abreuvés en période électorale. Un sondage a pour but de donner une estimation, avec un certain degré d'exactitude symbolisé par la fourchette du sondage, de ce que pense une population, avec des moyens pas trop onéreux. Pour cela, on n'interrogera pas toute la population, mais seulement un sous ensemble de cette population formé d'un petit nombre de personnes, nommé échantillon, dont la taille est de l'ordre du millier. Mais il faut soigneusement le choisir, et le plus curieux, le plus paradoxal, c'est que c'est le hasard qui sera seul en mesure de faire non pas seulement le meilleur choix, mais seulement un choix acceptable. Bien sûr, au départ, il faudra diviser la population en strates, de sorte que la plupart des catégories socioprofessionnelles soient présentes dans l'échantillon. A l'intérieur de chaque strate, on tirera ensuite au hasard un certain nombre de personnes. Cela se fait habituellement par ordinateur et donc les nombres au hasard interviennent. Il est important que le choix soit fait au hasard. Un choix dirigé selon d'autres critères courrait le grand risque de ne pas être objectif et de refléter à leur insu l'opinion politique ou des préjugés des sondeurs.

- Un domaine extrêmement curieux et inattendu de l'intervention des suites aléatoires est l'application de celles-ci au calcul approché d'intégrales définies par une méthode dite méthode de « Monte Carlo ». Elle est souvent utile pour le calcul de celles-ci en dimensions supérieures à 2 (et même en dimension 2, si le domaine d'intégration a une frontière compliquée), là où les calculs exacts sont en général impossibles. Cette méthode est très facile à mettre en œuvre sur tableur ou avec un logiciel de calcul numérique. La théorie mathématique permet de connaître l'erreur faite avec une certaine probabilité proche de 1.

- L'aléatoire peut aussi permettre de vérifier les logiciels informatiques. Cette année, j'ai assisté à la présentation du logiciel gratuit Scilab, logiciel de calcul numérique, par monsieur Gomez, un des concepteurs de ce logiciel. Pour montrer l'efficacité du produit, pour le calcul des valeurs propres d'une matrice carrée, il a utilisé la commande RANDMAT. RANDMAT (100 ; 100) fournit une matrice aléatoire de taille 100*100.Et le logiciel en donne instantanément les valeurs propres. C'est très impressionnant et convaincant. L'utilisation de l'aléatoire a permis de définir rapidement une matrice carrée de grande taille, opération impossible à faire facilement par une autre méthode, sauf à définir des matrices particulières qui apparaîtront truquées.

Cependant, il est possible que la suite aléatoire parfaite n'existe pas. D'abord, et cela est très gênant, on ne sait pas définir théoriquement et de façon opérationnelle ce que serait une suite dont les termes successifs seraient des réalisations d'une variable aléatoire X uniforme sur le segment $[0;1[$. Des tentatives existent dans ce sens. Ainsi :

- Le cerveau humain est un très mauvais générateur de nombres aléatoires. En effet, les probabilités sont un domaine où notre intuition est facilement mise en défaut. On pense couramment qu'une suite aléatoire doit être irrégulière. Elle doit être imprévisible, ce qui n'est pas la même chose. Ainsi des 2 suites finies d'éléments de $[0;1]$:
$$u = (1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1)$$
$$v = (0;1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;1;0;1),$$
la première est très régulière, la deuxième est très irrégulière, mais les deux sont également prévisibles. Aucune ne peut modéliser le hasard. J'ai présenté deux cas extrêmes, caricaturaux, mais en se fiant à notre intuition du hasard, on tombe facilement dans le travers de la prévisibilité.

- Une suite *aléatoire* n'est pas non plus si facile à fabriquer par des moyens physiques. Les machines que l'on voit à la télévision, qui font sortir les numéros du loto, sont certainement le fruit d'une réalisation technologique soigneusement pensée et précise. Cependant, peut-on affirmer que les nombres sortent bien au hasard, suivant une loi uniforme sur un certain intervalle d'entiers? En tous cas, les joueurs eux-mêmes sont très méfiants, ainsi que la direction du casino, constamment à l'affût d'anomalies qui pourraient survenir dans la distribution de la suite des nombres obtenus. En effet, dans le domaine des jeux de casino, il suffit que le croupier soit un peu fatigué pour que son lancer de dé devienne plus mécanique et, de ce fait favorise la sortie de certains nombres. Mais le comportement chaotique du mouvement de certains systèmes mécaniques permet l'obtention de suites de nombres dont on peut conjecturer qu'elles approchent l'aléatoire.

- La suite des décimales d'un nombre irrationnel, par exemple la suite des décimales de π peut-elle être considérée aléatoire ?

Mais, comme nous l'avons vu, les ingénieurs et les scientifiques ont besoin des nombres aléatoires. On a l'intuition du concept de suite aléatoire. Cependant il est difficile de définir cette notion de façon précise. Devant ce dilemme, l'attitude de l'homme est toujours la même, celle d'un pragmatisme plus ou moins prudent. Comme le disait Heaviside à propos des distributions qui, à la fin du XIXème siècle avaient un caractère hautement paradoxal et dont la théorie mathématique restait à construire mais qui avaient prouvé leur efficacité dans la pratique : « ce n'est pas parce que je ne comprends pas comment fonctionne mon estomac, que je ne vais pas prendre mon repas ». Les scientifiques vont donc essayer d'établir des recettes qui « marchent ». Ils vont aller de l'avant, en essayant à chaque avancée de se vérifier le plus possible et pour cela des moyens pratiques existent qu'on appelle tests statistiques. Cette attitude laisse bien sûr encore beaucoup à désirer et doit conduire à des développements théoriques plus rigoureux pour satisfaire aux standards habituels de la démonstration mathématique.

Pour donner une idée de ce qu'on peut faire, passons donc maintenant à la généralisation de la méthode vue plus haut, où pour engendrer une suite dont on espère qu'elle modélise convenablement une suite de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire uniforme sur $[0;1[$, on était parti de la suite des restes partiels de la division de 100 par 149.

On sait que certains théorèmes d'arithmétique peuvent être démontrés à l'aide de théorèmes issus de la théorie des probabilités. Ainsi, un exemple de l'intervention des probabilités en arithmétique est l'existence des nombres de Carmichael, qui ne sont pas tous premiers, mais qui le sont avec la probabilité 1, dans un sens qui reste à préciser, et qui donc peuvent rendre pratiquement les mêmes services que les nombres premiers. Ce que l'on connaît moins, est l'apport que peut apporter l'arithmétique au domaine des statistiques et des probabilités par le truchement des nombres au hasard, ce qui est illustré par ce qui suit.

Avant de continuer, je voudrais rappeler la signification du « petit théorème de Fermat » que j'utilise dans la démonstration du théorème 2 qui suit.

<u>Petit théorème de Fermat</u>

Si p est un nombre premier et a un entier naturel quelconque, alors :

$$a^p \equiv a(\text{mod}.p).$$

De plus, si a n'est pas multiple de p, il existe un plus petit entier d tel que :

$$a^d \equiv 1(\text{mod}.p) \text{ et } d|(p-1).$$

Donc

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod}.p).$$

Ce théorème est appelé aussi le test de primalité de Fermat et il constitue une condition nécessaire mais non suffisante pour que p soit un nombre premier.

Ainsi, si p est un entier naturel et s'il existe un entier naturel a non nul, $a < p$ tel que $a^{p-1} - 1 \neq 0(\text{mod}.p)$, alors p n'est pas premier.

Un nombre entier p tel que pour tout $a \in N; 0 < a < p$, on ait $a^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod}.p)$ est appelé nombre de Carmichael ou encore nombre pseudo premier ou nombre premier probable.

Revenons au propos principal, qui est la génération d'une suite de nombres pseudo aléatoires.

La méthode linéaire

On voudrait engendrer une suite d'entiers, suite *imprévisible* et facilement calculable.

Une telle suite sera définie par une récurrence de la forme

$$u_0 \in N; u_{n+1} = f(u_n)(\text{mod}.m) \text{ pour } n \in N$$

où m est un nombre entier et où $f : N \to N$ est une fonction à définir soigneusement de sorte qu'elle puisse satisfaire à ce qu'on veut.

Une telle suite est toujours périodique de période inférieure ou égale à m. Dans un premier temps, avant de se préoccuper d'effectuer les tests statistiques, il faudra choisir m très grand pour espérer avoir une grande période pour la suite u et voyons alors si on peut avoir des suites de période maximum m avec des fonctions simples. Parmi celles-ci, il y a les fonctions affines à coefficients entiers. Dans ce cas, on a la définition et le théorème 1 suivant, énoncé sans démonstration :

<u>Définition</u>

Soient $u_0; a; c; m$ quatre entiers naturels avec $m \neq 0$. Soit

$$f : N \to N; n \mapsto f(n) = a.n + c$$

On définit alors la suite $u = (u_n)_{n \in N}$ par son premier terme u_0 et par la récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)(\text{mod}.m) = (a.u_n + c)(\text{mod}.m)$$

La suite u est une suite arithmético-géométrique modulo m.

u_0, le premier terme de la suite, sa valeur initiale, est appelée la graine ; a est le multiplicateur ; c est l'incrément et m s'appelle le module.

Dans le cas de l'introduction, que je viens juste de rappeler, on a :

$$u_0 = 100; a = 10; c = 0; m = 149.$$

Théorème 1

Cette suite a une période de longueur *m* si et seulement si :

- c et m sont premiers entre eux ;
- $b = a - 1$ est un multiple de *p* pour tout diviseur premier *p* de *m* ;
- b est un multiple de 4 si *m* est un multiple de 4.

Des exemples sont donnés dans la feuille de calcul page 17, colonnes B à K.
Dans le cas où $c = 0$, la fonction

$$f : N \to N; n \mapsto f(n) = a.n$$

est linéaire et la suite $u = (u_n)_{n \in N}$ de la définition précédente est définie par son premier terme u_0 et par la récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)(\text{mod}.m) = (a.u_n)(\text{mod}.m).$$

La suite *u* est donc une suite géométrique modulo *m*.

Etude de la période de la suite *u* lorsque *f* est linéaire

Puisque 0 n'est pas premier avec *m*, la première condition de validité du théorème 1 n'est pas vérifiée et ainsi, la période de la suite *u* ne peut pas être égale à *m*.

On constate que si il existe $n \in N$, avec $u_n = 0$, alors $(k \geq n) \Rightarrow (u_k = 0)$. Donc, pour que la suite *u* puisse paraître aléatoire, il est nécessaire que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in N$. La période de la suite *u* est donc au maximum égale à $m - 1$.

Supposons que *m* soit un nombre premier et que $u_0 \neq 0(\text{mod}.m); a \neq 0(\text{mod}.m)$. On a alors
$u_n = (u_0.a^n)(\text{mod}.m)$.
La période de la suite est alors le plus petit entier λ tel que $u_0 = u_0.a^\lambda(\text{mod}.m)$. C'est donc le plus petit entier λ non nul tel que $a^\lambda = 1(\text{mod}.m)$. D'après le petit théorème de Fermat, ce nombre est égal à *d* avec $d | (m-1)$. Donc :

Théorème 2.
Soit *m* un nombre premier et u_0, *a* des entiers non multiples de *m*. Alors la suite $u = (u_n)_{n \in N}$ définie par son premier terme u_0 et par la récurrence

$$u_{n+1} = (a.u_n)(\text{mod}.m)$$

admet pour plus petite période un entier *d* diviseur de $m - 1$.
Et, on peut montrer qu'on a exactement $d = m - 1$
Donc, puisque 149 est premier, la suite définie par $u_0 = 100$, $u_{n+1} = (10.u_n)(\text{mod}.149)$ pour tout $n \in N$ a pour plus petite période 148.
De même, puisque 8 000 009 est premier, la suite définie par $u_0 = 1000000$, $u_{n+1} = (10.u_n)(\text{mod}.8000009)$ pour tout $n \in N$ a pour plus petite période 8 000 008, ce qui peut suffire pour beaucoup d'applications.
Et encore, puisque 1 000 000 007 est premier, la suite définie par $u_0 = 500000000$, $u_{n+1} = (3542438.u_n)(\text{mod}.1000000007)$ pour tout $n \in N$ a pour plus petite période 1 000 000 006.
C'est pareil pour la suite définie par $u_0 = 500000000$, $u_{n+1} = (2.u_n)(\text{mod}.1000000007)$ pour tout $n \in N$.

Ces deux théorèmes permettent donc d'engendrer des suites qui peuvent sembler aléatoires. Comment fait-on alors pour vérifier le caractère aléatoire d'une des suites construites. On dispose pour cela de ce qu'on appelle des tests statistiques. Deux, parmi les plus connus sont le test du Khi deux et celui de Kolmogorov Smirnov.

Le test du Khi Deux.

Son domaine d'application est celui des variables aléatoires discrètes. Si l'une de celles-ci est continue, pour pouvoir lui appliquer le test du Khi deux, il faut d'abord la discrétiser, en considérant des classes de valeurs.

Exemple 1.

Par exemple, avec l'avant-dernière suite construite, suite définie par $u_0 = 1000000$, $u_{n+1} = (10.u_n)(\text{mod}.8000009)$ pour tout $n \in N$, je peux simuler un jet de deux dés cubiques équilibrés. On obtient alors le tableau n°1 suivant, relatif à une simulation de 108 jets de 2 dés, où S désigne la suite des résultats possibles, N le nombre d'occurrences de la somme S dans l'échantillon obtenu de taille 108, et NT le nombre théorique correspondant:

Tableau n°1 :

S_k	2	3	4	5	6
N_k	2	4	10	13	11
NT_k	$3 = 108 * \frac{1}{36}$	$6 = 108 * \frac{2}{36}$	$9 = 108 * \frac{3}{36}$	$12 = 108 * \frac{4}{36}$	$15 = 108 * \frac{5}{36}$

S_k	7	8	9	10	11	12
N_k	13	23	14	12	5	1
NT_k	$18 = 108 * \frac{6}{36}$	$15 = 108 * \frac{5}{36}$	$12 = 108 * \frac{4}{36}$	$9 = 108 * \frac{3}{36}$	$6 = 108 * \frac{2}{36}$	$3 = 108 * \frac{1}{36}$

Une méthode naturelle permettant de mesurer l'écart entre la suite N des résultats observés et la suite théorique NT est de calculer le nombre :

$$D = \sum_k (N_k - NT_k)^2 = (2-3)^2 + (4-6)^2 + ... + (1-3)^2 .$$

Il a cependant été prouvé que cette somme, où les différents termes ont la même importance, ne convient pas et que pour obtenir une mesure correcte de l'écart il faut diviser le terme $(N_k - NT_k)^2$ par NT_k pour obtenir

$$D = \frac{\sum_k (N_k - NT_k)^2}{NT_k} = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(4-6)^2}{6} + ... + \frac{(1-3)^2}{3} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{16}{15} + \frac{25}{18} + \frac{64}{15} + \frac{4}{12} + \frac{9}{9} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = 10{,}75.$$

C'est ce qu'on appelle le Khi Deux de l'échantillon obtenu.

Maintenant, comment décider si la quantité obtenue ne contredit pas le caractère aléatoire de l'expérience. Pour cela, on dispose de tables qui ont été établies de façon théorique et dont les valeurs dépendent du nombre de résultats possibles de l'expérience. Ici, il y a 11 résultats possibles qui sont les NT_k qui ne sont pas complètement indépendants puisque le dernier résultat peut être calculé si on connaît les 10 premiers. C'est pourquoi on parle d'une statistique du Khi deux à 10 degrés de liberté. La ligne correspondante de la table du Khi Deux donne :

	$p = 99\%$	$p = 95\%$	$p = 75\%$	$p = 50\%$	$p = 25\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$
$\nu = 10$	2,558	3,940	6,737	9,342	12,55	18,31	23,21

Cela signifie que, dans 95% des cas, la somme *D* est plus grande que 3,940 et que dans 5% des cas elle est plus grande que 18, 31.
La somme obtenue, égale à 10,75, comprise entre 3,940 et 18,310, n'est donc pas exceptionnelle et ne permet pas de rejeter le caractère uniforme de la suite *u*.
Avant de passer au deuxième exemple, j'explique d'abord comment j'ai obtenu le tableau n°1 :
Celui-ci est issu d'une feuille de calculs n°1 que je décris, sans la présenter.

La colonne A contient les108 premiers termes d'une suite u, pseudo aléatoire d'entiers, définie par exemple par

$$u_0 = 500000000 \ ; \ u_{n+1} = u_n.3542438(\text{mod}.1000000007)\,.$$

La cellule A1 contient donc $u_0 = 500000000$, A2 réalise le calcul =MOD (A1*3 542 438 ; 1 000 000 007). On sélectionne ensuite A2 et on tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule A108.

En B1, on calcule = ENT (A1/1 000 000 007*10 000)/10 000. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule B108. On obtient ainsi une première suite pseudo aléatoire de 108 termes compris entre 0 et 1 de décimaux ayant 4 chiffres après la virgule.

En C1, je recopie à la main, le nombre u_{108}. Les colonnes C et D contiennent alors les mêmes calculs que les colonnes A et B.

En E1, on calcule = ENT (B1*6+1) qui simule les résultats du premier jet du premier dé. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule E108 pour avoir les résultats des 107 jets suivants.

En F1, on calcule = ENT (D1*6+1) qui simule les résultats du premier jet du deuxième dé. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule F108 pour avoir les résultats des 107 jets suivants.

En G1, on calcule = E1 + F1 qui donne la somme des résultats des premiers jets des 2 dés. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule G108 pour avoir les sommes des résultats des 107 jets suivants des 2 dés.

La colonne H contient tous les résultats possibles de l'expérience, valeurs entières de 2 jusqu'à 12 écrites en utilisant la poignée de recopie dans les cellules H2 jusqu'à H12.

En regard, dans la colonne I, on calcule le nombre d'occurrences de chaque résultat. Pour cela, on peut procéder de la façon suivante. En I2, on calcule =NB.SI($G$1 :$G$108 ;H2). Cette commande calcule le nombre de fois que l'on trouve le résultat H2 dans la plage de cellules G1 : G108. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule I12 pour avoir les nombres d'occurrences des autres résultats possibles pour les sommes obtenues lors des 108 jets des 2 dés. On remarque les signes $ qui servent à fixer les adresses des cellules et ensuite leur absence qui alors n'empêche pas l'adresse de varier lors de la recopie. En I13, on vérifie que la somme des contenus des cellules de I2 à I12 est bien égale à 108.

La colonne J, de J2 à J12 contient les nombres $prob(S = k)*108$ où *S* est la variable aléatoire égale à la somme des résultats des jets de deux dés cubiques parfaits. En J13, on vérifie que la somme des contenus des cellules de J2 à J12 est bien égale à 108.

En K2, on a calculé = (I2 – J2)^2 / J2, qui correspond à $\frac{(N_k - NT_k)^2}{NT_k}; k = 2$. On tire la poignée de recopie vers le bas jusqu'en cellule K12 pour avoir les résultats correspondants aux autres valeurs *k* de la somme *S*.

En K13, on calcule = SOMME(K2 :K12) qui fournit le Khi Deux de l'échantillon.

Exemple 2.

Si je veux tester directement le caractère aléatoire de la suite définie par $u_0 = 500000000$, $u_{n+1} = (3542438.u_n)(\text{mod}.1000000007)$ pour tout $n \in N$, je peux prendre un échantillon de 100 termes successifs puis discrétiser les résultats en ne gardant que la première décimale. On a alors le tableau n°2 suivant:

Tableau n°2 :

Valeurs $k \in N; 0 \le k \le 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre N_k d'occurrences de *k*.	10	5	9	11	12	13	13	5	11	11
Nombre théorique NT_k attendu.	$10 = 100 * \frac{1}{10}$	10	10	10	10	10	10	10	10	10

On obtient ici $D = \frac{\sum_{k=0}^{k=9} (N_k - NT_k)^2}{NT_k} = 7{,}6.$ La ligne de la table de la loi du Khi Deux à $\nu = 9$ degrés de liberté donne :

	$p = 99\%$	$p = 95\%$	$p = 75\%$	$p = 50\%$	$p = 25\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$
$\nu = 9$	2,088	3,325	5,899	8,343	11,39	16,92	23,21

La somme obtenue, égale à 7,6, comprise entre 3,325 et 16,92, n'est donc pas exceptionnelle et ne permet pas de rejeter le caractère uniforme de la suite *u*.

Le même calcul, fait avec la suite définie par $u_0 = 500000000$, $u_{n+1} = (2.u_n)(\text{mod}.1000000007)$ pour tout $n \in N$ donne $D = 17$, ce qui infirme au seuil de 5% le caractère aléatoire de la suite *u*. Ce caractère aléatoire n'est cependant pas infirmé au seuil de 1%.

En terminale S, pour vérifier le caractère uniforme d'une loi de probabilité *X* à partir d'un échantillon de taille *n*, on utilise $D = \sum_k (N_k - NT_k)^2$, ce qui est parfaitement légitime et au lieu ensuite de se référer à une loi théorique de type Khi deux comme précédemment, on se ramène à la réalisation d'un grand nombre *N* d'échantillons de taille *n* d'une variable aléatoire *Y* dont on sait qu'elle suit la loi uniforme considérée. On calcule ensuite les 5[e] et 95[e] centiles de l'échantillon de taille *N* de la variable aléatoire *D* définie sur l'ensemble des échantillons de taille *n* de la variable aléatoire *Y*. Ces valeurs constituent alors les bornes d'acceptation du caractère uniforme de *X*.

Un point remarquable de la méthode est qu'une valeur trop faible de *D* doit également engendrer le doute et conduire au rejet du caractère aléatoire de la suite considérée. On le voit bien si on étudie la suite donnée en introduction donnée par la récurrence :

$$u_0 = 110; u_{n+1} = 10.u_n (\mathrm{mod}.149).$$

Si on prend un échantillon de 149 termes successifs, on obtient $D = 0$ et la suite n'est pas considérée comme aléatoire.

Le test de Kolmogorov et Smirnov.

Pour appliquer le test du Khi deux, nous devons nous ramener à des observations numériques qui entrent dans un nombre fini de catégories. Dans notre cas où il nous faut étudier le caractère uniforme d'une suite infinie de réels compris entre 0 et 1, nous avons une infinité de valeurs possibles. On dispose alors d'une autre forme de test dont le domaine d'application est complémentaire de celui du test du Khi deux, celui des variables aléatoires continues. Je vais en donner une description.

Pour décrire une variable aléatoire *X*, on utilise couramment sa fonction de répartition *F* définie par : $F(x) = p(X \leq x)$ pour $x \in R$. Si nous effectuons $n; n \in N$ réalisations indépendantes de la variable aléatoire *X*, obtenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$, on obtient un échantillon $E(n)$ au hasard avec remise de taille *n* de la variable aléatoire *X* et on peut alors former ce qu'on appelle la fonction de répartition des pourcentages cumulés croissants de l'échantillon $E(n)$ que je note $F_{E(n)}$ avec

$$F_{E(n)}(x) = \frac{Card(i / x_i \in E(n); x_i \leq x)}{n}; x \in R$$

La fonction $F_{E(n)}$ est une fonction en escalier croissante dont les points de discontinuité sont les réels $x_1; x_2; ...; x_n$. La loi des grands nombres et plus précisément le théorème de Glivenko-Cantelli affirme qu'on a

$$\sup_{x \in R} \left| F_{E(n)}(x) - F(x) \right| \to 0 \text{ presque sûrement.}$$

Le test de Kolmogorov et Smirnov utilise la différence entre $F_{E(n)}$ et *F*. Appliqué à une suite de nombres pseudo aléatoires, une trop grande ou une trop petite valeur de $\sup_{x \in R} \left| F_{E(n)}(x) - F(x) \right|$ décèleront un mauvais générateur.

La théorie montre que pour réaliser ce test, il faut calculer les deux réels suivants :

$$\begin{aligned} K^+_{E(n)} &= \sqrt{n}.Max_{x \in R}(F_{E(n)}(x) - F(x)) \\ K^-_{E(n)} &= \sqrt{n}.Max_{x \in R}(F(x) - F_{E(n)}(x)) \end{aligned} \qquad (1).$$

Le facteur $\sqrt{n}$ intervient car on peut montrer que l'écart entre $F_{E(n)}(x)$ et $F(x)$ est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Le théorème de Kolmogorov-Smirnov énonce :

$$\lim_{n \to \infty} p(\sup_{x \in R} \sqrt{n}.\left| F_{E(n)}(x) - F(x) \right| \leq u) = 1 + 2.\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.e^{-2.k^2.u^2}.$$

$K^+_{E(n)}$ mesure le produit par $\sqrt{n}$ du plus grand écart entre $F_{E(n)}(x)$ et $F(x)$ lorsque $F_{E(n)}(x) \geq F(x)$ et $K^-_{E(n)}$ mesure le produit par $\sqrt{n}$ du plus grand écart entre $F_{E(n)}(x)$ et $F(x)$ lorsque $F_{E(n)}(x) \leq F(x)$.

On compare ensuite les valeurs obtenues à des tables dont le calcul n'est pas basé sur le théorème de la limite centrale contrairement aux tables des tests du Khi deux. On peut dons s'en servir pour de petites valeurs de *n*.

Pour utiliser les formules (1), on se sert du fait que la fonction F est croissante et que la fonction $F_{E(n)}$ ne s'accroît que pour un nombre fini de sauts.

Ainsi pour vérifier le caractère uniforme sur l'intervalle $[0;1[$ d'une suite de nombres pseudo aléatoires, on peut suivre la procédure ci-après :

- On calcule les n premiers termes $x_1; x_2;...; x_n$ de la suite qu'on veut étudier. On a : $E(n) = \{x_1; x_2;...; x_n\}$.
- On range les nombres obtenus dans l'ordre croissant, de sorte qu'on peut supposer maintenant $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Le tableur effectue cette tâche magnifiquement bien alors que le même travail, effectué à la main, serait épouvantable.
- On a $F(x) = x; 0 \leq x \leq 1$ et il faut alors calculer les nombres

$$\begin{aligned} K^{+}_{E(n)} &= \sqrt{n}.Max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{i}{n} - x_i\right) \\ K^{-}_{E(n)} &= \sqrt{n}.Max_{1\leq i\leq n}\left(x_i - \frac{i-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

- On utilise ensuite la table obtenue théoriquement.

Exemple 1.

On étudie le caractère aléatoire uniforme sur $[0;1[$ d'une suite de 20 nombres obtenus avec ALEA().

Les résultats de la feuille de calcul n°3 page 33 donnent : $K^{+}_{E(20)} \approx 0{,}3837; K^{-}_{E(20)} \approx 0{,}6135$ et la table théorique donne :

	p = 99%	p = 95%	p = 75%	p = 50%	p = 25%	p = 5%	p = 1%
n = 20	0,03807	0,1298	0,3461	0,5547	0,7975	1,1839	1,4698

Ces résultats conduisent à accepter la suite comme aléatoire, uniforme sur $[0;1[$ car

$$0{,}1298 \leq 0{,}3837 \leq 1{,}1839; 0{,}1298 \leq 0{,}6135 \leq 1{,}1839.$$

On a même :

$$0{,}3461 \leq 0{,}3837 \leq 0{,}7975; 0{,}3461 \leq 0{,}6135 \leq 0{,}7975.$$

Les résultats précédents sont issus de la feuille de calcul n°3 que je vais décrire.

Sur une première feuille, dans la colonne A, j'écris une suite de 20 nombres au hasard : = ALEA () en A1 puis recopie jusqu'en A20.

Sur une deuxième feuille, j'effectue un collage spécial de la suite obtenue sur la première feuille. Le collage spécial est nécessaire, de façon à ne reproduire que les nombres obtenus, sans le calcul qui leur a donné naissance. Sinon la liste obtenue serait volatile, ce qui signifie que chaque nouvelle commande provoquerait un recalcul complet de toute le liste ce qui serait incompatible avec l'opération de tri que nous voulons faire ensuite. On effectue alors l'opération de tri croissant des 20 nombres. On obtient ainsi en colonne A, la colonne intitulée x(i)=ALEA(), formée de 20 nombres de l'intervalle $[0;1[$, rangés du plus petit au plus grand.

En colonne B, on écrit en regard la suite des 20 premiers entiers non nuls.

En colonne C, on obtient en regard les nombres $\frac{i}{20}; 1 \leq i \leq 20$.

En colonne D, on obtient en regard les nombres $\frac{i}{20} - x(i); 1 \leq i \leq 20$.

Il faut ensuite calculer le maximum des valeurs de cette colonne, puis multiplier le résultat par $\sqrt{20}$ pour obtenir le $K^{+}_{E(20)}$ ici égal à 0,3837.

En colonne E, on obtient en regard les nombres $\frac{i-1}{20}; 1 \le i \le 20$.

En colonne F, on obtient en regard les nombres $x(i) - \frac{i-1}{20}; 1 \le i \le 20$.

Il faut ensuite calculer le maximum des valeurs de cette colonne, puis multiplier le résultat par $\sqrt{20}$ pour obtenir le $K^{-}_{E(20)}$ ici égal à 0,6135.

Exemple 2.

Dans le deuxième exemple donné, on étudie le caractère aléatoire uniforme sur $[0;1[$ d'une suite v de 30 nombres obtenue à partir de la suite u définie par $u(0) = 1000; u(n+1) = 431.u(n)(\text{mod}.8527)$ en définissant : $v(n) = \frac{1}{10000}.Ent(10000.\frac{u(n)}{8527})$. La colonne $x(i)$ contient la suite ordonnée des termes de la colonne $v(i)$. On a : $K^{+}_{E(30)} \approx 0{,}1696; K^{-}_{E(30)} \approx 0{,}9852$ et la table donne :

	p = 99%	p = 95%	p = 75%	p = 50%	p = 25%	p = 5%	p = 1%
n = 30	0,04354	0,1351	0,3509	0,5605	0,8036	1,1916	1,4801

Ici, on ne peut pas rejeter formellement le caractère aléatoire uniforme sur $[0;1[$ mais les résultats sont moins bons que précédemment.

Conclusion

On vient de voir comment on peut simuler une variable aléatoire uniforme sur $[0;1]$. Cette méthode linéaire constitue une possibilité. Il y en a beaucoup d'autres qui utilisent des fonctions non affines. Mais quelle que soit la fonction choisie pour générer une suite pseudo aléatoire, il faut être très prudent. L'utilisation des tests statistiques se révèle ici cruciale. Il en existe de très variés dont beaucoup reposent cependant sur les deux tests fondamentaux du Khi Deux et de Kolmogorov et Smirnov. L'utilisation de l'informatique est, dans ces différents contextes, indispensable.

Explications concernant les 2 feuilles de calculs qui suivent :

Pour la feuille page 31, je présente des expériences concernant diverses suites arithmético-géométriques du type $(u_0; a; c; m)$ définies par la récurrence

$$(u_0; u_{n+1} = a.u_n + c(\mathrm{mod}.m)) .$$

De façon à étudier les périodes de ces suites et comment celles-ci dépendent des paramètres.
J'utilise 1000 termes dont je n'en présente que 55.

En colonne B : suite $(50;41;17;100)$.
En colonne C : suite $(50;5;17;101)$.
En colonne D : suite $(50;27;51;128)$.
En colonne E : suite $(0;62;84;111)$.
En colonne F : suite $(1;62;84;111)$.
En colonne G : suite $(3;62;84;111)$.
En colonne H : suite $(4;62;84;111)$.
En colonne I : suite $(11;62;84;111)$.
En colonne J : suite $(15;62;84;111)$.
En colonne K : suite $(52;62;84;111)$.

Pour la feuille page 32, je calcule le Khi Deux de quelques suites pseudo aléatoires de longueur 1000 pour en calculer l'écart par rapport à une loi uniforme que les termes de la suite sont censés suivre. Je ne présente que les 50 premiers termes de chaque suite.

En colonne A : suite a du type $(500;241;311;100)$.

En colonne B : suite $b_n = Ent(\frac{a_n}{100})$ constituée par le chiffre des centaines de la suite *a*. On obtient donc une suite pseudo aléatoire de nombres entiers compris entre 0 et 9.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P
2	50	50	50	0	1	3	4	11	15	52	100	0,6711	1000000	0,1249
3	67	65	121	84	35	48	110	100	15	89	106	0,7114	1999991	0,2499
4	64	39	118	75	34	63	22	68	15	52	17	0,114	3999892	0,4999
5	41	10	37	72	83	105	5	82	15	89	21	0,1409	7998884	0,9998
6	98	67	26	108	13	45	61	62	15	52	61	0,4093	7988759	0,9985
7	35	49	113	9	2	99	92	43	15	89	14	0,0939	7887509	0,9859
8	52	60	30	87	97	6	16	86	15	52	140	0,9395	6875009	0,8593
9	49	14	93	39	104	12	77	88	15	89	59	0,3959	4750018	0,5937
10	26	87	2	60	94	51	85	101	15	52	143	0,9597	7500135	0,9375
11	83	48	105	30	29	27	26	19	15	89	89	0,5973	3001269	0,3751
12	20	55	70	57	106	93	31	41	15	52	145	0,9731	6012663	0,7515
13	37	90	21	66	107	78	8	73	15	89	109	0,7315	4126567	0,5158
14	34	63	106	69	58	36	25	59	15	52	47	0,3154	1265625	0,1582
15	11	29	97	33	17	96	80	79	15	89	23	0,1543	4656241	0,582
16	68	61	110	21	28	42	49	98	15	52	81	0,5436	6562365	0,8202
17	5	19	77	54	44	24	14	55	15	89	65	0,4362	1623578	0,2029
18	22	11	82	102	37	18	64	53	15	52	54	0,3624	235762	0,0294
19	19	72	89	81	47	90	56	40	15	89	93	0,6241	2357620	0,2947
20	96	74	22	0	1	3	4	11	15	52	36	0,2416	7576182	0,947
21	53	84	5	84	35	48	110	100	15	89	62	0,4161	3761739	0,4702
22	90	33	58	75	34	63	22	68	15	52	24	0,161	5617354	0,7021
23	7	81	81	72	83	105	5	82	15	89	91	0,6107	173477	0,0216
24	4	18	62	108	13	45	61	62	15	52	16	0,1073	1734770	0,2168
25	81	6	61	9	2	99	92	43	15	89	11	0,0738	1347682	0,1684
26	38	47	34	87	97	6	16	86	15	52	110	0,7382	5476811	0,6846
27	75	50	73	39	104	12	77	88	15	89	57	0,3825	6768056	0,846
28	92	65	102	60	94	51	85	101	15	52	123	0,8255	3680488	0,46
29	89	39	117	30	29	27	26	19	15	89	38	0,255	4804844	0,6006
30	66	10	10	57	106	93	31	41	15	52	82	0,5503	48386	0,006
31	23	67	65	66	107	78	8	73	15	89	75	0,5033	483860	0,0604
32	60	49	14	69	58	36	25	59	15	52	5	0,0335	4838600	0,6048
33	77	60	45	33	17	96	80	79	15	89	50	0,3355	385946	0,0482
34	74	14	114	21	28	42	49	98	15	52	53	0,3557	3859460	0,4824
35	51	87	57	54	44	24	14	55	15	89	83	0,557	6594564	0,8243
36	8	48	54	102	37	18	64	53	15	52	85	0,5704	1945568	0,2431
37	45	55	101	81	47	90	56	40	15	89	105	0,7046	3455662	0,4319
38	62	90	90	0	1	3	4	11	15	52	7	0,0469	2556584	0,3195
39	59	63	49	84	35	48	110	100	15	89	70	0,4697	1565813	0,1957
40	36	29	94	75	34	63	22	68	15	52	104	0,6979	7658121	0,9572
41	93	61	29	72	83	105	5	82	15	89	146	0,9798	4581129	0,5726
42	30	19	66	108	13	45	61	62	15	52	119	0,7986	5811245	0,7264
43	47	11	41	9	2	99	92	43	15	89	147	0,9865	2112387	0,264
44	44	72	6	87	97	6	16	86	15	52	129	0,8657	5123852	0,6404
45	21	74	85	39	104	12	77	88	15	89	98	0,6577	3238466	0,4048
46	78	84	42	60	94	51	85	101	15	52	86	0,5771	384624	0,048
47	15	33	33	30	29	27	26	19	15	89	115	0,7718	3846240	0,4807
48	32	81	46	57	106	93	31	41	15	52	107	0,7181	6462364	0,8077
49	29	18	13	66	107	78	8	73	15	89	27	0,1812	623568	0,0779
50	6	6	18	69	58	36	25	59	15	52	121	0,812	6235680	0,7794

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
500	5	0	100	5000	5	0	106	100	0,36	401235	3	0	115	100	2,25	5	0	90	100	1
811	8	1	100	8111	8	1	100	100	0	409258	3	1	106	100	0,36	0	1	92	100	0,64
762	7	2	100	7622	7	2	105	100	0,25	974721	9	2	87	100	1,69	2	2	114	100	1,96
953	9	3	100	3533	3	3	99	100	0,01	508376	4	3	108	100	0,64	2	3	113	100	1,69
984	9	4	100	5844	5	4	106	100	0,36	566703	5	4	102	100	0,04	9	4	111	100	1,21
455	4	5	100	4555	4	5	96	100	0,16	609030	5	5	105	100	0,25	3	5	93	100	0,49
966	9	6	100	9666	9	6	108	100	0,64	94685	0	6	87	100	1,69	5	6	99	100	0,01
117	1	7	100	1177	1	7	96	100	0,16	580148	5	7	104	100	0,16	3	7	92	100	0,64
508	5	8	100	9088	9	8	92	100	0,64	476171	4	8	76	100	5,76	9	8	94	100	0,36
739	7	9	100	3399	3	9	92	100	0,64	290658	2	9	110	100	1	6	9	102	100	0,04
410	4			4110	4					531513	5					5				
121	1			1221	1		1000	1000	**3,22**	658064	6		1000	1000	**13,8**	9		1000	1000	**8,04**
472	4			4732	4					129639	1					1				
63	0			4643	4					502718	4					8				
494	4			954	0					188053	1					9				
365	3			3665	3					742124	7					8				
276	2			2776	2					575683	5					4				
827	8			8287	8					196634	1					2				
618	6			198	0					112881	1					1				
249	2			8509	8					832328	7					9				
320	3			3220	3					765727	7					2				
431	4			4331	4					420982	4					4				
182	1			1842	1					305997	2					7				
173	1			5753	5					928676	8					1				
4	0			6064	6					699771	6					0				
275	2			2775	2					127186	1					8				
586	5			5886	5					767401	7					0				
537	5			5397	5					1E+06	9					2				
728	7			1308	1					377815	3					6				
759	7			3619	3					363822	3					1				
230	2			2330	2					448517	4					2				
741	7			7441	7					91228	0					4				
892	8			8952	8					848435	8					6				
283	2			6863	6					82314	0					3				
514	5			1174	1					397921	3					0				
185	1			1885	1					206008	1					3				
896	8			8996	8					14479	0					0				
247	2			2507	2					331238	3					7				
838	8			2418	2					615613	5					9				
269	2			8729	8					326932	3					7				
140	1			1440	1					1E+06	9					4				
51	0			551	0					62018	0					3				
602	6			6062	6					53017	0					3				
393	3			7973	7					454000	4					3				
24	0			6284	6					724295	6					0				
95	0			995	0					323230	3					2				
206	2			2106	2					807285	7					7				
957	9			9617	9					587212	5					9				
948	9			3528	3					170915	1					9				

Test de Kolmogorov-Smirnov
appliqué à une suite de 20 réels obtenus avec ALEA.

x(j)=ALEA()	j	j/20	j/20-x(j)	(j-1)/20	x(j)-(j-1)/20
0,0059	1	0,05	0,0441	0	0,0059
0,0291	2	0,1	0,0709	0,05	-0,0209
0,0891	3	0,15	0,0609	0,1	-0,0109
0,1770	4	0,2	0,0230	0,15	0,0270
0,2042	5	0,25	0,0458	0,2	0,0042
0,3273	6	0,3	-0,0273	0,25	0,0773
0,4098	7	0,35	-0,0598	0,3	0,1098
0,4167	8	0,4	-0,0167	0,35	0,0667
0,4404	9	0,45	0,0096	0,4	0,0404
0,4707	10	0,5	0,0293	0,45	0,0207
0,4798	11	0,55	0,0702	0,5	-0,0202
0,5225	12	0,6	0,0775	0,55	-0,0275
0,6001	13	0,65	0,0499	0,6	0,0001
0,7872	14	0,7	-0,0872	0,65	0,1372
0,8316	15	0,75	-0,0816	0,7	0,1316
0,8457	16	0,8	-0,0457	0,75	0,0957
0,8573	17	0,85	-0,0073	0,8	0,0573
0,8719	18	0,9	0,0281	0,85	0,0219
0,8835	19	0,95	0,0665	0,9	-0,0165
0,9142	20	1	0,0858	0,95	-0,0358

max(j/20-x(j)) =	0,0858	max(x(j)-(j-1)/20)=	0,1372
racine(n)*max(j/20-x(j))=	0,3837	racine(n)*max(x(j)-(j-1)/20) =	0,6135

PARTIE II

Des fonctions pour les SES

Fonctions associées, mathématiques, économie et …. TPE

Jean-Marie THOMASSIN, lycée Carnot, Dijon

On trouvera, en annexes, des graphiques illustrant les activités proposées.

1. Introduction

Lors de la création de la série ES, les rédacteurs des nouveaux programmes de mathématiques ont voulu mettre l'accent, en classe de première, sur les fonctions dites "associées" (à une fonction f donnée). Dans la continuité du programme de la classe de seconde, il s'agissait de disposer d'un outil simple à mettre en œuvre, disponible dès le début de l'année scolaire, permettant d'étudier et de construire rapidement certaines fonctions. Cet outil est d'autant plus convaincant qu'il est associé à une manipulation graphique facilement reproductible. L'objet principal de l'activité n'était plus alors l'étude d'une fonction mais son utilisation dans le contexte de la modélisation d'une situation économique simple. On a souhaité pouvoir utiliser efficacement l'outil fonctionnel, dès le début de l'année scolaire, sans attendre que la notion de dérivée soit introduite et maîtrisée par les élèves de la classe de 1ère économique. En outre, certains professeurs chargés d'un enseignement post-bac ont fait remarquer que l'usage systématique de la dérivée par les élèves est parfois regrettable et maladroit. Est-il indispensable de recourir à la dérivation pour connaître le sens de variation de la fonction ln(x+1)? Comment faire lorsque l'on ne connaît pas une expression algébrique simple de la fonction à étudier ou, comme cela est souvent le cas en économie, lorsque la fonction à étudier découle d'une fonction précédemment construite ou dont, éventuellement, on ne connaît que certaines propriétés ou que la représentation graphique? Il s'agissait donc de présenter aux élèves plusieurs outils afin que chacun puisse, à chaque instant, utiliser celui qui est le plus approprié ou le plus efficace.

En classe de seconde, on a étudié la fonction x^2 puis certaines fonctions du type x^2+k, voire $(x+k)^2$, k étant une constante réelle. En première, il s'agit, tout en faisant manipuler les élèves, de généraliser ces deux situations en dégageant des théorèmes sur les fonctions et les outils géométriques associés. Dans un deuxième temps, la composition des fonctions apparaît alors comme une généralisation de ce qui a été fait.

Dans les paragraphes qui suivent, quelques exemples de situations de ces deux types de fonctions associées seront présentés. La liste n'est naturellement pas exhaustive et on proposera quelques pistes pour en construire d'autres.

Dans toute la suite, f désigne une fonction de la variable réelle x et k est une constante réelle. Le repère sera naturellement xOy, c'est à dire (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

2. Fonctions du type f(x)+k

Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, la fonction qui, à tout réel x de l'ensemble de définition de f, associe le nombre f(x)+k, c'est-à-dire $x \to f(x)+k$*, sera en général notée f(x)+k. On n'omettra pas d'attirer périodiquement l'attention des élèves sur la différence qu'il faut conserver à l'esprit entre une fonction et l'image du nombre x.*

2.1. La découverte par les élèves

Après l'étude de quelques fonctions simples (x^2, $\sqrt{x}$, sin(x)), on fait découvrir et construire des fonctions du type x^2+3, $x^2-0,8$, $\sqrt{x}+1,2$ … etc. On utilisera tous les outils à notre disposition :

- Construction d'un tableau de valeurs ;
- Construction de la courbe point par point (sur un graphique où la fonction élémentaire associée a déjà été construite) ;
- Utilisation d'un tableur (regroupant dans un même tableau les valeurs de la fonction élémentaire choisie et celles des fonctions associées à construire) et éventuellement du grapheur associé ; on peut par ce biais avoir une première approche de suites construites par récurrence.
- Utilisation d'une calculatrice à écran graphique ;
- Utilisation d'un logiciel de construction de courbes ;
- Utilisation d'un logiciel de géométrie plane ;
- Utilisation du rétroprojecteur
- Utilisation d'un vidéo projecteur…

Beaucoup d'élèves découvrent rapidement les calculs "inutiles" et qu'il "suffit d'ajouter k à toutes les ordonnées". On peut alors dégager les résultats essentiels :

- Le procédé de construction graphique ;
- L'outil géométrique utilisé : la translation de vecteur k $\vec{j}$;
- Les fonctions f et $x \to f(x)+k$ varient dans le même sens ;
- Le "transport" ou la "conservation" d'éventuelles propriétés géométriques de représentations graphiques.

<u>Remarques :</u>

L'utilisation d'un rétro projecteur permet de faire apparaître de manière vivante et "évidente" la translation ("glissement") d'une courbe vers l'autre, d'un transparent sur un autre.

La fonction $\frac{1}{x}$ et sa représentation graphique ont été étudiées en classe de seconde ; en considérant des fonctions du type $\frac{1}{x}+k$, on peut avoir une première approche graphique des asymptotes parallèles à (Ox) et des limites finies à l'infini.

2.2. Quelques exemples de situations utilisant une fonction du type f(x)+k

<u>Principe :</u>

On suppose connue et étudiée précédemment une fonction f modélisant une situation donnée. On veut étudier une "légère" modification de la situation se traduisant par le remplacement dans le modèle choisi de la fonction f par la fonction f(x)+k, toutes choses égales par ailleurs. On ne souhaite pas faire une nouvelle étude complète de fonction et on veut rapidement connaître l'évolution des paramètres étudiés, éventuellement pour plusieurs valeurs différentes de k ; dans certains cas, on admet une approche graphique de la nouvelle situation.

<u>2.2.1 Autour de l'offre et de la demande</u>

a. La vente des huîtres

Sur la côte atlantique, les producteurs d'huîtres sont nombreux et répartis sur tout le littoral. Périodiquement, la vente des huîtres produites sur une zone géographiquement limitée est interdite pour cause sanitaire. Cette interdiction locale entraîne, en général, un manque de confiance de certains consommateurs et donc une baisse générale de la demande, quelle que soit la zone de production. (Un problème analogue est rencontré à chaque marée noire…).

La consommation dépend en général du prix de vente. On note D(x) la quantité d'huîtres, en kg, que la population du pays étudié souhaite acheter un certain jour (c'est à dire la demande) si le prix de vente au kg est de x€ et O(x) la quantité d'huîtres, en kg, que les poissonniers sont disposés à vendre si le prix de vente au kg est de x€. Ce produit n'étant pas de première nécessité, le consommateur peut éventuellement se priver d'un plat d'huîtres trop cher et les vendeurs peuvent stocker une partie des huîtres à vendre si le prix de vente est jugé insuffisant.

Dans le modèle économique décrivant les lois de l'offre et de la demande, on admet qu'un équilibre s'établit quasi instantanément entre l'offre et la demande et que toutes les transactions se réalisent au prix ainsi déterminé. Le prix d'équilibre est la solution x_e de l'équation :

$$O(x)=D(x)$$

Le nombre $q_e = O(x_e)$ est la quantité d'équilibre. A ce prix d'équilibre tous les acheteurs, qui veulent acheter, achètent et tous les vendeurs qui veulent vendre, vendent. Tous les acteurs du marché sont donc satisfaits. Prix et quantité d'équilibre peuvent se déterminer algébriquement ou graphiquement. (Voir figure 1 en annexe).

Pour revenir à nos huîtres, il existe donc une catégorie de consommateurs qui, après l'annonce de l'interdiction locale de vente, quel que soit le prix proposé, n'achèteront plus leur ration d'huîtres. On note k la quantité d'huîtres (en kg) achetée (quel que soit le prix de vente unitaire) par cette catégorie de consommateurs avant l'annonce de l'évènement. Lorsque l'information est diffusée, même si elle ne concerne pas la zone de production des huîtres proposées à la vente, ils ont abandonné cet achat et se sont retournés vers un autre plat. La demande d'huîtres a donc baissé, quel que soit le prix de vente, de k kilos, elle est donc devenue D(x)-k. La nouvelle fonction de demande est l'image de la précédente par la translation de vecteur $-k\vec{j}$; la fonction d'offre est inchangée. On constate graphiquement une baisse du prix d'équilibre et de la quantité d'équilibre. (Cette baisse a été réellement constatée après chaque annonce d'une interdiction de vente localement réduite ou d'un risque de marée noire). Avec l'outil graphique (et éventuellement un transparent et un rétroprojecteur), on peut étudier le cas de diverses valeurs de k.

b. Retour à l'équilibre précédent

Il est facile de faire apparaître avec les élèves une façon de revenir à la situation d'équilibre installée avant l'événement funeste : il faut utiliser la translation de vecteur $k\vec{j}$ et donc augmenter la nouvelle demande de k kilos quel que soit le prix de vente. Il suffit, par exemple, que le gouvernement décide de procéder, quel que soit le prix de vente unitaire, à des achats d'huîtres, pour une quantité équivalente de k kilos. (Pour consommation immédiate, conservation en vue d'une consommation ultérieure ou … destruction).

On découvre ainsi une manière élémentaire d'influer sur l'offre et la demande et donc sur les cours et prix de vente.

c. Le marché des oeufs

En 2008, le 14 juillet est un lundi. Dans son édition du samedi 19 juillet 2008, le quotidien "Le Télégramme", analyse le marché français des œufs pour la semaine qui vient de s'écouler. Il constate une baisse de la demande qu'il estime due au fait que, ce lundi étant jour férié, ni les détaillants, ni les intermédiaires n'ont travaillé ; il constate donc une baisse de la demande équivalente à une journée de consommation et, sur la période étudiée, une baisse du prix.

d. Généralisation

On note encore O(x) et D(x) l'offre et la demande pour un certain produit en fonction du prix de vente unitaire x. C'est à dire :

O(x)= la quantité que les vendeurs souhaitent vendre si le prix unitaire est x.

D(x)= la quantité que les acheteurs souhaitent acheter si le prix unitaire est x.

Pour des raisons évidentes, l'offre est, en général, une fonction croissante du prix de vente unitaire. De même, la demande est, en général, une fonction décroissante du prix de vente (sauf cas particuliers : manque de confiance dans la qualité d'un produit ayant un prix trop faible, cas des produits de luxe où le prix payé est un signe extérieur de richesse, …).

On dispose de 4 manières élémentaires pour faire varier l'offre et la demande et donc la quantité et le prix d'équilibre :

- Achat, quel que soit le prix unitaire, par le gouvernement ou un organisme attitré, de k unités : la demande devient D(x)+k, on utilise la translation de vecteur k$\vec{j}$, quantité et prix d'équilibre augmentent. Les producteurs (ou les revendeurs…) sont contents : ils vendent plus et plus cher. L'exemple type est le stockage par la CEE, dans des congélateurs, pour soutenir les cours, de viande ou de beurre.
- Vente, quel que soit le prix unitaire, par le gouvernement ou un organisme attitré, de k unités : l'offre devient O(x)+k, on utilise la translation de vecteur k$\vec{j}$, le prix d'équilibre baisse, la quantité achetée augmente. Les acheteurs sont contents. L'exemple type est le déstockage par la CEE, de viande ou de beurre (opération "beurre de Noël" : pendant plusieurs années consécutives, la mise sur le marché en décembre d'une grande quantité de beurre a fait baisser les cours en période de Noël).
- Diminution, quel que soit le prix unitaire, des quantités habituellement achetées par le gouvernement ou un organisme attitré, de k unités : la demande devient D(x)-k, on utilise la translation de vecteur –k$\vec{j}$, quantité et prix d'équilibre baissent. Les acheteurs paient moins chers et sont contents. Les producteurs (ou les revendeurs…) sont mécontents sauf en cas de production insuffisante. On peut citer par exemple l'influence de l'annonce de l'achat non réalisé d'une quantité d'avions par l'armée ou de véhicules automobiles par un grand organisme d'état ou d'actions par un groupe financier….
- Diminution, quel que soit le prix de vente, de la quantité mise sur le marché par les producteurs de k unités : l'offre devient O(x)-k, on utilise la translation de vecteur –k$\vec{j}$, la quantité d'équilibre baisse, le prix d'équilibre augmente. Les vendeurs vendent moins et plus chers en organisant une certaine pénurie; ils sont contents.

Les procédés décrits précédemment sont souvent utilisés en bourse, par exemple lorsqu'un organisme financier décide de consacrer d'importants capitaux à la spéculation ou lorsqu'une banque centrale souhaite défendre une monnaie ; on peut aussi spéculer de cette manière sur l'or, le blé ou le pétrole (par exemple lorsque les pays producteurs décident d'augmenter ou de diminuer leur production journalière ou lorsqu'un pays fortement industrialisé décide d'augmenter ou de diminuer ses réserves "stratégiques" ; les conséquences sur la demande de fuel d'un hiver rigoureux ou d'un hiver doux peuvent se modéliser de manière analogue), pour ne citer que quelques exemples parmi d'autres. (Voir figures 2, 3, 4, 5 en annexe).

e. Remarques

Etant données une fonction d'offre et une fonction de demande pour un produit donné, on peut imaginer une activité où, après avoir déterminé le prix et la quantité d'équilibre (lorsque ces nombres existent), de manière analytique ou graphique, en ajoutant comme au d un nombre k à la fonction d'offre ou à la fonction de demande, on étudie l'évolution du prix d'équilibre et de la quantité d'équilibre en fonction des choix faits.

Réciproquement on peut se fixer a priori un objectif à atteindre (prix de vente ou quantité à échanger) et déterminer le moyen à mettre à en œuvre pour l'atteindre.

Naturellement, les fonctions d'offres et de demandes ne sont pas invariables dans le temps. Par exemple, les courbes décrivant l'offre et la demande d'un fruit ou d'un légume dépendent de la saison, du temps qu'il fait, de certaines humeurs ou décisions politiques….. Etant données deux courbes d'offres (ou deux courbes de demande), établies pour un même produit, mais à des dates différentes, on peut se demander s'il existe une relation simple (du type décrit dans ce paragraphe) liant l'une à l'autre et ensuite tenter de l'interpréter.

On voit donc que, avec cet outil simple, il y a une riche mine d'activités de modélisation mettant en jeu différents outils mathématiques.

f. Lien avec un TPE

En série ES, un des thèmes des TPE est "les entreprises et leurs stratégies territoriales". Pendant l'année scolaire 2000-2001, plusieurs élèves ont choisi d'étudier l'influence d'une tempête sur la vie d'une entreprise dont l'activité principale était la production (et la vente) d'un produit destiné aux toitures. Les élèves disposaient du chiffre d'affaire mensuel de l'entreprise sur plusieurs années et ont mis en évidence :

- Le caractère saisonnier de l'activité ;
- Une hausse très nette des ventes après la tempête ;
- Une hausse du chiffre d'affaires, en pourcentage, plus importante que la hausse, en pourcentage, du volume des ventes ;
- Un léger décalage entre la date de la tempête et le début de la hausse des ventes.

Le TPE contenait en outre l'affirmation : "les clients ont été obligés d'acheter le matériel nécessaire à la réfection de leurs toitures quel que soit le prix de vente pratiqué ; les clients, dans l'urgence de la situation, n'ont pas cherché à faire jouer la concurrence (ou n'ont pas pu le faire…), la demande a donc augmenté quel que soit le prix de vente. L'offre a peu augmenté, on a "produit un peu plus et vendu les stocks". On peut donc ici s'attendre à une situation typique d'une fonction du type $g(x)=f(x)+k$. Il faut donc comparer les ventes avant et après la tempête, par exemple pendant une période de 12 mois. On prend pour f la fonction donnant le volume mensuel des ventes pendant les 12 mois précédents la tempête et pour g la fonction donnant le volume mensuel des ventes pendant les 12 mois suivants la tempête et on cherche à déterminer si k existe graphiquement et par le calcul. Dans la définition des fonctions f et g, on peut tenir compte du décalage constaté entre la date de la tempête et le début de la hausse des ventes. Pour tenir compte du caractère habituellement saisonnier des ventes, on peut remplacer la donnée "volume du mois n" par la donnée "volume des 12 derniers mois précédant le mois n inclus". On peut aussi utiliser des moyennes mobiles débouchant sur une utilisation du barycentre. L'utilisation d'un tableur facilitera grandement les comparaisons précédentes et permettra de mieux déterminer quels sont les choix les plus pertinents. On peut aussi faire une étude analogue en considérant le chiffre d'affaires et se demander pourquoi le chiffre d'affaires augmente plus vite que le volume des ventes (augmentation des prix unitaires ou l'obligation faite à l'acheteur de choisir un produit dans une gamme de prix plus élevée qu'à son habitude?).

2.2.2. Avec une fonction Coût total

a. La fonction Coût total

Les fonctions Coûts ont été présentées de manière détaillée dans la brochure "modèles mathématiques pour les sciences économiques et sociales" publiée en 1998 par l'IREM de DIJON. Il ne s'agit donc pas ici de reprendre ce qui a déjà été publié mais de présenter un aspect de ces fonctions utilisant l'outil présenté dans ce chapitre. Rappelons simplement qu'un entrepreneur prévoyant doit pouvoir, avant de lancer la production d'un objet, estimer ce que cette production va lui coûter. Si x est la quantité que l'industriel souhaite produire, on note C(x) le coût total nécessaire pour produire l'ensemble de ces x objets. La variable x est souvent entière dans les premiers exercices abordés mais devient très vite réelle, on passe vite du discret au continu :

- Une production limitée à 4 ou 5 objets semble en général peu réaliste (sauf s'il s'agit d'objets de très grande valeur) ;
- Lorsque les quantités deviennent très grandes, on choisit pour unité, par exemple le millier d'objets ; l'objet n'est plus alors représenté que par une décimale…
- La variable continue devient évidente lorsqu'on étudie la production de fil de fer, de café, de purée ou de ciment en vrac.
- La dérivation est un outil de modélisation irremplaçable, en particulier pour le passage du discret au continu (par exemple pour modéliser le coût marginal)…

Les fonctions Coûts sont, en général, modélisées par des fonctions continues et dérivables. On propose souvent, en économie, pour illustrer des modèles, des fonctions polynomiales simples, de degré "raisonnable". Les fonctions "puissances" (d'exposant pas toujours entier) et les fonctions exponentielles, souvent utilisées, ne pourront être abordées qu'en classe terminale. Il suffit alors de quelques valeurs pour les déterminer. On peut aussi les construire à partir d'activités statistiques. En économie, on raisonne aussi souvent sur des graphiques, même pour chercher un nombre dérivé (lu comme la pente d'une certaine droite…).

Plus on produit, plus il faut de matière première et plus il faut travailler ; ainsi la fonction de coût total C(x) est, en général, une fonction croissante de x, mais il existe quelques contre-exemples. On présentera plus loin une cause d'un tel état de fait.

On se limite aux valeurs positives de x et le nombre C(0), coût pour une production nulle, représentera les charges fixes.

Si, naturellement, il est intéressant pour l'industriel, de savoir ce que va lui coûter sont entreprise, il sera encore plus motivé s'il sait comment faire du bénéfice et ce que cela va lui rapporter. Les problèmes sur les fonctions coûts comporteront en général une phase d'optimisation et / ou de détermination de la zone de rentabilité. On étudiera les évolutions des solutions déterminées lorsque le contexte varie. (Voir figure 10 en annexe).

b. Coût variable et charges fixes

On décompose souvent le Coût total en deux parties :

- Les charges fixes C(0).
- Le Coût variable, $C_v(x)$ fonction de la quantité produite, nul lorsque la production est nulle.

On a alors l'égalité : $C=C_v+C(0)$.

La représentation graphique de la fonction coût total C est l'image de la représentation graphique de C_v par la translation de vecteur $C(0)\vec{j}$.

c. Effet d'une taxe

Parmi les divers prélèvements que chacun subit, figurent en bonne place les taxes fixes dont le montant est indépendant du contexte. Parmi les plus connues, on peut citer la taxe foncière, une taxe d'habitation (en raison, par exemple, de la présence d'un gardien de l'usine), divers abonnements indépendants de la consommation (eau, gaz, électricité, …), quelques péages, des taxes liées à la pollution, aux ordures, à l'air, à la sécurité … etc. L'imagination de leurs créateurs est débordante.

En général, on intègre les taxes dans le calcul des charges.

Par exemple, un industriel a estimé à C(x) milliers d'euros le coût nécessaire à la production de x centaines de casseroles. La commune décide de le soumettre à un droit d'usage des routes communales de 12 524€. Il voit donc sa fonction Coût total devenir C(x)+12,524. La représentation graphique de cette nouvelle fonction est l'image de la précédente par la translation de vecteur $12{,}524\,\vec{j}$, il verra alors sa zone de rentabilité et le bénéfice attendu diminuer.

Plus généralement, une nouvelle taxe de k unités de compte fait passer le Coût total de C(x) à C(x)+k. On utilisera alors la translation de vecteur $k\vec{j}$, on verra alors la zone de rentabilité et le bénéfice attendu diminuer (k>0). On pourra remarquer avec les élèves que les deux fonctions varient dans le même sens.

Réciproquement, la suppression d'une taxe existante de k unités de compte fait passer le Coût total de C(x) à C(x)-k. On utilisera alors la translation de vecteur $-k\vec{j}$, on verra alors la zone de rentabilité et le bénéfice attendu augmenter (k>0). Même remarque sur le sens de variation.

d. Effet d'une prime fixe

Pour faciliter la création d'une entreprise ou d'un commerce, on a souvent recours à l'attribution d'une prime ayant pour objectif de faire diminuer les charges. Ces primes peuvent être en numéraire ou en nature (exemples prêt de locaux dans le cadre d'une usine relais, dégrèvement sur les taxes foncières, abonnements gratuits à l'eau, au réseau d'égouts, …) ; dans tous les cas, on peut en estimer une valeur chiffrée. Les primes sont versées même s'il n'y a pas de production effective…

En général, on intègre les primes dans le calcul du Coût total.

Par exemple, un industriel a estimé à C(x) milliers d'euros le coût nécessaire à la production de x centaines de casseroles. La commune décide de lui accorder une remise sur les taxes foncières de 12 420€. Il voit donc sa fonction Coût total devenir C(x)-12,42. La représentation graphique de cette nouvelle fonction est l'image de la précédente par la translation de vecteur -12,42 $\vec{j}$, il verra alors sa zone de rentabilité et le bénéfice attendu augmenter.

Plus généralement, une nouvelle prime de k unités de compte fait passer le Coût total de C(x) à C(x)-k. On utilisera alors la translation de vecteur -k $\vec{j}$, on verra alors la zone de rentabilité et le bénéfice attendu augmenter (k>0). On pourra remarquer avec les élèves que les deux fonctions varient dans le même sens. Si la prime est élevée, on peut faire apparaître une situation où les charges fixes disparaissent et même où, C(0) étant négatif, l'industriel est payé à ne rien faire….

Malheureusement pour l'entreprise, ces primes ne durent en général qu'un temps. La suppression d'une prime existante de k unités de compte fait passer le Coût total de C(x) à C(x)+k. On utilisera alors la translation de vecteur k $\vec{j}$, on verra alors la zone de rentabilité et le bénéfice attendu diminuer (k>0). Même remarque sur le sens de variation.

e. Lien avec les TPE

Les taxes et primes décrites ci-dessus font partie de la vie des entreprises et de leurs stratégies. Elles sont un élément important dans le choix d'un lieu d'implantation. Les activités qui viennent d'être décrites peuvent donc facilement s'intégrer dans un TPE dont le thème est "les entreprises et leurs stratégies territoriales".

2.2.3. Avec un Coût moyen

a. Le Coût moyen

Il s'agit naturellement du Coût moyen par unité produite. Une des stratégies possibles pour l'entreprise est de minimiser ce Coût moyen. Pour une production totale de x unités (x>0), il s'écrit :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

En faisant intervenir le prix de vente unitaire, on peut facilement déterminer graphiquement, par exemple, la zone de rentabilité.

On n'abordera pas ici les problèmes liés au minimum du Coût moyen ou à la réalisation d'un Coût moyen réalisant certaines contraintes, sources de nombreux problèmes de mathématiques. On va se limiter à l'influence des primes et des taxes.

b. Primes et taxes fixes

Leur incidence est inversement proportionnelle à la quantité produite, ce qui introduit une fonction homographique. Le choix du Coût moyen n'est pas judicieux, il faut se limiter à ce qui a déjà été traité précédemment.

c. Prime par unité produite

Son but n'est plus seulement d'attirer une entreprise par une promesse de diminution de ses charges mais aussi de l'inciter à produire car la prime est proportionnelle à la quantité produite. La prime vient en déduction des charges de l'entreprise. En conservant les mêmes notations que précédemment, si l'entreprise bénéficie d'une prime de k unités de compte par unité produite, alors :

- La fonction de Coût total devient : C(x)–kx
- La fonction de Coût moyen devient : $C_m(x)$–k.

La représentation graphique de la nouvelle fonction de Coût moyen est l'image de la fonction C par la translation de vecteur $-k\vec{j}$. Les deux fonctions ont le même sens de variation. En faisant intervenir le prix de vente unitaire (et une parallèle à l'axe des abscisses), on constate graphiquement que la zone de rentabilité augmente. On peut imaginer une activité où le but serait de déterminer k pour atteindre un objectif fixé a priori.

On peut remarquer que la nouvelle fonction Coût total est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Elle peut ne plus être monotone ; il peut être judicieux d'en faire construire une point par point. On peut aboutir à certaines situations où produire plus coûte globalement moins cher !!

Réciproquement, on peut étudier l'influence de la suppression d'une prime.

d. Taxes par unité produite

L'industriel est installé et les instances locales estiment que sa production va engendrer diverses nuisances proportionnelles à la quantité produite. En outre il semble normal qu'il apporte son obole aux finances locales. On lui impose donc une taxe de k unités de compte par unité produite, alors :

- La fonction de Coût total devient : $C(x)+kx$
- La fonction de Coût moyen devient : $C_m(x)+k$.

La représentation graphique de la nouvelle fonction de Coût moyen est l'image de la fonction C par la translation de vecteur $k\vec{j}$. Les deux fonctions ont le même sens de variation. En faisant intervenir le prix de vente unitaire (et une parallèle à l'axe des abscisses), on constate graphiquement que la zone de rentabilité diminue. On peut imaginer une activité où le but serait de déterminer k pour atteindre un objectif fixé a priori.

On peut remarquer que la nouvelle fonction Coût total est la somme de deux fonctions croissantes. Elle est donc croissante ; il peut être judicieux d'en faire construire une point par point.

Réciproquement, on peut étudier l'influence de la suppression d'une taxe.

2.2.4 Recette et bénéfice

En général, le prix de vente est p, fixe, indépendant de la quantité achetée et de la tête du client. La recette R est donc :

$$R(x)=px$$

Il s'agit donc d'une fonction linéaire bien connue et facile à représenter graphiquement.

La fonction bénéfice total B est donc :

$$B(x)= R(x) - C(x).$$

Il peut être judicieux de la faire construire graphiquement, point par point et d'en découvrir le sens de variation.

La fonction bénéfice moyen par unité produite est :

$$B_m(x)= p - C_m(x).$$

On pourra étudier l'influence des primes et taxes déjà décrites sur ces fonctions.

De nombreux problèmes ont pour objectif de déterminer comment réaliser le maximum de bénéfice ou, plus modestement, de "faire du bénéfice". Il y a de nombreuses façons de les traiter en considérant soit les fonctions "totales", soit les fonctions "moyennes".

Il peut être intéressant, avec les élèves, de construire graphiquement la fonction B_m à partir de la fonction C_m : on utilise une symétrie axiale suivie d'une translation et on ne peut pas permuter les opérations.

2.3. Avec une fonction de production

2.3.1 La fonction de production totale

Il s'agit de la fonction réciproque de la fonction Coût total. Etant donné une somme x, quelle quantité totale P(x) puis-je produire et vendre si mon investissement total est cette somme x ? En mathématiques, pour représenter la fonction P à partir de C, on utilisera une symétrie axiale ; en économie, une pratique courante est d'utiliser le même graphique en procédant à une lecture inverse : l'axe (Oy) du mathématicien devient le nouvel axe des abscisses. Comme C, P est en général une fonction croissante. Elle figure beaucoup moins dans les exercices mathématiques.

2.3.2 Un exemple de translation

Souvent, pour démarrer une production, il faut faire quelques essais et réglages. Ainsi les k premiers objets produits sont invendables. En tenant compte de cette information, la fonction de production devient P(x) – k. On utilisera donc la translation de vecteur $-k\vec{j}$.

2.3.3 Remarque

On peut aussi définir une production moyenne par unité de compte investie P_m.

3. Fonctions du type f(x+k)

Afin de faciliter la lecture de ce qui suit, la fonction qui, à tout réel x de l'ensemble de définition convenable, associe le nombre f(x+k), sera en général notée f(x+k).

3.1. La découverte par les élèves

A partir de l'étude déjà faite de quelques fonctions simples (x^2, $\sqrt{x}$, sin(x)), on fait découvrir et construire des fonctions du type $(x+1{,}2)^2$, $(x-0{,}8)^2$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x-1{,}3}$, … etc. Comme au 2, on utilisera tous les outils à notre disposition :

- Construction d'un tableau de valeurs ;
- Construction de la courbe point par point (sur un graphique où la fonction élémentaire associée a déjà été construite) ;
- Utilisation d'un tableur (regroupant dans un même tableau les valeurs de la fonction élémentaire choisie et celles des fonctions associées à construire) et éventuellement du grapheur associé ; on peut par ce biais avoir une première approche de suites construites par récurrence.
- Utilisation d'une calculatrice à écran graphique ;
- Utilisation d'un logiciel de construction de courbes ;
- Utilisation d'un logiciel de géométrie plane ;
- Utilisation du rétroprojecteur
- Utilisation d'un vidéo-projecteur…

Beaucoup d'élèves découvrent rapidement les calculs "inutiles". Un schéma graphique illustrant le procédé à mettre en œuvre est fort utile. On peut alors dégager les résultats essentiels :

- Le procédé de construction graphique ;
- L'outil géométrique utilisé : la translation de vecteur $-k\vec{i}$;
- Le "transport" ou la "conservation" d'éventuelles propriétés géométriques de représentations graphiques.

Remarques :

L'utilisation d'un rétroprojecteur permet de faire apparaître de manière vivante et "évidente" la translation ("glissement") d'une courbe vers l'autre, d'un transparent sur un autre.

La fonction $\frac{1}{x}$ et sa représentation graphique ont été étudiées en classe de seconde ; en considérant des fonctions du type $\frac{1}{x+k}$, on peut avoir une première approche graphique des asymptotes parallèles à (Oy) et des limites infinies à distance finie.

On a ici une première approche de la composée de deux fonctions.

On mettra facilement en évidence que l'ordre des opérations est important.

On peut aborder le problème du sens de variation.

Dans ce qui suit, on va aborder quelques exemples d'utilisations de fonctions du type f(x+k).

Principe :

On suppose connue et étudiée précédemment une fonction f modélisant une situation donnée. On veut étudier une "légère" modification de la situation se traduisant par le remplacement dans le modèle choisi de la fonction f par la fonction f(x+k), toutes choses égales par ailleurs. On ne souhaite pas faire une nouvelle étude complète de fonction et on veut rapidement connaître l'évolution des paramètres étudiés, éventuellement pour plusieurs valeurs différentes de k ; dans certains cas, on admet une approche graphique de la nouvelle situation.

3.2. Exemples classiques

3.2.1 En mathématiques :

Rappelons, pour mémoire, des types d'exemples déjà cités :

$(x+3)^2$, $\sqrt{x-2}$, ln(x+2,3), 1/(x-4,2), sin(x+2), ….

La translation est ici l'outil le plus performant.

3.2.2 En sciences physiques :

Tous les phénomènes de déphasage, en particulier dans l'étude des courants électriques alternatifs ou dans les transmissions du son et des ondes.

3.2.3 Pour avoir du son :

Nombreux sont les élèves ayant déjà eu l'occasion de remarquer que deux observateurs séparés par une certaine distance n'entendent pas les sons au même instant. On peut penser à l'observateur un peu éloigné qui regarde une personne fermer brutalement une portière : il voit la portière se fermer puis, avec un certain décalage, il entend la porte se fermer ; le son qu'il entend est donc "en retard" par rapport à celui perçu par la personne qui ferme la porte.

S — Sens de déplacement du son

Source sonore — A ⟶ B

On peut modéliser le signal sonore émis en S par une fonction.

Alfred est en A et Bernard est installé au point B. Chaque observateur reçoit, à chaque instant, un signal sonore. On suppose qu'il ne diminue pas d'intensité entre les deux lieux d'observation. On choisit la seconde pour unité des temps. L'origine des temps sera le début de l'observation simultanée faite par Alfred et Bernard. On définit donc deux fonctions f et g représentant les signaux perçus par les deux observateurs :

f(x)= le signal sonore perçu à l'instant x par Alfred

g(x)= le signal sonore perçu à l'instant x par Bernard

On note k le temps, en secondes, mis par le son perçu par Alfred pour atteindre Bernard. On a alors les égalités :

$$f(x)= g(x+k)$$

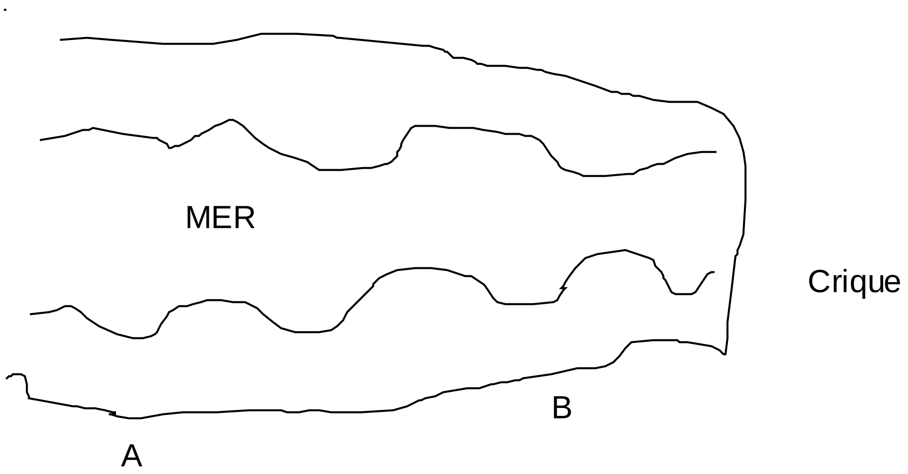
Ce qu'entend Alfred est ce qu'entendra Bernard dans k secondes, c'est à dire à l'instant x+k. Alfred est en avance de k secondes sur Bernard.

$$g(x)= f(x-k)$$

Ce qu'entend Bernard est ce qu'a entendu Alfred k secondes avant, c'est à dire à l'instant x-k. Bernard est en retard de k secondes sur Alfred.

3.2.4 Au bord de la Manche ou de l'Atlantique :

La façade ouest de la France est soumise au phénomène des marées. L'amplitude des marées étant important, ce phénomène conditionne la navigation maritime et la vie en bord de côte. Pour naviguer, il faut un minimum de hauteur d'eau ; certains lieux, certains ports ne sont donc accessibles qu'à certaines heures, lorsque la mer est suffisamment haute, les horaires d'accès dépendent donc des marées. Ces heures sont donc à connaître avec précision. Or l'intervalle entre deux marées hautes dépasse 12 heures ; les horaires des marées hautes sont donc variables. Leur importance est tel qu'un service spécialisé les calcule et les diffuse. Un niveau zéro ayant été défini, on calcule aussi la hauteur de la mer à chaque instant. Compte tenu de la géographie, la mer n'est pas haute à la même heure en tous les points de la côte ; il y a un certain décalage horaire. (Par exemple entre Brest, Paimpol, La Rochelle, Bordeaux ou Rochefort) ; ce décalage peut être amplifié si l'un des ports se situe au fond d'un estuaire.



A et B sont deux ports maritimes soumis aux marées venant du large, donc de A vers B. Puisqu'il y a marées, la hauteur de la mer, à chaque instant, évolue (augmente à marée montante, diminue à marée descendante ; les règles de calcul sont connues). Pour chaque port, on peut déterminer, à chaque instant, la hauteur de la mer. On choisit, par exemple, le mètre et l'heure pour unités. On définit donc deux fonctions f et g représentant les hauteurs mesurées pour les deux ports :

f(x)= la hauteur de la mer à l'instant x en A

g(x)= la hauteur de la mer à l'instant x en B

On note k le temps, en heures, mis par la marée qui passe en A pour atteindre B. On a alors les égalités :

$$f(x)= g(x+k)$$

Ce qui est en A est ce qui sera en B dans k, c'est à dire à l'instant x+k.

$$g(x)= f(x-k)$$

Ce qui est en B est ce qui a été en A k heures avant, c'est à dire à l'instant x-k.

Exemples : horaire de la marée haute du matin le samedi 19 juillet 2008

La Rochelle	6h16	Rochefort	6h36	Marennes	6h13
Royan	6h38	Saint-Malo	8h49	Paimpol	8h40
Perros-Guirec	8h05	Brest	6h34	L'aberwrach	7h07

Sur le même modèle, on peut étudier le phénomène appelé mascaret où l'on voit une vague remonter un estuaire.

3.2.5 Anecdote téléphonique

J'ai passé un appel téléphonique depuis la région dijonnaise vers Nancy ; c'était un soir et, simultanément, j'écoutais des informations télévisées. Mon correspondant en faisait de même : il écoutait les mêmes informations, sur la même chaîne et je pouvais donc entendre, dans mon écouteur ce que sa télévision diffusait ; j'ai pu constater un très net décalage entre les paroles du speaker causant dans mon poste et les phrases de la même personne me parvenant par l'appareil téléphonique : c'était la même chose, mais avec un certain retard.

3.3. Autour de l'offre et de la demande

3.3.1 Les primes Balladur et Juppé

Il était une fois (et même deux fois), un certain ministre qui avait deux objectifs :

- Faire augmenter le nombre de voitures neuves vendues ;
- Augmenter la sécurité routière en retirant de la circulation les voitures les plus anciennes et donc les plus dangereuses.

Une prime à l'achat a donc été instaurée : tout acheteur d'une voiture neuve remettant au vendeur sa vieille voiture à destination de la casse bénéficiait d'une prime d'état de 5000F, ce qui diminuait d'autant le prix qu'il avait à payer. On reprend les mêmes notations pour les fonctions d'offre et de demande, pour les prix, l'unité sera le millier de francs. Pour simplifier, on ne considère qu'un segment du marché où les voitures sont équivalentes.

O(x)= le nombre de voitures que les vendeurs globalement souhaitent vendre si le prix unitaire est x.

D(x)= le nombre de voitures que les acheteurs globalement souhaitent acheter si le prix unitaire est x.

L'offre est inchangée, la demande est modifiée puisque le consommateur qui désire un modèle dont le prix proposé est x se comporte comme si le prix était x – 5, puisque c'est cette somme qu'il devra débourser. La nouvelle fonction de demande est donc D(x – 5) ; sa représentation graphique est l'image de celle de D par la translation de vecteur $5\vec{i}$. Graphiquement, on constate que le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre augmentent. Les quantités vendues augmentent ainsi que les prix. Le consommateur y trouve cependant un avantage, tout se passe comme si le vendeur et l'acheteur se partageaient la prime. Ces faits ont été réellement constatés ; l'état n'a pas été lésé car la hausse de recette due à la TVA a largement compensé la prime versée.

3.3.2 Cas où la prime est versée au vendeur

Pour faciliter l'étude, on reprend les mêmes notations qu'au 3.1 ; on étudie le cas où la prime de 5000F n'est pas versée à l'acheteur mais directement au vendeur. La stratégie de l'acheteur est inchangée ; le vendeur, lui, pour un prix affiché de x milliers de francs, reçoit en fait x + 5 milliers de F. Sa fonction d'offre est donc O(x + 5) ; sa représentation graphique est l'image de la représentation graphique de O par la translation de vecteur $-5\vec{i}$; on voit donc apparaître un nouveau point d'équilibre : le prix de vente baisse (de moins de 5000F) donc l'acheteur est content, la quantité vendue et le prix réel perçu par le vendeur augmentent, il est donc lui aussi satisfait. Ici aussi, vendeur et acheteur se partagent la prime versée. On peut faire quelques remarques sur ces deux types de primes :

- L'impact psychologique n'est pas le même : pour la vente des voitures, il est évident que, compte tenu des sommes mises en jeu et du nombre très important d'acheteurs potentiels, on a choisi la prime versée à l'acheteur ; dans le cas du commerce des fruits et légumes, de la viande ou du lait, on choisit en général la prime versée au producteur (et vendeur).
- En travaillant graphiquement, on peut comparer les deux méthodes en termes de sommes réellement perçues ou versées, compte tenu de la prime.

- En travaillant graphiquement, on peut se donner, à priori, un objectif à atteindre (une quantité et un prix d'équilibre) et chercher la ou les primes à verser pour atteindre cet objectif (on distinguera le cas où le nouveau point d'équilibre se trouve sur l'une des courbes d'un cas plus général).

3.3.3 Taxe payée par l'acheteur

Les exemples sont nombreux. Il s'agit de taxes payées par unité achetée. On peut reprendre l'exemple automobile et la taxe à verser pour obtenir une carte grise. Prenons le cas d'une voiture où le futur acheteur vient d'apprendre qu'en plus des x milliers de francs prévus initialement, il doit encore verser 2500F pour frais de carte grise, plaques d'immatriculation et autres frais divers de mise à disposition. Il va alors raisonner comme si le prix du véhicule est de x + 2,5 milliers de francs ; sa nouvelle fonction de demande est donc D(x + 2,5). On utilise donc la translation de vecteur – 2,5*i* ; l'offre est inchangée, donc le prix de vente et la quantité vendue vont baisser.

3.3.4 Taxe payée par le vendeur

On peut imaginer une patente proportionnelle à la quantité vendue, un droit à payer à la société mère ou au concessionnaire exclusif, quelques taxes sociales ou liées par exemple au service des mines qui garantit la conformité du véhicule au modèle déposé et aux normes en vigueur etc.

Si le vendeur doit verser une taxe de 2500F pour la vente de chaque voiture, il raisonnera comme si le prix de vente réel est de x – 2,5 milliers de francs. La nouvelle fonction d'offre devient donc O(x – 2,5) ; on utilisera donc la translation de vecteur $2{,}5\,\vec{i}$. La fonction de demande est inchangée ; l'effet de cette taxe est une baisse de la quantité vendue et une hausse du prix de vente. La taxe est donc répercutée (en général partiellement) sur l'acheteur. On peut chercher à comparer la recette globale avant et après l'instauration de la nouvelle taxe. On peut aussi comparer les effets de ces deux types de taxes.

3.3.5 Résumé : offre, demande, primes et taxes par unité négociée

Dans ce qui suit, on ne précisera pas quelle est l'unité monétaire choisie autrement que sous la forme : Unité de Compte.

On rappelle les définitions suivantes :

O(x) = la quantité totale que les vendeurs globalement souhaitent vendre si le prix unitaire est x unités de compte.

D(x) = la quantité totale que les acheteurs globalement souhaitent acheter si le prix unitaire est x unités de compte.

		Fonction d'offre	Fonction de demande
Prime de k unités de compte	Versée à l'acheteur	O(x)	D(x – k)
	Versée au vendeur	O(x + k)	D(x)
Taxe de k' unités de compte	Payée par l'acheteur	O(x)	D(x + k')
	Payée par le vendeur	O(x – k')	D(x)

Naturellement, on peut aussi cumuler primes et taxes de toutes natures…
Voir graphiques 6, 7, 8 ,9 en annexe.

3.3.6 Lien avec un TPE

Primes et taxes, surtout lorsqu'elles sont définies localement, sont un élément important dans le choix, par une entreprise, du site où elle désire s'implanter. On peut en particulier signaler le cas des zones franches ou celui des entreprises de location de véhicules sans chauffeurs qui, en France, ont, dans la grande majorité, choisi pour lieu d'immatriculation des véhicules mis en location (et donc pour lieu d'implantation principal de la société) le département où la vignette automobile est la moins chère).

3.4 Avec une fonction de Coût total

Rappel : on note C(x) le coût total nécessaire à la production et à la vente de x objets.

Pour des raisons de réglages des machines et de mise au point du produit, il peut arriver que les k premiers objets produits soient invendables ; le coût total nécessaire à la mise effective sur le marché de x objets est donc de C(x + k). On utilisera donc la translation de vecteur $k\vec{i}$; les coûts augmentent. Pour certaines productions, en particulier dans le secteur agroalimentaire, la réglementation exige qu'une certaine quantité du produit élaboré soit conservée à titre de "témoin". Réciproquement, un déstockage de k unités déjà financées peut amener à une fonction du type C(x – k).

4. Autres fonctions associées

1. Fonction – f

On peut utiliser ce type d'opération dans la construction d'une fonction de bénéfice totale ou de bénéfice moyen. En particulier, un déficit étant une recette négative, pour traduire son évolution, l'homme étant plus à l'aise avec des nombres positifs, on étudie et représente souvent l'opposé de cette recette. On rencontre dans certains journaux des graphiques portant la mention "échelle inversée".

2. Fonction kf

Exemples :

Si C(x) est le coût total nécessaire à la production de x objets, le Coût total après l'instauration d'une taxe de solidarité de 2,5% sur les sommes investies devient : 1,025C(x).

Une prime de 3% des sommes investies amène le Coût total à 0,97C(x).

En raison d'un soleil très généreux, on peut voir, quel que soit le prix de vente pratiqué, la quantité de tomates offerte à la vente augmenter de 15% ; de même, des intempéries peuvent faire baisser la quantité de salade proposée à la vente de 30%.

Une rumeur sur la qualité du bœuf peut faire facilement baisser la demande de 60%, quel que soit le prix de vente. Un slogan publicitaire mal choisi peut avoir un effet analogue (une voiture représentée avec son propriétaire et comparée à une poire ou le shampoing Marie-Antoinette qui vous fait ….. perdre la tête).

3. Fonction f(kx)

Exemples :

Si 3% des objets produits sont invendables, le coût réel nécessaire à la mise sur le marché de x objets est C(1,03x).

Si le prix de vente annoncé est hors taxe, la fonction de demande, TVA comprise est D(1,196x).

ANNEXE 1 : quelques problèmes

I. Contrôle de connaissances

1. On donne la représentation graphique d'une fonction f, indiquer, en complétant le tableau ci-dessous, la ou les transformations géométriques permettant de construire la représentation graphique de la fonction considérée à partir de celle de f.

	Fonction	Transformation géométrique à utiliser
1	$\lvert f \rvert$	
2	$- f$	
3	$f(x + 3)$	
4	$f(x – 4)$	
5	$f(x) +2$	
6	$f(x + 13) - 5$	

2. On dispose de la fonction C(x) représentant le coût total, en centaines d'euros, engendré, pour une entreprise horlogère, par la production totale de x centaines de montres "TicTac". Dans chacun des cas ci-dessous, compléter le tableau en exprimant, en fonction de C(x), la nouvelle fonction représentant le coût total en tenant compte de l'influence de la modification de la situation considérée.

	Evénement	Nouvelle fonction de coût total
1	Prime fixe de 1250 euros.	
2	Prime de 2,7 euros par montre produite.	
3	Taxe foncière de 1500 euros.	
4	Les 50 premières montres produites sont invendables car peu fiables et on veut en vendre x centaines.	
5	1,3% de la production est invendable car peu fiable et on veut en vendre x centaines.	
6	Taxe de 3,5% sur les sommes investies.	

3. On dispose de la fonction B(x) représentant le bénéfice total, en centaines d'euros, réalisé par une entreprise horlogère, grâce à la vente de la totalité de sa production de x centaines de montres "TicTac". Dans chacun des cas ci-dessous, compléter le tableau en exprimant, en fonction de B(x), la nouvelle fonction représentant le bénéfice total en tenant compte de l'influence de la modification de la situation considérée.

	Evénement	Nouvelle fonction de coût total
1	Prime fixe de 1250 euros.	
2	Prime de 2,7 euros par montre produite.	
3	Taxe foncière de 1500 euros.	
4	Taxe de 12,5% sur le bénéfice réalisé.	
5	Don de 31 montres pour une vente de charité	

Nb : *Les unités sont la centaine de montres et la centaine d'euros.*

II. Avec une fonction de degré 2

L'activité proposée ci-dessous met en œuvre les résultats élémentaires sur les fonctions de degré 2

Daniel Ficit, modeste artisan, fabrique dans son atelier des objets qu'il vend 34€ pièce, somme si modique que tout ce qui est produit est vendu. Il a constaté que, lorsqu'il fabrique, chaque jour, x objets, le coût total pour la production de ces x objets peut être modélisé par la formule :

$$C(x) = x^2 - 20x + 200$$

1. a. Que lui coûtera une production totale de 25 objets?
   b. Quel sera alors son bénéfice?
   c. Quel est le coût du 26^e objet produit?
2. Déterminer et interpréter économiquement le nombre C(0).
3. a. Etudier le sens de variation de la fonction C.
   b. Indiquer, en fonction du réel positif x représentant la quantité journalière produite, comment varie le coût total nécessaire à la production de ces x objets. Est-ce un cas "classique", pourquoi?
4. Le 27 mars, D Ficit a consacré 1700€ à sa production, quel a été le nombre d'objets fabriqués ce jour là?
5. Donner, avec les justifications nécessaires, un encadrement de la dépense à envisager si D Ficit veut produire, le 21 avril, entre 40 et 50 objets.
6. Le 3 mars, D Ficit veut limiter ses dépenses à 2600€ maximum, quelles quantités peut-il produire dans ces conditions?
7. Le 1^er avril, D Ficit ne trouve dans ses comptes qu'une dépense totale de 149€. Que peut-on dire de sa production ce jour là?
8. Déterminer graphiquement et par le calcul l'intervalle de rentabilité de la production journalière de M Ficit. Comment réaliser le maximum de bénéfice?
9. Exprimer la fonction coût total nécessaire à la vente de x objets dans le cas où les deux premiers produits sont invendables en raison d'en four mal réglé.
10. Exprimer la fonction coût total nécessaire à la vente de x objets dans le cas où 3% des objets produits sont défectueux et donc invendables
11. En fait Daniel Ficit a bénéficié d'une prime offerte par le gouvernement pour la création d'entreprises artisanales. Cette prime est de 23€ par objet produit. Désormais les conditions ne sont plus remplies pour bénéficier de cette prime. Les coûts de production augmentent d'autant. On note C'(x) la nouvelle fonction de coût total.
   a. Exprimer C' en fonction de C.
   b. En considérant C' comme une somme de deux fonctions, représenter graphiquement, point par point, la fonction C' sur R^+ dans le même repère que C. Que constate-t-on quant au sens de variation de C' et à la zone de rentabilité?
   c. Justifier algébriquement le sens de variation de C' et commenter.

Remarques :

- Dans la modélisation des fonctions de Coût total, on distingue les charges fixes, les coûts proportionnels à la quantité produite (matières premières, énergie, travail …) et d'autres coûts "non proportionnels ; en première approximation, ces derniers sont représentés par un terme de degré 2 mais, souvent, on ajoute un terme de degré 3 qui fait apparaître un point d'inflexion dont le rôle est important en micro-économie.
- En général, la fonction de Coût total est croissante sur R^+, on a présenté ici un contre exemple avec l'origine de la perturbation du modèle habituel.
- Sur ce modèle, on peut constater qu'il y a des cas où travailler est moins onéreux que de ne rien faire….

III. Avec une fonction de degré 3

Aimé Landouille, artisan charcutier, fabrique un excellent pâté truffé au foie gras (et d'autres produits qui ne seront pas étudiés ici). Après diverses constatations statistiques, des services compétents sont arrivés à la conclusion que l'on peut modéliser le coût total de sa production journalière de pâté en utilisant la formule suivante : $C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q$

Où q représente la quantité produite, en kilogrammes, un jour donné et C(q) le coût total, en Francs, pour réaliser cette production. Compte tenu de divers impératifs économiques, commerciaux et réglementaires, Aimé Landouille limite sa production journalière à un maximum de 24 kg. Sur le graphique ci-joint, on a construit la courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle [0;24].

1) Lire et interpréter le sens de variation de la fonction C.
2) Compte tenu de la concurrence et des possibilités de la clientèle, le prix de vente est fixé à 84F le kilogramme. Etant donnée la qualité du produit, tout est vendu. Déterminer la recette totale R(q) pour une production totale de q kilogrammes.
3) Représenter graphiquement la fonction R dans le même repère que C.
4) Déterminer graphiquement les valeurs de q pour lesquelles l'artisan réalise du bénéfice et celles pour lesquelles il est en déficit (expliquer!).
5) Construire, **point par point**, sur le même graphique que C, la fonction B représentant le bénéfice réalisé pour une production de q kg, expliquer comment retrouver les résultats du 4) et indiquer comment réaliser un bénéfice maximum.
6) Exprimer B(q) en fonction de q. Déterminer algébriquement, pour chaque valeur de q, le signe de B(q) et retrouver par le calcul comment réaliser effectivement un bénéfice.
7) On appelle bénéfice moyen par unité produite le nombre : B(q)/q. On note B_m ce bénéfice moyen. Exprimer simplement B_m en fonction de q.
8) Etudier les variations de la fonction bénéfice moyen et indiquer comment réaliser un bénéfice moyen par unité vendu maximum.
9) Le coût moyen par unité produite est le nombre C(q)/q. On le note M(q). Exprimer simplement M(q) en fonction de q. Déterminer comment obtenir un coût moyen par unité produite minimum. Quels seront alors la quantité produite et le bénéfice réalisé?
10) L'artisan charcutier bénéficie d'une prime à l'encouragement du petit commerce de 400F par jour versée en déduction de ses frais de production. Quelle est alors sa nouvelle fonction de coût? Construire, en vert, cette nouvelle fonction dans le même repère que la fonction C(q) ; on précisera l'outil géométrique utilisé. Donner, sous cette hypothèse, par lecture graphique, la nouvelle zone de rentabilité de sa production. On ne tiendra pas compte de cette prime dans les questions suivantes.
11) La production actuelle journalière est de 17 kg. Par suite d'une perte de confiance générale dans le pâté, il envisage une baisse de sa production. Peut-il la réaliser en conservant le même bénéfice par unité vendue?
12) Par suite de divers problèmes techniques, sur sa production journalière, il y a toujours 500 grammes de produits impropres à la vente. Exprimer en fonction de q la fonction représentant le coût total nécessaire à une production de q kilogrammes de pâté vendables. Quel outil géométrique permet de représenter graphiquement cette nouvelle fonction sans en faire l'étude?

Remarques :

- De même que les précédents, ce texte a été proposé à des élèves de 1ES, c'est pourquoi on a conservé le franc comme unité monétaire.
- Comme indiqué dans le texte, la représentation graphique de la fonction C sur R^+ a été distribuée aux élèves sur un graphique à compléter ; par manque de place, il ne sera pas reproduit dans ce fascicule.

- Le sens de variation s'obtient par lecture graphique, ce qui permet de traiter le problème avant l'introduction de la dérivée.
- En général, les modèles choisis en économie pour représenter une fonction coût total sont des fonctions de degré trois croissantes avec point d'inflexion sur R^+ (voir la brochure déjà citée).

IV. L'offre et la demande.

On prendra soin de justifier chaque affirmation et d'expliquer la démarche utilisée.

Sur le graphique joint, on a représenté dans R^+ les fonctions f et g définies, pour x réel, par :

$$f(x)=x^2+3 \qquad \text{et} \qquad g(x)=5-x+(1/x)$$

1. Préciser quelle est la représentation graphique de f et celle de g.

On a étudié les ventes d'un certain produit et on a constaté que, si x est le prix de vente (en centaines de francs), alors f(x) représente la fonction d'offre, c'est à dire la quantité, en centaines d'unités, que les vendeurs acceptent de vendre si le prix est x ; g(x) représente, dans les mêmes conditions, la fonction de demande, c'est à dire les quantités (en centaines d'unités) que les acheteurs souhaitent acheter si le prix est x.

2. Déterminer graphiquement le prix et la quantité où le marché est en équilibre, c'est à dire les prix et quantités où l'offre est égale à la demande.
3. Indiquer les prix de vente induisant une surproduction et ceux engendrant une pénurie du produit étudié.
4. Si les acheteurs sont obligés d'acheter 900 objets exactement, quel sera le prix de vente?
5. Si les vendeurs sont obligés de vendre 100 objets exactement, quel sera le prix de vente?
6. Les producteurs obtiennent du gouvernement que le prix de vente unitaire ne soit pas inférieur à 150F ; quel sera alors la situation du marché?
7. Le gouvernement décide d'acheter 3 centaines d'objets en plus de ses achats habituels, quel que soit le prix de vente. Quelle sera alors la nouvelle fonction de demande? La construire en rouge sur le graphique fourni et indiquer l'outil géométrique utilisé. Donner le nouveau prix et la nouvelle quantité d'équilibre et préciser l'évolution du marché.
8. Etudier de même le cas d'un déstockage où l'on met sur le marché une centaine d'objets supplémentaires à vendre quel que soit le prix de vente.
9. Expliquer pourquoi, lorsque l'on offre une prime de 50F à chaque acheteur d'un objet, la fonction de demande devient f(x-0,5). Indiquer la transformation géométrique permettant de construire cette nouvelle fonction dans le même repère que les précédentes et décrire l'évolution du marché.

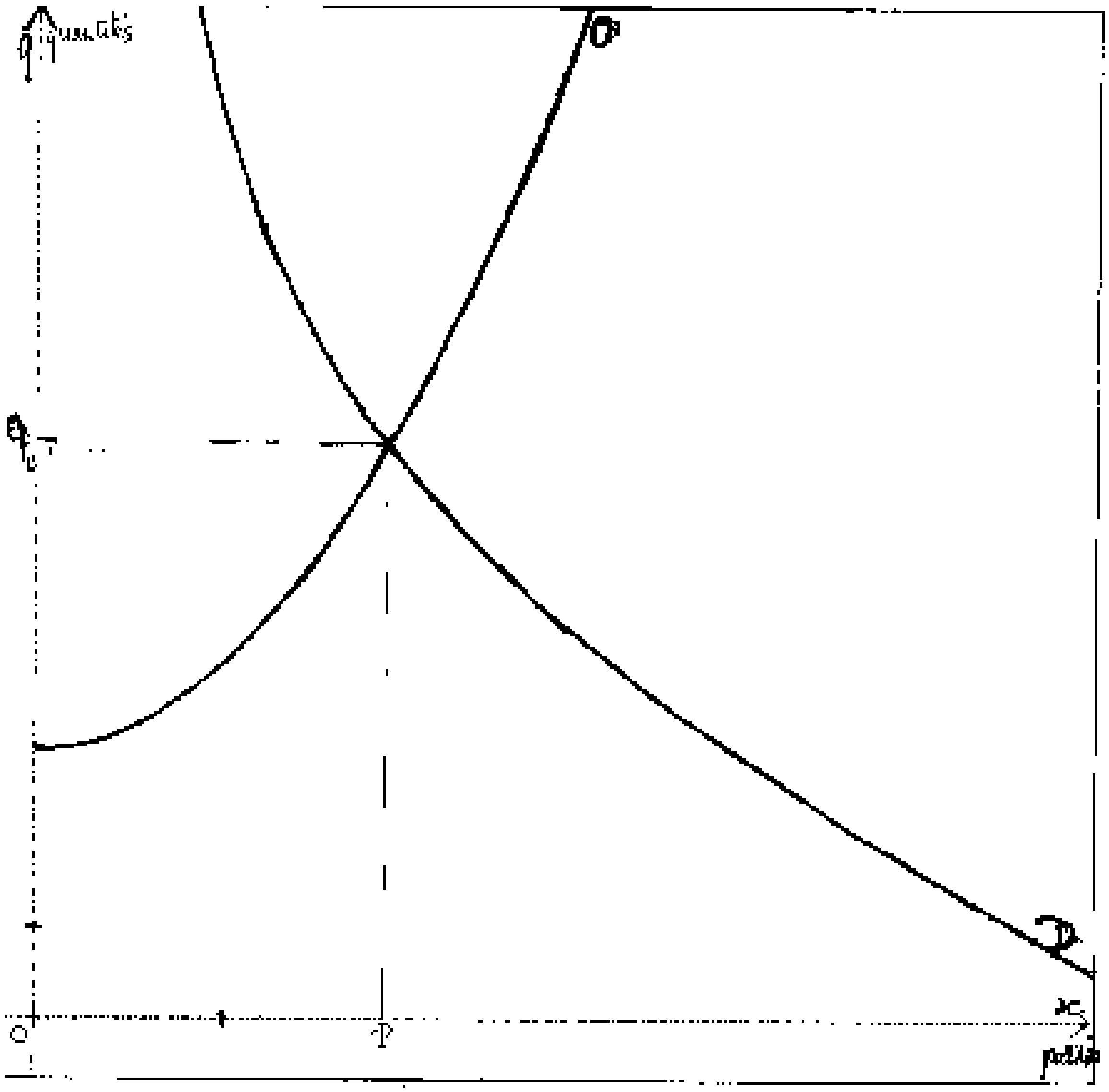
Remarques :

- De même que les précédents, ce texte a été proposé à des élèves de 1ES, c'est pourquoi on a conservé le franc comme unité monétaire.
- Comme indiqué dans le texte, la représentation graphique des fonctions f et g sur R^+ a été distribuée aux élèves sur un graphique à compléter ; par manque de place, il ne sera pas reproduit dans ce fascicule.

ANNEXE 2 : quelques figures

Nb : contrairement à certaines pratiques économiques, dans tout ce qui suit, les conventions mathématiques habituelles seront respectées : la variable est toujours sur l'axe des abscisses.

Figure 1 : l'offre et la demande, détermination du prix et de la quantité d'équilibre, prix du marché et quantité vendue dans l'hypothèse de la concurrence pure et parfaite et d'acteurs au comportement "raisonnable".



Conventions :

Dans tout ce qui suit, les conventions seront les suivantes : l'offre est notée O et la demande D, le prix d'équilibre est noté P et la quantité échangée à ce prix est noté Q. On utilisera le symbole ' pour désigner les effets d'une modification (hausse, baisse, prime, taxe ….).

Figure 2 : les effets d'une augmentation de la demande de k unités, quel que soit le prix de vente pratiqué.

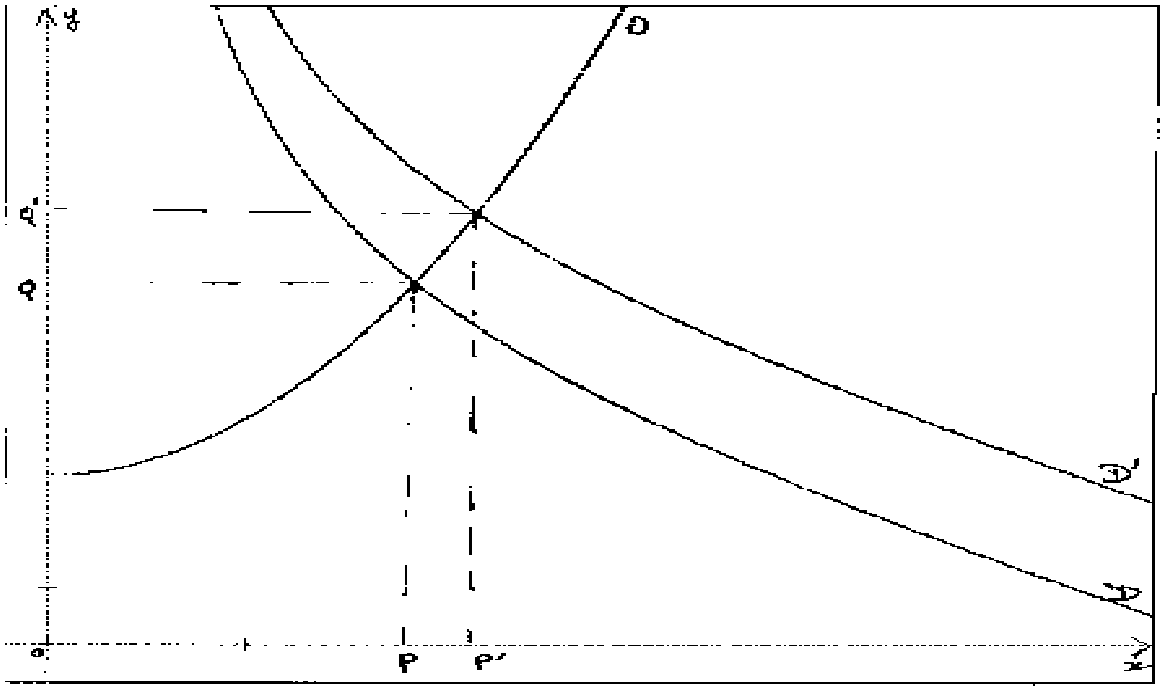


Figure 3 : les effets d'une augmentation de l'offre de k unités, quel que soit le prix de vente pratiqué.

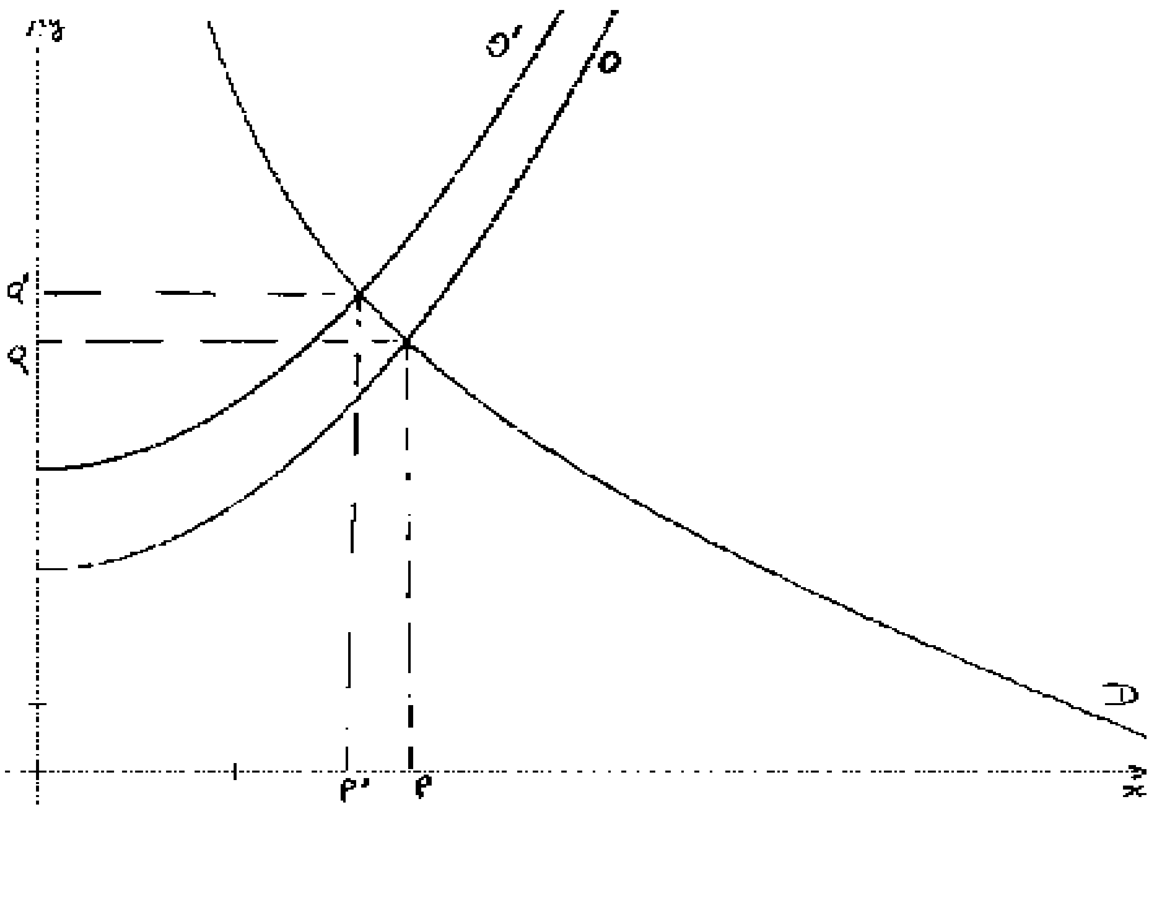


Figure 4 : les effets d'une diminution de la demande de k unités, quel que soit le prix de vente pratiqué.

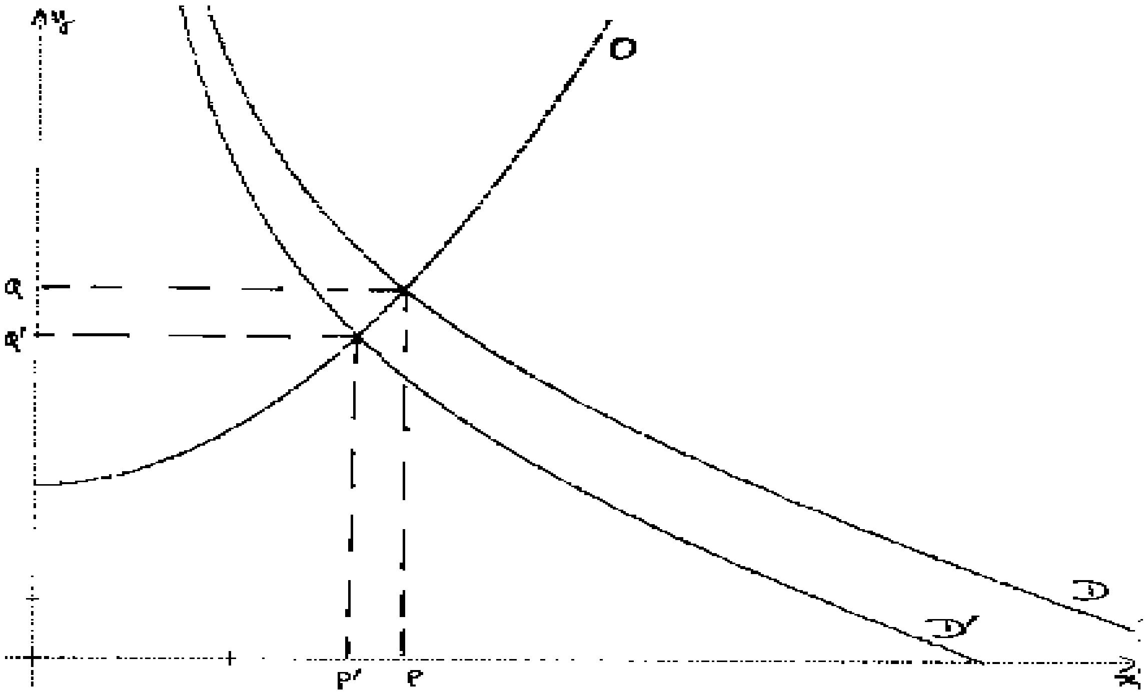


Figure 5 : les effets d'une diminution de l'offre de k unités, quel que soit le prix de vente pratiqué.

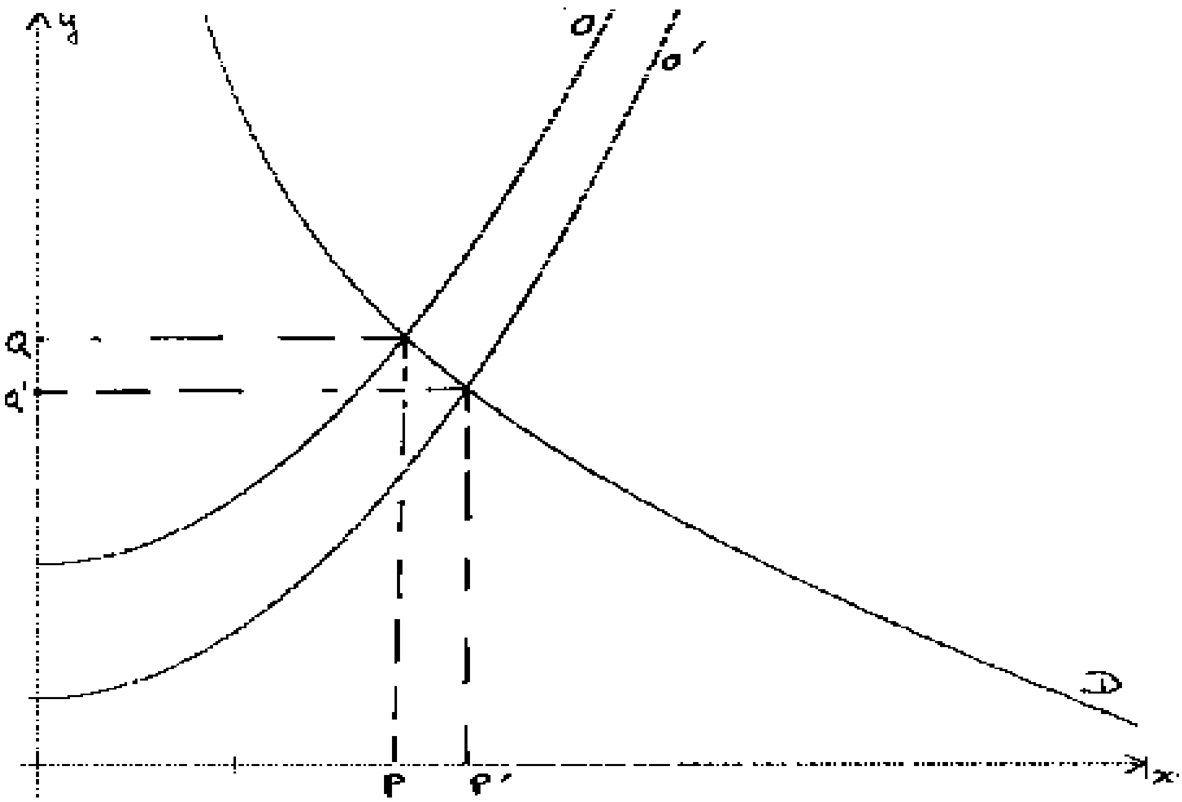


Figure 6 : les effets d'une prime de k unités de compte versée à l'acheteur.

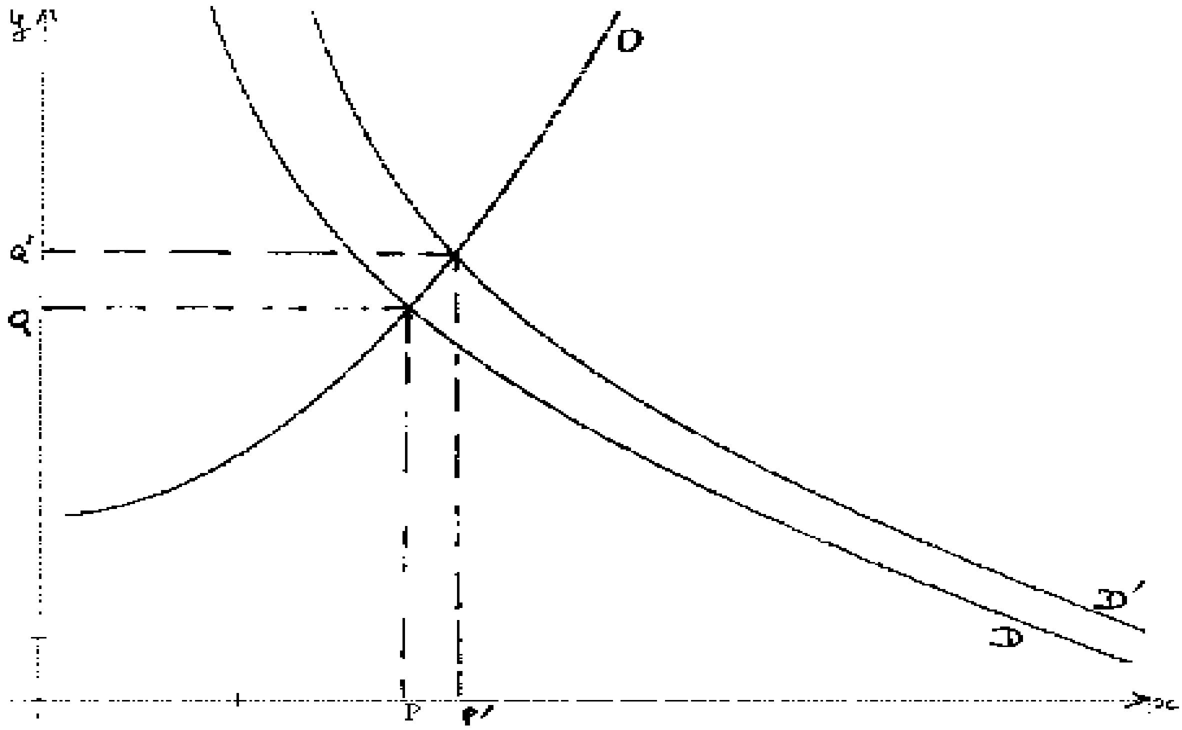


Figure 7 : les effets d'une prime de k unités de compte versée au vendeur.

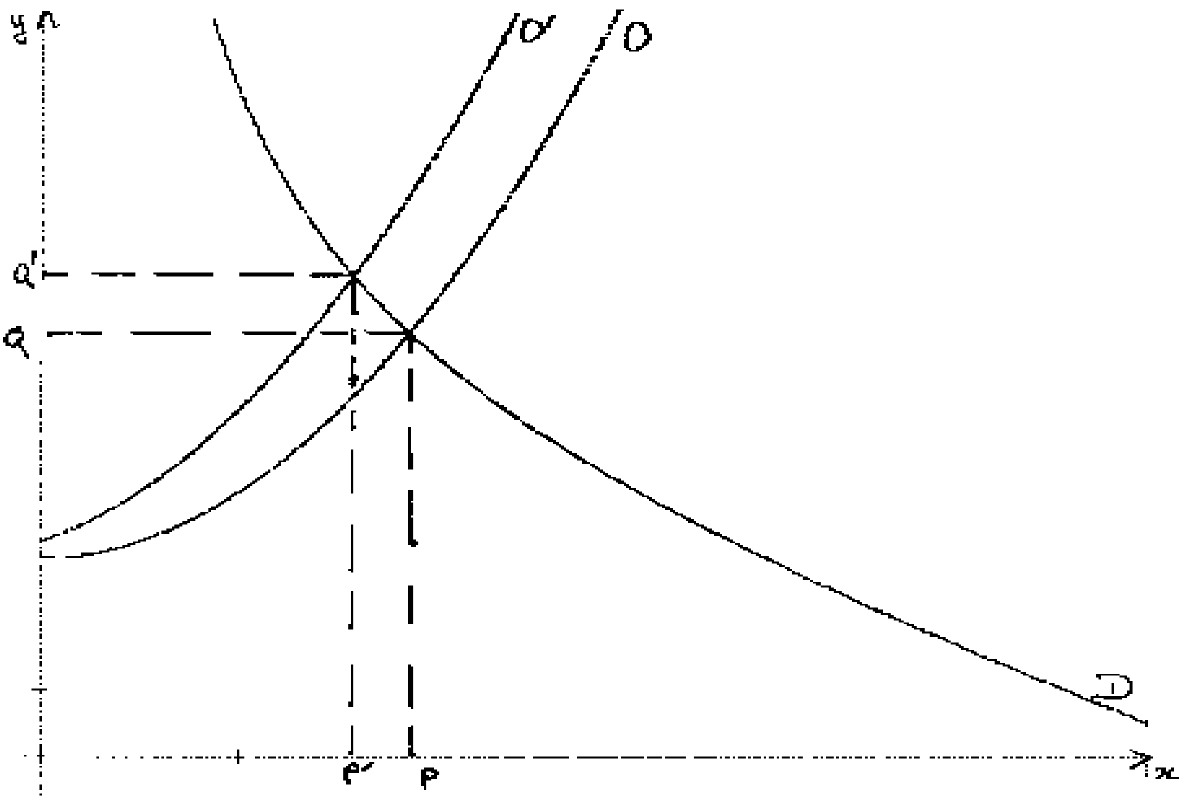


Figure 8 : les effets d'une taxe de k unités de compte payée par l'acheteur.

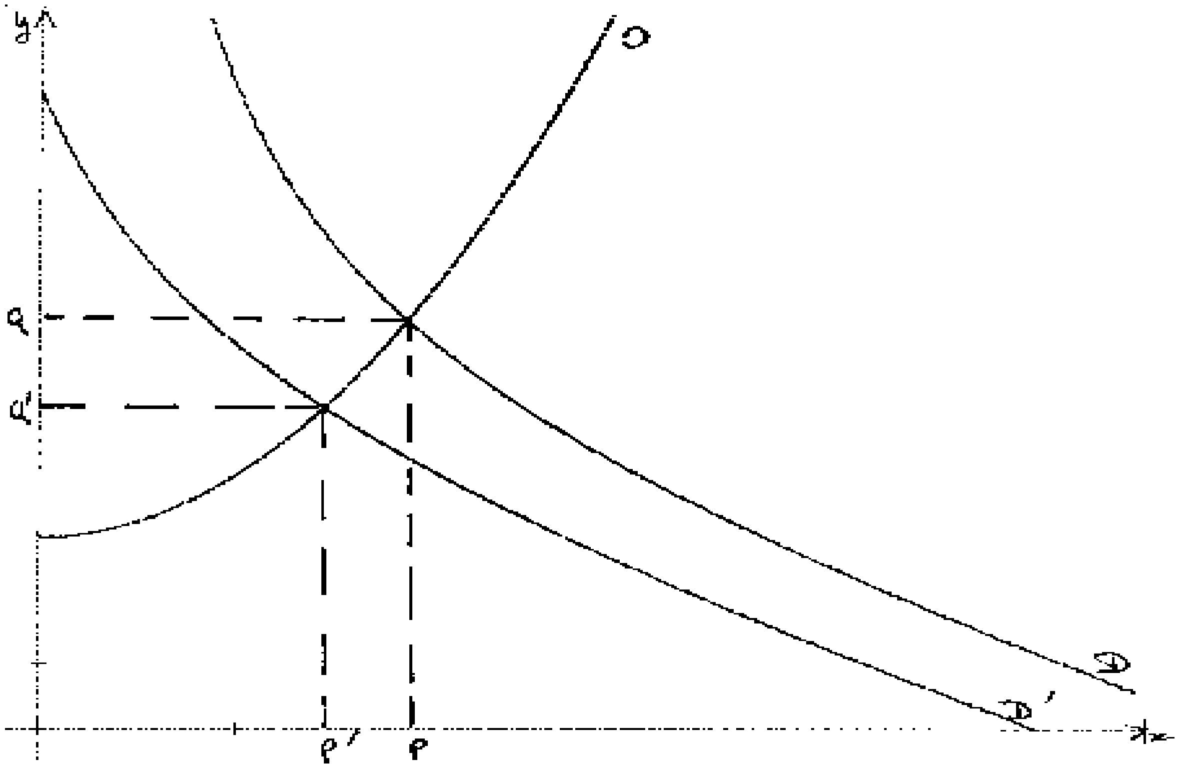


Figure 9 : les effets d'une taxe de k unités de compte payée par le vendeur.

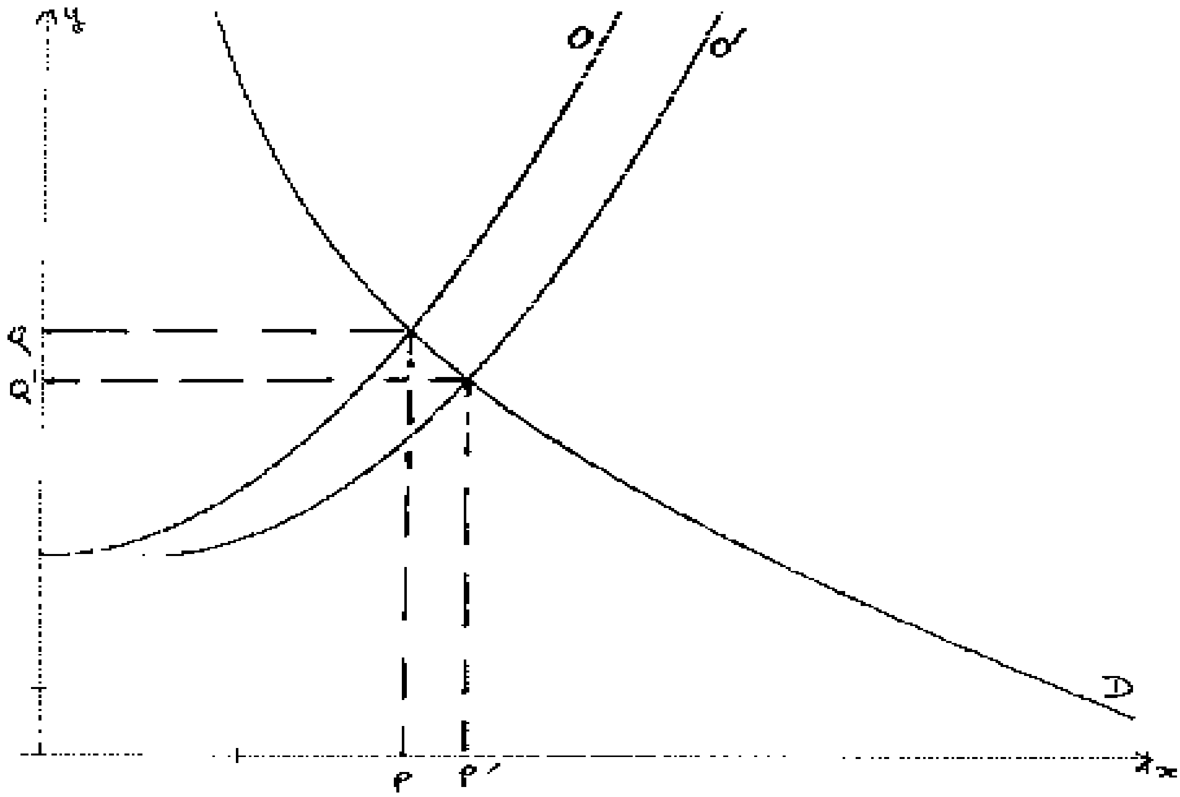
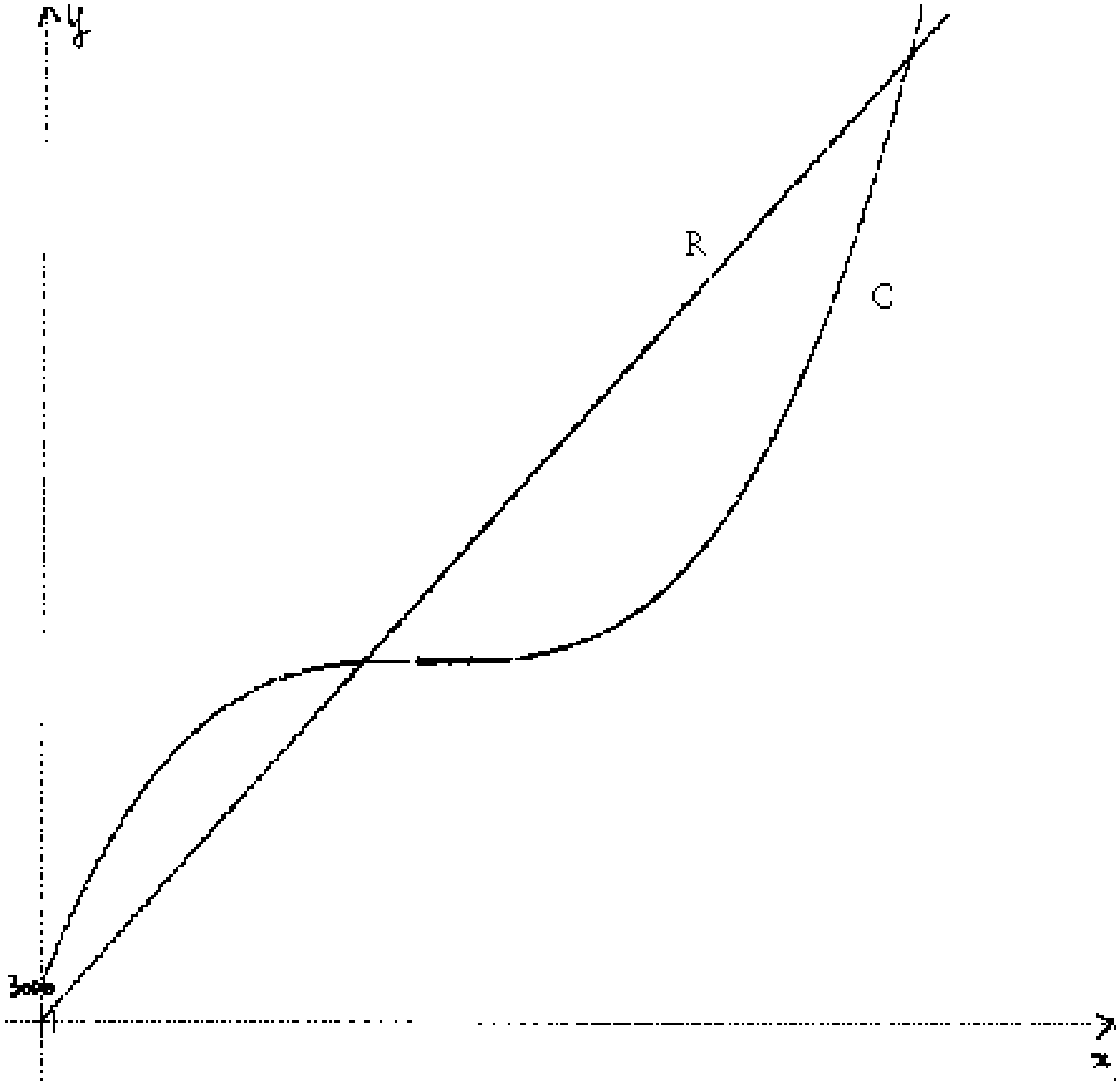


Figure 10 : une fonction de coût total C et une fonction de recette R.



On a présenté, ci-dessus, une situation classique : la fonction coût total est de degré 3 et la recette est proportionnelle à la quantité vendue. Sur ce graphique on voit facilement apparaître la zone de rentabilité de l'entreprise. Avec des transformations géométriques élémentaires (et éventuellement un papier calque….), on voit facilement les conséquences sur la zone de rentabilité des différentes situations évoquées dans le texte (primes, taxes, objets défectueux, etc. …).

Dans cette situation très classique, on constate facilement que pour x assez grand, on finit toujours par arriver à une situation déficitaire. Trop produire nuit…. On peut avoir ainsi une première approche de la comparaison des croissances des fonctions de degré 1 et 3.

Mathématiques, SVT, SES

Deux situations pour un même modèle : d'une suite géométrique à une fonction logistique

Jean-Marie THOMASSIN, lycée Carnot, Dijon

Les bases de ce texte ont été élaborées en décembre 2002 ; toute ressemblance avec le sujet proposé à une épreuve du baccalauréat ne saurait être qu'une pure coïncidence.

En décembre 2002, lors d'une réunion où nous étions plusieurs collègues à suivre des TPE, nous avons évoqué l'évolution des différents travaux en cours. Il y avait d'une part des TPE liant les mathématiques et les SVT et, d'autre part des TPE liant les mathématiques et les SES. La discussion a fait apparaître une démarche commune qui nous a paru intéressante ; nous la relatons ci-dessous. Les observations faites ont pu être par la suite confirmées quand nous avons participé aux différents jurys procédant à l'évaluation des TPE en vue du baccalauréat. Le texte ci-dessous tiendra donc compte à la fois du texte élaboré en décembre 2002 et des observations faites pendant l'épreuve de TPE du printemps 2003.

1. Quelques TPE liant mathématiques et SVT

Pour les groupes dont nous avons observé les travaux en cours d'année ou pendant l'épreuve, le thème central était souvent lié au cancer :

- Evolution d'une cellule cancéreuse.
- Le cancer du sein.
- Naissance et évolution d'un cancer (avec plusieurs panneaux dont le dernier représente une tombe…).
- Le traitement d'un cancer.
- Tchernobyl et la santé.
- La bombe atomique d'Hiroshima : principe et conséquences.
- Electricité hydraulique ou nucléaire : comment choisir? Quelles conséquences? Les grandes catastrophes hydrauliques et nucléaires.
- Etc…

Je ne sais pas quelle a été l'ambiance au cours de l'année scolaire, mais, assurément, passer deux jours entiers à questionner sur ces sujets nuit au moral des examinateurs.

Les choix faits par les élèves pour la réalisation et la présentation de leur travail ont été variés et on a pu voir des thèmes voisins traités de manières très diverses. Ils ont tous rencontré, souvent à plusieurs reprises, en fonction de l'évolution de leurs travaux, des spécialistes des questions traitées (par exemple des professeurs de médecine de la faculté) qui les ont aiguillés progressivement sans traiter le sujet à leur place. En général les mathématiques ont trouvé, dans ces travaux, une place naturelle liée à la description d'une évolution en fonction du temps (division cellulaire, nombre de cellules cancéreuses, nombres de victimes, nombres de cancers de la thyroïde, réactions nucléaires en chaîne, …) et à la volonté d'établir des prévisions ou des pronostics. Le paragraphe suivant relate la manière analogue dont plusieurs groupes ont étudié l'évolution d'une cellule cancéreuse. Les démarches ont été indépendantes mais, le sujet étant commun, on obtient des résultats semblables.

2. Evolution d'une population de cellules cancéreuses

Ce point est naturellement un passage obligé dans tout TPE lié de près ou de loin au cancer.

1. La division cellulaire

Le principe en est bien connu. Après une période fixe, chaque cellule se divise en deux cellules identiques, par clonage après copie interne de chacun de ses organes. On dispose, après la mitose cellulaire, de deux nouvelles cellules, identiques à la cellule mère, disparue. Il n'y a ni mère ni fille mais deux cellules neuves identiques.

2. Evolution d'une population de cellules saines

Il existe des processus de contrôle de la division cellulaire qui permettent de maintenir constant le nombre de cellules dans un organisme adulte sain.

3. Evolution d'une population de cellules cancéreuses : 1^er^ modèle

Dans le cas des cellules cancéreuses, le processus de contrôle de la division cellulaire ne fonctionne plus ou n'a plus d'efficacité sur ce type de cellules. Les cellules cancéreuses vont donc se multiplier sans aucun contrôle. Dans chaque TPE, on s'intéresse donc à leur nombre au fil du temps ; les outils mathématiques vont donc permettre de décrire cette évolution. Devant l'impossibilité d'une expérience de comptage, on cherche un modèle mathématique pour simuler cette évolution. On suppose, en première approche, que la durée entre deux reproductions est constante ; elle dépend du type de cellule et donc du type de cancer étudié. Il en découle alors que les reproductions se font simultanément.

La division cellulaire se représente donc facilement : à chaque division (supposée pour faciliter l'étude se réaliser pour toutes les cellules au même instant), le nombre de cellules double. On découvre aisément une suite géométrique de raison 2 que l'on peut facilement étudier, quel que soit le nombre de cellules cancéreuses. Il n'y a aucun inconvénient à ne s'intéresser qu'au devenir d'une seule cellule cancéreuse, puisque tout est proportionnel au nombre initial. Si on prend une période d'une semaine entre deux mitoses, en un an, avec une seule cellule malade, on aboutit à 2^{52}, soit environ $45*10^{14}$, soit plus de 4 millions cinq cent mille milliards de cellules malades, ce qui manifestement apparaît en général beaucoup pour un cancer en phase initiale.

Arrivés à ce stade, en général, les élèves retournent se renseigner auprès de leurs informateurs favoris.

4. Evolution d'une population de cellules cancéreuses : 2^e^ modèle

Ils apprennent alors que tout n'est pas parfait et qu'il arrive des "accidents" dans la vie ou la division cellulaire : certaines cellules meurent avant ou au cours de l'opération de reproduction (on peut aussi penser à la production de cellules non "viables"). Pour le nombre global de cellules, le facteur multiplicatif n'est donc pas 2 mais un nombre compris entre 1 et 2, strictement plus grand que 1. Les élèves vont alors étudier plusieurs suites géométriques de raison dans l'intervalle]1 ; 2[. On commence par 1,9 puis 1,8 puis 1,7, etc., pour arriver à des nombres de plus en plus proche de 1. On met alors en évidence la croissance des suites géométriques et une issue inéluctable de la maladie s'il n'est pas mis un frein à cette croissance exponentielle (le mot est lâché…) des cellules. Certains des TPE étudiés se sont alors orientés vers l'étude d'une réponse médicale.

Certains élèves ont trouvé que ce modèle offrait encore une issue funeste trop rapide, sauf à envisager un taux de reproduction très faible. Ils sont donc retournés se renseigner auprès de leur informateur favori.

5. Evolution d'une population de cellules cancéreuses : 3e modèle

On leur propose alors une variante ou "amélioration" du modèle : chaque cellule ne peut se reproduire qu'un nombre fini de fois (70 ou 80 suivant les groupes de TPE observés). Puisque, ainsi, on n'atteignait pas l'infini, plusieurs groupes d'élèves ont validé ce modèle. On aura, certes beaucoup de cellules cancéreuses, mais en nombre fini, prévisible, calculable et donc il pourra aussi rester une place pour les cellules saines qui sont nécessaires à la survie des cellules cancéreuses et du corps humain qui les abritent.

Ce modèle a souvent paru satisfaisant pour les élèves. Cependant, certains d'entre eux ont cherché à approfondir dans deux directions :

La première est celle induite par les questions qui découlent du modèle décrit :

- Après division cellulaire, quelle est la mère, quelle est la fille?
- Si la mère voit son quota de divisions baisser d'une unité, à combien de divisions a droit la fille? Le total ou le même quota que sa mère avant ou après division?
- La cellule dispose-t-elle d'un compteur?
- Que se passe-t-il après épuisement du quota?
- Le modèle mère-fille implique en fait que la division ne se fasse pas à l'identique… etc.

La deuxième direction est celle du moment de reproduction : les suites géométriques sont bien pratiques à utiliser mais impliquent une reproduction aux mêmes instants pour toutes les cellules appelées à se reproduire (par exemple tous les lundis matins à 8 heure précise si le phénomène se réalise tous les sept jours). Pour la première cellule et ses quelques descendantes de premiers rangs, cela peut facilement se concevoir mais il est facile d'imaginer que tout n'est pas réglé avec la précision d'une horloge à quartz ; il y aura du retard chez certaines cellules et de l'avance chez d'autres. Très vite, la reproduction va se faire à chaque instant, en continu.

6. Evolution d'une population de cellules cancéreuses : du discret au continu

Les remarques précédentes ont amené certains élèves à proposer un modèle continu : les fonctions exponentielles ; elles sont la suite logique aux suites géométriques (on passe facilement de la suite $1{,}8^n$ à la fonction $1{,}8^x$). La transition est d'autant plus facile à faire que l'on est en plein dans le programme mathématique de l'année en cours.

L'exemple cité, la suite $1{,}8^n$ modélise une croissance de 80% à chaque étape, l'augmentation se faisant en une seule fois, à l'instant de l'événement commun, comme les intérêts à la caisse d'épargne qui se calculent tous le 1er janvier. La fonction mathématique $1{,}8^x$ est la fonction continue la plus simple qui passe par tous les points définis par la suite géométrique. Elle permet de décrire ce qui pourrait se passer entre deux dates théoriques de reproduction : on est à la phase 27 on veut estimer la population à la phase 27,3 sachant qu'à la phase 28 on veut retrouver la valeur attendue par la suite géométrique. C'est une fonction qui, en somme, "comble" des vides.

On peut s'attendre à ce que les cellules apparues entre les temps 27 et 28, décomptées au n°28 dans le modèle géométrique n'attendent pas le temps 29 pour se reproduire. Il y aura donc une reproduction en continu et une légère accélération par rapport au modèle décrit.

En gardant la même hypothèse d'une croissance relative de 80% par unité de temps, la croissance relative dans le cas continu se traduit par une dérivée logarithmique. On peut donc écrire : $\frac{f'}{f} = 0{,}8$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme : $f' = 0{,}8f$

Ceci peut donc s'interpréter comme une croissance proportionnelle à l'effectif existant au temps x. Ce qui nous amène, avec une seule cellule initiale, à la fonction : $e^{0,8x}$, soit en première approximation, $2,225^x$, par défaut et non la fonction initialement écrite : $1,8^x$. Le continu induit donc une croissance plus rapide que le discret, écart d'autant plus grand que le taux de croissance ici évoqué est important.

Il serait intéressant de faire avec les élèves un parallèle entre cette situation (évolution d'une population de cellules ou d'habitants) et les calculs d'intérêts composés : pour des taux faibles (comme 2,5% à la caisse d'épargne) le modèle géométrique est suffisant (facile d'emploi et facile à … comprendre) ; pour des taux plus ou très élevés, on choisira des modèles plus fins (en utilisant par exemple des périodes plus courtes : le mois ou, comme une grande surface le propose depuis peu, le jour ou un système d'intérêts calculés en continu avec les fonctions exponentielles pour le cas de grosses sommes d'argent ou les périodes d'hyper-inflation).

7. Evolution d'une population de cellules cancéreuses : une fonction logistique

Certains élèves tenaces sont à nouveau retournés exposer leurs résultats et se renseigner auprès de leur informateur favori. On leur a expliqué que c'était un peu plus compliqué et que, dans la reproduction des cellules, un autre facteur intervenait : il n'y a pas qu'une proportionnalité à la population existante. Si les cellules se reproduisent, il faut aussi qu'elles vivent, soient nourries, etc. Il faut donc tenir compte des autres cellules existantes, de la place totale disponible. Il y a donc deux populations à étudier ; elles influent l'une sur l'autre et c'est plus leurs poids réciproques que leurs effectifs respectifs qui vont intervenir.

Au lieu de compter le nombre de cellules cancéreuses, on va considérer leur part dans l'ensemble des cellules de l'organe malade (ou du malade si le cancer se généralise). Lorsqu'il y en a peu, il y a aussi peu d'obstacle à leur multiplication ; le modèle géométrique sera donc adapté. Ensuite la population saine va aussi avoir une influence (place, nourriture, espace vital…). On note f(x) la part, de cellules cancéreuses dans l'organe malade, ce taux étant exprimé en pourcentage de l'ensemble total des cellules. Ce taux va de 0 à 100% (exclus). Le taux de variation (modélisé par la dérivée) est non seulement proportionnel à la fonction f, c'est à dire au nombre de cellules malades à l'instant x, mais aussi à la marge qui le sépare de sa limite supérieure, 100%. Ainsi, plus le taux de cellules malades est important dans l'organisme, moins leur reproduction est rapide.

La fonction f sera donc solution d'une équation du type : $f' = kf(100 - f)$ où k est une constante. La solution de cette équation différentielle est une fonction dite logistique. On proposera un exemple de résolution de cette équation dans un paragraphe ultérieur. On obtient, dans le cas étudié, une fonction à la croissance d'abord rapide puis qui se ralentit ; la limite supérieure de cette fonction est naturellement 100.

Lors de l'épreuve de TPE, il y a eu des présentations de fonctions ou courbes logistiques "toutes faites" ; on a signalé (spontanément ou après questionnement) le problème évoqué plus haut de la double proportionnalité, il a été écarté et personne n'a osé écrire l'équation différentielle indiquée.

3. Quelques TPE liant mathématiques et SES

La place des mathématiques n'est pas le souci majeur de l'élève de la série ES qui définit le sujet de son TPE. Souvent, il n'y réfléchit que contraint et forcé. Pourtant beaucoup de sujets se prêtent à leur utilisation. En économie, quoi de mieux que s'appuyer sur des données chiffrées pour décrire, observer, prévoir, décider…

L'outil statistique devient pour l'élève un passe partout. Certains vous présentent quelques tableaux numériques et graphiques associés sans commentaire ni véritable réflexion préalable ; d'autres complètent par une vague régression plus ou moins linéaire et quelques prévisions pour la suite, parce que l'on fait comme cela sans s'interroger sur la pertinence de leurs pronostics. Trop souvent, par manque de réflexion et de recul, dans les TPE, les mathématiques apparaissent comme une garniture décorative, peu utile dans l'argumentation alors que le thème traité aurait pu amener à un travail plus pertinent.

Voici d'abord quelques TPE observés lors d'évaluations et des thèmes mathématiques qui auraient pu être abordés (on a naturellement changé les éléments pouvant entraîner certaines identifications) :

- La nouvelle maison de retraite "Au Bonheur d'Agécanonix" : les élèves se sont contentés de relater la visite faite par eux, leur entretien avec le directeur, les atouts de cette nouvelle structure et ont conclu que c'était la mieux (sans argument) et qu'ils ne voudraient pas y aller). Au niveau mathématique, on aurait pu étudier l'évolution de la population (âge, besoins, ressources…) et établir des prévisions pour les années avenir, en utilisant plusieurs modèles et comparant les résultats ; on aurait aussi pu étudier les données chiffrées de l'entreprise, les prévisions de remplissage, de rentabilité, etc.
- "Au bonheur du client" : étude descriptive d'un grand magasin. On aurait pu s'attendre à des travaux sur le chiffre d'affaires, les bénéfices, le pourcentage d'évolution des ventes d'un rayon bien choisi, etc.
- Plusieurs études sur la création de salles de spectacles ou de sport ; les questions : pourquoi, dans quels objectifs, avec quelle rentabilité, avec quel taux de fréquentation, de remplissage, d'insatisfaction, n'ont en général pas été abordées avec des arguments chiffrés ; on s'est souvent contenté d'impressions ou de "c'était un besoin, une nécessité".
- Création et vie d'un magasin spécialisé.
- Les 35 heures à la clinique X.

La liste pourrait encore être longue. Signalons maintenant un ensemble de TPE qui tournent autours de l'entreprise et du commerce :

- L'entreprise "Tôles-Ondulix" : influence d'une tempête sur l'activité (une belle occasion d'utiliser les fonctions associées).
- La tonnellerie T : évolution de la société.
- Etude d'un magasin de sport.
- Le Mulot, une petite société informatique devenue grande.
- La Fraise, représentant en confiture.
- La Frisée, salades fraîches et épluchées en sachet pour supermarché.
- Etc.

Les TPE cités (la liste aurait pu être beaucoup plus longue) ont en commun l'étude d'un produit, d'une entreprise, d'un marché, d'un chiffre d'affaires ou des bénéfices au fil du temps. L'outil statistique a été utilisé dans un premier temps pour décrire, prévoir et l'outil des suites a permis de modéliser. Mais comment faire pour décrire et prévoir avant la création de l'entreprise ou le lancement du projet : on ne dispose pas de statistiques sur des performances qui ne sont pas encore réalisées. On se tourne donc vers une étude du marché potentiel ; une analyse mathématique permet souvent d'affiner un projet, de le consolider ou d'éviter des erreurs de stratégie. On choisit souvent l'outil statistique pour construire une courbe illustrant l'évolution du marché à conquérir, mais, dans certains cas, la régression linéaire n'est pas pertinente ; il faudra donc analyser la pertinence de l'objet mathématique construit.

4. Quelques suites géométriques

Rappelons quelques situations classiques menant à des suites géométriques :

- Chaque année, la société informatique Le Mulot triple son chiffre d'affaires.
- Depuis sa création il y a trois ans, chaque année, la société La Frisée double la quantité de salade vendue.

- Chaque année, La Fraise, représentant en confiture, doit augmenter le montant de ses ventes de 10%.
- Chaque année, la tonnellerie T augmente de 20%, le nombre de tonneaux vendus.

On a donc ici quatre situations d'évolution analogues à celle décrite pour l'évolution des cellules cancéreuses et les mêmes questions :

- La tendance peut-elle être conservée ?
- Y-a-t-il une limite ?
- Peut-on conserver indéfiniment une croissance exponentielle ?
- Que font les concurrents ?

La nécessité d'une vision globale du marché apparaît vite : quelle est sa capacité d'absorption, les hausses constatées sont-elles dues à la valeur du produit ou à une hausse des achats par les clients? On peut alors être amené, comme pour les cellules cancéreuses, à corriger le facteur multiplicatif de la suite étudiée en tenant compte de l'évolution prévue du marché.

5. Croissance exponentielle

Face au modèle de croissance exponentielle précédent, l'entrepreneur devra rester prudent : il est facile de se convaincre (les élèves construisent à titre d'illustration quelques graphiques très parlants) que la tendance observée ne peut pas se maintenir ainsi indéfiniment. L'exemple de quelques sociétés de service en ingénierie informatique est là pour le rappeler. Les élèves de la série ES parlent facilement de la « bulle informatique » et des aléas récents de la bourse. Quelques arguments simples peuvent être évoqués :

- Il est plus facile de doubler une petite quantité ou un petit chiffre d'affaires qu'un gros.
- La confiture et la salade sont des produits à usage unique ; si la marchandise est bonne, on peut espérer que le client reviendra, pour augmenter les ventes, il faudra cependant convaincre le client d'acheter plus ou trouver d'autres clients.
- Un ordinateur, une voiture sont des produits ayant une durée de vie plus importante ; il s'écoulera donc un laps de temps important entre un achat et l'achat suivant par le même client ; pour maintenir le niveau des ventes sur ces créneaux, il faut déjà trouver des nouveaux clients, pour le voir s'élever, il faudra un effort encore plus grand.
- Une évolution, même importante en pourcentage, des ventes d'une petite société n'a pas une grosse incidence sur le marché global, mais, lorsque cette société est devenue grande, la situation change.
- La capacité d'achat du marché n'est pas illimitée.

Deux modèles peuvent être envisagés :

- On connaît à priori le nombre de produits qui seront vendus pendant la période de référence, ce nombre est alors la capacité totale produite par l'ensemble des sociétés du secteur.
- On étudie la part relative de chaque société dans l'ensemble des produits vendus.

Remarques :

La production est réglée pour qu'il n'y ait pas d'invendus.

Le deuxième modèle permet de considérer comme favorable une situation où une baisse des ventes n'est pas due à la qualité du produit mais à une baisse globale de l'activité du marché dans le cas où la part de marché de la société augmente.

6. Du discret au continu

Dans un premier temps, la période de référence est l'année civile. Elle permet de présenter des bilans et des projets avec des chiffres significatifs, mais, dans de nombreux cas cette durée est rapidement jugée comme trop grande. Il y a d'abord le cas des sociétés créées récemment : une période de référence de 4 ans, par exemple, ne permet pas de donner des prévisions précises et fiables pour l'avenir, juste une tendance et les ambitions du directeur. Il y a ensuite certaines situations où les évolutions nécessitent une étude plus fine, par exemple :

- Production en grande quantité d'un produit bon marché, immédiatement consommé avec réaction immédiate du consommateur (salade, confiture, etc.).
- Production dépendant de conditions extérieures (climat, humeur, …).
- Produits financiers où les intérêts sont calculés mensuellement ou au jour le jour.
- Etc.

Les remarques précédentes ont amené certains élèves à proposer un modèle continu : les fonctions exponentielles ; elles sont la suite logique aux suites géométriques (on passe facilement de la suite $1{,}08^n$ à la fonction $1{,}08^x$ dans le cas d'une hausse de 8% par an par exemple). La transition est d'autant plus facile à faire que l'on est en plein dans le programme mathématique de l'année en cours.

L'exemple cité, la suite $1{,}08^n$ modélise une hausse annuelle de 8% à chaque étape, l'augmentation est considérée comme se faisant en une seule fois, à l'instant du calcul du bilan annuel. La fonction mathématique $1{,}08^x$ est la fonction continue la plus simple qui passe par tous les points définis par la suite géométrique. Ainsi le nouveau modèle donne le même résultat pour une durée de 7 années entières : $1{,}08^7$ et permet de donner une estimation pour une durée de 7 années et trois mois : le facteur multiplicatif est alors de $1{,}08^{7{,}25}$. On passe alors très facilement à des durées plus courtes et au calcul des intérêts au jour le jour, suivant le modèle des intérêts composés. On pourra proposer la question classique du taux journalier conduisant, suivant ce principe, à un taux annuel de 8%, pour une année de 365 jours. On pourra aussi citer quelques cas où l'hyperinflation conduit à choisir des périodes encore plus réduites (cas de la crise allemande ou, plus récemment, des prix en Yougoslavie pendant une période mouvementée).

Note : indice des prix pendant l'hyperinflation allemande de 1923 :

Juin 1914	Janvier 1921	Janvier 1922	Janvier 1923	Janvier 1924
100	1440	3670	278 900	1 173 200 000 000

De l'heure à la minute puis à la seconde, il n'y a que quelque pas qui se franchissent aisément. On modélise alors l'évolution absolue instantanée, la vitesse d'évolution, en utilisant la dérivée et le taux d'évolution en utilisant la dérivée logarithmique f'/f qui modélise la croissance relative « instantanée ». Dans le cas d'un taux de 8% l'an, avec les intérêts calculés en continu, on a alors une croissance relative de 0,08, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{f'}{f} = 0{,}08 \text{ , c'est-à-dire : } \quad f' = 0{,}08\,f \text{ .}$$

(avec la condition f(0)=1, f(x) représentant le coefficient multiplicateur à utiliser à l'instant x.)

Ainsi la dérivée est proportionnelle à la fonction f qui représente le facteur multiplicatif à appliquer à la quantité initiale.

On trouve alors pour solution : $e^{0{,}08x}$, ce qui donne pour fonction : $1{,}08329^x$, c'est un peu plus que la solution utilisant la suite discrète… Les élèves commenteront.

Comme il l'a été dit précédemment, le modèle ci-dessus conviendra à décrire l'évolution au cours du temps de situations où la croissance relative est constante, citons à titre d'exemples : certains phénomènes financiers, des évolutions d'une population, les ventes ou le chiffre d'affaires d'un représentant de commerce ou d'une petite société. Mais lorsque la durée devient trop grande ou la quantité importante par rapport à l'ensemble du marché un modèle exponentiel amène rapidement à des prévisions dont on est rapidement convaincu qu'elles sont impossibles à réaliser. Un autre modèle est donc alors à rechercher.

7. Modélisation de la part de marché d'une entreprise : retour de la fonction logistique

Pour la part de marché d'une entreprise naissante, on peut imaginer un modèle exponentiel, mais dès que la taille de l'entreprise devient respectable, ce modèle devient inutilisable puisqu'il conduit à une part de marché pouvant dépasser 100%. On va donc chercher une fonction f représentant, en pourcentage du marché, la part que détient l'entreprise étudiée. Elle ne peut pas dépasser 100%. Lors de la création de l'entreprise, en supposant que des choix judicieux ont été faits, la société va se tailler une part du marché à partir de 0 ; en pourcentage, cette part aura d'abord une croissance relative importante. Par la suite, les idées seront moins neuves, la concurrence réagira, la croissance relative sera donc moins élevée, la part de marché continuera à augmenter, mais moins vite, tendant vers les 100%, sans jamais les atteindre. Pour décrire cela, on émet l'hypothèse que la vitesse de croissance, modélisée par la dérivée, est proportionnelle à la fois à la valeur acquise (on pense au modèle de croissance relative) et à l'écart qui sépare la valeur acquise de la valeur maximale possible (ici 100%), en somme, on tient ainsi compte des irréductibles. On aboutit donc à l'équation déjà écrite dans un paragraphe précédent sous la forme : $f' = kf(100 - f)$ où f représente la part du marché détenue par la société étudiée et k est une constante réelle positive ; f(1) représente la part après la première période d'activité, si l'entreprise débute sur le créneau étudié.

On retrouve donc le même modèle que dans le cas de l'évolution des cellules cancéreuses : la fonction logistique.

Cette fonction est souvent utilisée dans l'étude de phénomènes divers mais ayant des variations analogues à celles décrites : on a une fonction à croissance rapide puis lente avec une limite supérieure et la double proportionnalité décrite. On retrouve donc cette fonction dans l'étude de la croissance de certaines populations ou dans l'étude, par exemple du taux d'équipement des ménages dans un bien donné : téléviseur, lave linge, lave vaisselle, magnétoscope, etc. (ce taux n'atteint jamais 100% : il y a des irréductibles qui n'ont pas la télévision ou lavent leur linge à la main (au lavoir municipal ?)). On rencontre donc cette fonction aussi bien en biologie qu'en économie ou en psychologie.

8. Une fonction logistique

Elle est solution de l'équation différentielle : (1) $f' = kf(100 - f)$

On installera une condition initiale adéquate (portant par exemple sur f(1), ou f(0), si ce dernier nombre a un sens. La quantité 100 peut être remplacée par une autre constante positive M, la limite supérieure de f. On supposera donc 0<f<100.

On peut écrire (1) sous la forme : $$\frac{f'}{f(100-f)} = k.$$

On utilise alors l'égalité : $$\frac{1}{f} + \frac{1}{100-f} = \frac{100}{f(100-f)}\ .$$

Donc l'équation (1) peut s'écrire : $$\frac{f'}{f} + \frac{f'}{100-f} = 100k.$$

On reconnaît des dérivées bien connues ; les fonctions f et 100-f étant supposées positives, on obtient donc (pour alléger les notations, on a abusivement écrit f à la place de f(x)) :

$$\ln(f) - \ln(100 - f) = 100kx + c.$$

où c est une constante à déterminer en fonction d'une condition initiale (rappel : k est une donnée du problème). On peut alors écrire : $\ln(\frac{f}{100-f}) = 100kx + c$

On en déduit donc que : $\frac{f}{100-f} = e^{100kx+c}$

On pose $a=e^{100k}$ (c'est une donnée) et $C=e^{c}$ (c'est une constante à déterminée en fonction de la condition initiale.

On a alors : $\frac{f}{100-f} = Ca^{x}$.

Ce qui donne : $f = 100Ca^{x} - Ca^{x} f$

c'est-à-dire $f(1 + Ca^{x}) = 100Ca^{x}$

on obtient donc : $f(x) = \frac{100Ca^{x}}{1 + Ca^{x}}$

On a bien une fonction positive dont la limite est 100 quand x tend vers plus l'infini. La valeur de C est donnée par la condition initiale. On peut à titre d'exercice se posé la question de la limite en moins l'infini (sans signification ici). En divisant par Ca^{x} et en posant K=1/C on obtient une autre expression de f : $f(x) = \frac{100}{1 + Ka^{-x}}$

Cette expression algébrique des fonctions logistiques est plus connue. Comme il l'a déjà été mentionné, 100 peut naturellement être remplacé par une autre constante en fonction du problème étudié. Le soin est laissé au lecteur de traiter quelques études de fonctions de ce modèle ; on trouvera, en annexe un exemple de représentation graphique (elle présente deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses et un point d'inflexion).

9. Annexe : le problème de mathématiques proposé au baccalauréat en série S en juin 2003

Il ne s'agit pas ici d'en faire une étude critique mais d'en décrire quelques éléments. On ne donnera pas l'énoncé que l'on peut trouver dans les annales ou sur le site Internet du ministère.

Il a pour objet "l'étude de deux modèles d'évolution d'une population initiale de N_0 millions de bactéries". Il comporte trois parties :

Partie A : étude des instants qui suivent l'ensemencement. La vitesse d'accroissement des bactéries est alors proportionnelle au nombre de bactéries en présence ; cette partie propose donc de résoudre l'équation : $y' = ay$ sachant que $f(0)=N_0$. On aboutit à la formule : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$, T étant le temps de doublement de la population.

Partie B : étude sur une longue période. On introduit une équation différentielle analogue à celle citée au paragraphe VIII et on en propose une résolution (avec paramètres) qui n'est pas celle indiquée au paragraphe VIII de ce texte.

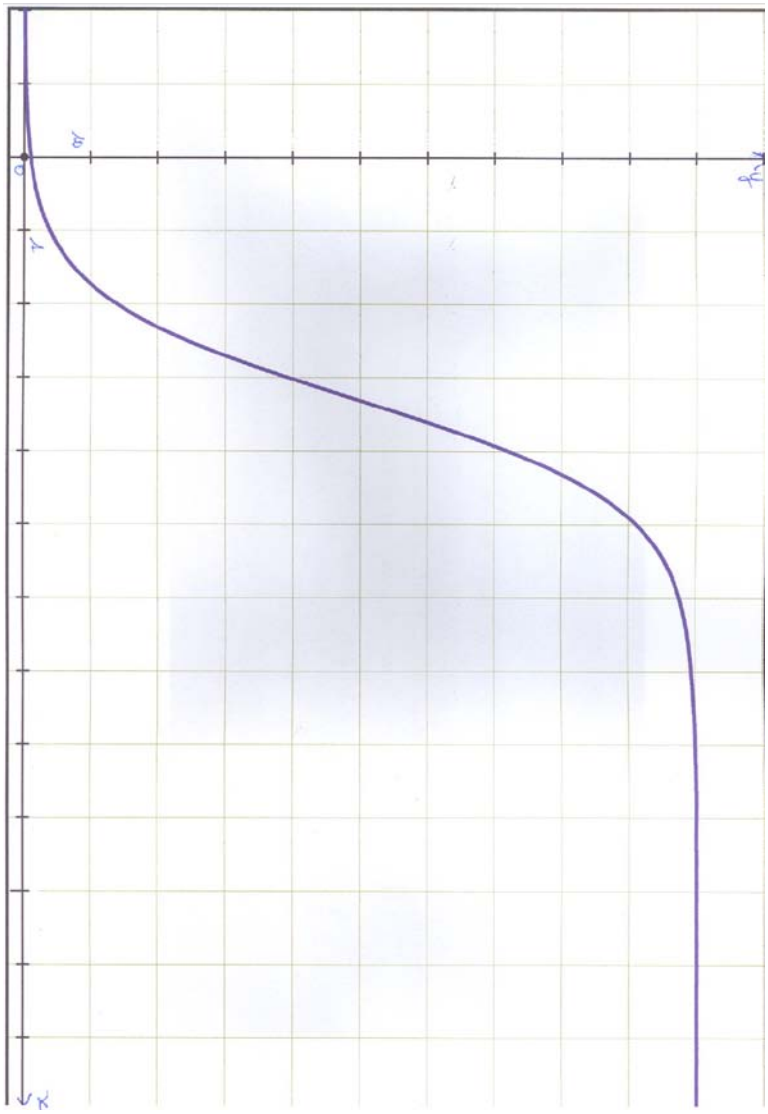
Partie C : application numérique. Un tableau numérique contenant les effectifs de la population à différents instants et un graphique contenant les points du tableau et la représentation de la fonction f de la partie A sont fournis. On demande d'en déduire les constantes a, N_0 et T de la partie A ; puis on demande de prouver que la fonction g de la partie B s'écrit : $g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}$

On demande ensuite de représenter graphiquement g sur le graphique fourni et de comparer les deux modèles.

Ce sujet illustre donc les propos tenus ici. Le choix fait d'une résolution "théorique" avec des paramètres dont les valeurs ne sont déterminées que tardivement a perturbé certains élèves. Une partie comportant une étude statistique et une partie à valeurs discrètes débouchant sur des suites géométriques auraient pu débuter de manière plus concrète ce problème. En remplaçant le décor biologique par un thème économique, en évitant les paramètres superflus, un peut bâtir sur un modèle analogue un problème à destination des élèves de la série économique.

On trouvera, ci-après, la représentation graphique de la fonction g.

Représentation graphique de la fonction g.



PARTIE II

Des fonctions pour les SES

Initiation à la bourse

Marie-Christine KLYS, Lycée Gabriel Voisin, Tournus

1. Comment expliquer le succès boursier concernant les valeurs de la nouvelle économie ?

La déréglementation[1] des marchés financiers, initiée en France en 1986 a favorisé la guerre des prix au moment où les NTIC enregistraient des progrès fulgurants. La puissance de calcul des ordinateurs a été multipliée par deux tous les 18 mois depuis 40 ans soit une multiplication par 100 en 10 ans. (Eco flash n°163 décembre 2001). Face à la généralisation de l'usage de l'informatique, chacun a voulu être assuré de bénéficier de parts de marché afin de répondre à une demande future, d'où la volonté d'investir dans ce secteur d'activité. La libéralisation des marchés financiers a permis aux entreprises de trouver facilement des ressources d'endettement pour financer les investissements dans les NTIC. Ainsi Nescape, en 1995, dont les ventes étaient nulles au moment de son introduction en bourse, a été cotée le jour de sa mise sur le marché, plusieurs milliards de dollars (Eco flash décembre 2001).
La valeur constatée sur les marchés boursiers n'est pas la valeur comptable de l'entreprise mais une évaluation publique de la valeur de l'entreprise. La valeur de l'action reflète la confiance accordée par les actionnaires dans l'entreprise dans sa réalisation future de profits. Un processus qui s'est poursuivi, accéléré, car chacun a cru à la réalité de la nouvelle économie d'où la formation d'une bulle spéculative. L'éclatement de la bulle spéculative[2] s'explique par le fait que les niveaux atteints par les cours boursiers, supposaient de futures hausses de profits incompatibles avec la capacité des entreprises de générer de tels résultats. Le doute s'installe. La défiance incite à se séparer d'actions dont la rémunération future, voire la viabilité est incertaine. En éclatant, la bulle met en évidence des situations de survaleurs. Les survaleurs représentent la différence entre le prix auquel une entreprise achète d'autres entreprises et la valeur comptable de ces entreprises. Ainsi en 2000, le capital de Vivendi a été multiplié par 5 par rapport à 1997 et représente 106 milliards d'euros. Les survaleurs étaient estimées à 47 milliards de dollars cette même année. Pour mémoire, le cours de l'action Vivendi s'établissait au 10 mars 2000 à 150 euros, au 16 août 2002 à 8,62 euros et à 17,46 euros le 7 janvier 2003.

Pour tenter d'appréhender les mécanismes en jeu, il convient de rappeler quelles sont d'une part, les différentes fonctions de la bourse et d'autre part, comment se détermine un prix sur le marché bousier.

---

[1] Déréglementation du marché financier : correspond à un large mouvement visant à la disparition des contraintes législatives nationales comme la suppression de réglementation plafonnant les taux d'intérêt, la suppression des commissions fixes, l'admission dans les bourses nationales de firmes étrangères, la suppression des monopoles des agents de change, etc.

[2] Bulle spéculative : c'est une situation dans laquelle la hausse anticipée des cours entraîne des achats massifs d'actifs qui conduisent à une situation dans laquelle le cours des actions est extrêmement éloigné de la valeur correspondant aux résultats de l'entreprise.

2. Marché financier et bourse des valeurs

La bourse retient de plus en plus l'attention du grand public bien quelle ne s'intéresse pas aux opérations les plus déterminantes sur le marché financier. Le marché financier contribue au financement de l'économie dans la mesure où il facilite la rencontre des agents excédentaires en capitaux à long terme comme les ménages, des entreprises et des investisseurs institutionnels et des agents qui éprouvent des besoins de capitaux à long terme ou de liquidités[3], essentiellement des entreprises l'Etat. Comme aucun intermédiaire financier (banques, institutions financières) n'intervient sur le marché en tant que tel, les échanges s'opèrent directement entre les offreurs et les demandeurs de capitaux à long terme en fonction des besoins.
Le marché financier se divise en deux compartiments liés entre eux. D'une part, le marché financier, au sens strict, dit "marché primaire" sur lequel s'échangent des valeurs mobilières nouvellement émises par des entreprises, par l'Etat ou par des investisseurs institutionnels. D'autre part, le marché secondaire appelé bourse, sur lequel s'échangent des valeurs mobilières déjà émises par ces mêmes intervenants.
Sur le marché financier, à chaque instant, des demandeurs de fonds prêtables émettent des actions ou des obligations qu'ils proposent à la vente auprès des offreurs de fonds prêtables, qui eux désirent rentabiliser leur épargne disponible.
Qu'appelle-t-on fonds prêtables ? Ce sont d'une part, des actions appelées titres, qui confèrent à leurs détenteurs des dividendes, donnant droit à une participation au bénéfice, en tant que propriétaire d'une part du capital de l'entreprise. Cette rémunération est proportionnelle au capital détenu par l'actionnaire. L'action accorde un droit de vote lors des assemblées générales. L'actionnaire peut intervenir, théoriquement, directement sur la manière dont l'entreprise est dirigée. D'autre part, l'obligation. Elle se définit comme un prêt accordé par un investisseur pour une durée déterminée et dont la rémunération appelée intérêt, est fixée lors de la signature du contrat.
Donc, l'opportunité de réaliser de profits futurs attire des capitaux à long terme sur le marché financier.

3. Quel est l'intérêt d'un tel financement ?

Lorsqu'un Etat est confronté à un déficit budgétaire, il peut le financer soit par une création de monnaie nouvelle, source d'inflation ou soit recourir à l'emprunt, en émettant par exemple, des obligations sur le marché financier (obligation d'Etat, bons du Trésor). De cette façon, l'Etat peut recevoir des liquidités nécessaires pour équilibrer son budget sans générer d'inflation.
De même, si une entreprise éprouve des besoins de financement pour investir, elle émet des actions et ou des obligations nouvelles sur le marché financier. S'il s'agit d'actions, elle augmente son capital social, s'il s'agit d'obligations, l'entreprise augmente son endettement à long terme. Cette forme de financement présente l'avantage de ne pas contraindre l'agent émetteur à un remboursement de crédit, dont les annuités diminueraient le bénéfice réalisé par l'entreprise.
Prenons l'exemple de France Telecom (Le Monde du 25 mars 2003).
France Telecom a annoncé lundi 24 mars 2003 le lancement d'une augmentation de capital de 15 milliards d'euros d'actions nouvelles. Dès l'annonce de l'opération, le cours de l'action a chuté de 8% avant de se redresser dans la matinée pour se fixer à 20 euros. La confiance des investisseurs s'est en partie restaurée. Le taux d'émission des actions nouvelles était fixé à 14,50 euros. Le niveau du cours s'est établi en fin de journée s'établit à 17,30 euros. L'opération a réussi. Depuis cette date le cours de l'action France Telecom fluctue autour de 20 euros.
Rappelons que lors de la privation partielle de France Telecom en octobre 1997, le prix de l'action s'élevait à 27,75 euros et le cours a atteint 219 euros en mars 2000, au plus haut de la bulle

[3] <u>Liquidité</u> : capacité d'un actif (obligation, action) à se transformer facilement en monnaie.

spéculative pour se situer à 6,94 euros le 30 septembre 2002 lors de la nomination du nouveau PDG Thierry Breton.
En résumé, l'ouverture du capital d'une entreprise par l'intermédiaire de l'émission d'actions nouvelles permet à l'entreprise par exemple de financer des investissements nouveaux, d'attirer de nouveaux actionnaires, etc.

4. Quel est l'intérêt de ce second marché ou de la bourse ?

Lorsque des entreprises, les Etats, des organismes publics ou privés bénéficient de titres émis sur le marché financier désirent les revendre pour bénéficier de liquidité, par exemple, ils s'adressent au marché secondaire ou à la bourse. La Bourse s'intéresse à l'échange et à la cotation de valeurs déjà émises sur le marché financier dit marché primaire. Le marché de ces titres "anciens" dit "marché de l'occasion" se différencie du marché traditionnel de l'occasion, en ce sens qu'il peut dégager des profits lors de la revente.
En l'absence de marché secondaire, l'actionnaire ou l'obligataire serait quasiment captif de l'entreprise, de l'Etat, etc. dont il détient les titres. Autrement dit, ils rencontreraient beaucoup de difficultés pour revendre, en cas de nécessité, ses valeurs mobilières. L'opportunité d'acheter et de revendre éventuellement des actifs financiers avec un bénéfice, garantit la liquidité des placements, la mobilité des capitaux de long terme et incite les épargnants à s'introduire en bourse

La bourse facilite les opérations de contrôle, d'alliance, de fusions et d'absorption.
Des entreprises changent de propriétaires partiellement ou totalement par des achats d'actions (OPA) ou par des échanges d'actions (OPE) ou les deux à la fois (OPA OPE mixte).
On parle d'OPA lorsqu'une société A désire prendre partiellement ou totalement le contrôle d'une société B en proposant publiquement aux actionnaires de B de racheter leurs actions à un prix supérieur à celui du cours du marché. Si les actionnaires de la société B accepte de vendre leurs actions à la société A, l'OPA est réussie.
De même, dans le cas d'une OPE où l'entreprise a proposé d'échanger des actions de l'entreprise B contre ses propres actions à un prix négocié à l'avance.
Prenons l'exemple de l'OPA/OPE du Crédit Agricole lancée contre le Crédit Lyonnais (Le Monde du 17 décembre 2002) pour illustrer notre propos.
Lors de la privatisation partielle en juin 1999, l'action Crédit Lyonnais valait 25,5 euros et l'établissement était évalué à 7,3 milliards d'euros. En novembre 2002, l'Etat décide de vendre aux enchères publiques le solde de sa part dans le Crédit Lyonnais soit 10,9% du capital du Crédit Lyonnais.
Deux organismes bancaires s'affrontent pour le rachat de l'entreprise. Le Crédit Agricole propose de racheter l'action Crédit Lyonnais 42 euros. BNP Paribas offre 58 euros l'action alors que le cours officiel de l'action Crédit Lyonnais s'élève à 38,94 euros. BNP Paribas remporte le marché et rachète en même temps d'autres actions. Au total, Paribas détient désormais 16,2% du Crédit Lyonnais.
Lundi 2 décembre 2002, le Crédit Agricole réagit et négocie le rachat des titres Crédit Lyonnais disponibles, excepté les 16,2% détenu par Paribas. Selon les termes du projet, le Crédit agricole propose aux actionnaires trois formules possibles. Les actionnaires seront réglés 2/3 en espèces c'est-à-dire37,06 euros l’action Crédit Lyonnais et 1/3 en titres Crédit Agricole ou 56 euros l’action ou intégralement en titres, c’est-à-dire 3,7 actions Crédit Agricole.
Au total, l’action de BNP Paribas a contraint le Crédit Agricole à payer plus cher le rachat de l’entreprise. Le Crédit Agricole offre de racheter les actions du Crédit Lyonnais détenues par Paribas. Si ce dernier accepte, son bénéfice est estimé par les analystes financiers, à plus ou moins 200 millions d’euros.
Sur le marché boursier, des entreprises changent de propriétaires partiellement ou totalement (OPA) par des achats ou des échanges d'actions (OPE). De fait, des entreprises acquièrent d'autres

entreprises sans disposer au préalable de liquidités. Le risque étant pour l'entreprise acheteuse ou échangiste que le cours des actions acquises diminue comme ce fut le cas de Vivendi, de France Telecom et d'autres entreprises. Rappelons ici, que Vivendi a acheté les studios de cinéma avec des actions Vivendi.

En résumé, le marché financier au sens large, attire des capitaux de long terme, autorise le financement des investissements, la croissance des entreprises, etc. et facilite les opérations de concentration, de restructuration, etc.

5. La bourse reflète-t-elle la réalité économique ?

A court terme, les cours de la bourse varient en fonction des informations diffusées dans le grand public, même s'il s'agit d'événements secondaires.
Ainsi lorsque le nouveau PDG de France Telecom, Thierry Breton a été nommé, le cours boursier de France Telecom s'est effondré. L'annonce d'une innovation réalisée par une entreprise s'accompagne généralement d'une hausse du cours de bourse de l'entreprise innovante et parallèlement d'une chute des cours de bourse des entreprises concurrentes. De même, l'annonce de licenciements par une grande entreprise favorise une hausse du cours de bourse de l'entreprise concernée, les investisseurs accordant plus volontiers leur confiance à une entreprise à même de se restructurer, de s'adapter au marché.

A long terme, la bourse reflète essentiellement les anticipations des milieux financiers sur l'évolution conjoncturelle future de l'économie. Si les financiers anticipent une croissance soutenue de l'économie, leur optimisme se manifeste par la progression du CAC 40 en France.

6. Comment est organisée la bourse ?

Les actions des entreprises peuvent être cotées sur un des quatre marchés suivant. La cote officielle, le second marché, le marché hors cote et le nouveau marché.

Le premier marché réunit les grandes entreprises françaises et étrangères disposant d'une capitalisation boursière d'au moins 800 millions d'euros et à même de proposer 25% de leur capital au public sous forme d'actions. Au 31 décembre 2001, 297 entreprises étaient cotées sur le premier (source "l'économie française" 2002 2003 Livre de poche INSEE).
Le premier marché se scinde en deux marchés. Le marché au comptant où le paiement s'effectue immédiatement lors de la transaction contre livraison du titre, et d'autre part le marché à règlement mensuel (RM) où les valeurs sont négociées à terme c'est-à-direqu'il s'écoule un certain laps de temps entre le jour de la négociation, celui où les ordres d'achat et de vente sont passés et le jour du règlement du titre appelé liquidation. Intéressons-nous au RM. Par définition, sur ce marché, les transactions s'effectuent sur une durée d'un mois. Imaginons que M. Boursicot désire acquérir 100 actions Vivaldi à 100 euros l'unité. Pour ce, il doit contacter un agent de change, ce dernier recherche un vendeur acceptant de céder 100 actions Vivaldi à ce prix. Ensuite, entre la date de l'achat des actions le1ier novembre 2003 et le 30 novembre 2003, jour de la liquidation (jour de la livraison effective des titres), M. Boursicot est confronté à trois situations différentes.
Premier cas : Le cours de l'action Vivaldi augmente et passe de 100 euros le 1ier novembre 2003 à 150 euros au 10 novembre 2003. M. Boursicot donne ordre à son agent de change de vendre sur le R.M. ses 100 actions au cours de 150 euros. Le jour de la liquidation, le 30 novembre 2003, l'acheteur du 10 novembre 2003 va payer à M. Boursicot 100 fois 150 euros soit 15 000 euros, et M. Boursicot devra régler à son vendeur du 1ier novembre 2003 la somme de 100 fois 100 euros soit

10 000 euros. Au total, M. Boursicot s'est enrichi de 15 000 euros moins les 10 000 euros soit de 5 000 euros (après déduction des frais de courtage et des impôts).
Second cas : M. Boursicot refuse de vendre ses titres. Il attend la liquidation et règle au 30 novembre 2003 les 10 000 euros. Les conditions de vente des actions sont fixées au jour de la négociation, le vendeur ne peut pas modifier le prix de vente quelles que soient les fluctuations du cours.
Troisième cas : M. Boursicot ne désire pas vendre ses titres que lorsque le cours aura dépassé 160 euros. Le cours n'ayant pas dépassé 150 euros au cours de la période, M. Boursicot conserve ses titres. Au 30 novembre 2003, jour de la liquidation, le cours sur le marché atteint 80 euros. M. Boursicot doit régler à son vendeur du 1er novembre 2003, 10 000 euros et l'acheteur du 30 novembre 2003 doit verser à M. Boursicot, 100 fois 80 euros soit 8 000 euros. M. Boursicot a perdu 2 000 euros auxquels il faut ajouter les divers frais.
Les transactions effectuées sur les 297 sociétés cotées au premier marché, représente plus de 90% du volume traité à la Bourse de Paris.

Le second marché, créé en février 1983, compte 341 sociétés au 31/12/2001, permet à un nombre plus important d'entreprises de bénéficier d'un financement du marché. Leur introduction en bourse s'effectue dans des conditions plus souples. La capitalisation boursière est limitée entre 12 et 15 millions d'euros et une mise à disposition de 10 % du capital au public est demandée.

Le nouveau marché, inspiré du NASDAQ américain (National Association Sécurities Dealers Automated Quotation), a été créé en 1996 pour permettre à de jeunes entreprises innovantes bénéficiant d'un potentiel important de croissance de trouver rapidement des capitaux nécessaires à leur fonctionnement. 153 entreprises étaient cotées sur ce marché au 31/12/2001. L'introduction sur ce marché se déroule de manière spécifique par une augmentation de capital et par l'intermédiaire d'une banque qui joue le rôle d'introducteur-teneur du marché.

Enfin, un marché libre qui contrairement aux trois précédents n'est pas réglementé. Il s'est substitué en 1998 au marché hors cote où l'on offre à la négociation des titres sur des sociétés non inscrites, à un des compartiments réglementés de la bourse. C'est un marché risqué où les acteurs ne bénéficient pas des avantages de la Bourse (pas de contrôle systématique des titres, pas d'informations obligatoires sur les sociétés).

La bourse au sens large inclut d'autres marchés. Au cours des années 80, dans une logique de réduction des incertitudes, avec la déréglementation et la multiplication de l'offre de nouveaux produits financiers ont favorisé l'essor de nouveaux marchés dits dérivés. Nommés ainsi car ils s'intéressent à des contrats dont la valeur dérive de la valeur anticipée d'un actif, d'un intérêt ou d'un indice boursier.
Les produits dérivés sont destinés, à l'image du contrat d'assurance, à couvrir un risque c'est-à-direà se protéger contre des évolutions défavorables. Par exemple, sur le MATIF (Marché à terme international de la finance) créé en 1986, concernés par les produits dérivés du taux d'intérêt, sur indices et sur les matières premières. Le détenteur d'un portefeuille d'obligations, qui anticipe une baisse du cours, va acheter un contrat, qui lui garantit, que même si le cours diminue alors la valeur de son portefeuille ne sera pas diminuée. Les contrats se négocient sous forme de promesse d'achat et de vente à terme, à un prix convenu au moment de la signature du contrat. L'indemnité perçue sera calculée au prix déterminé, au moment de la signature du contrat. Les opérateurs, qui acceptent de garantir ce risque sont des spéculateurs. Il en va de même sur le MONEP, marché des options négociables de Paris créé en 1987 qui s'intéresse au traitement des options sur les actions, sur les indices et sur les actions.

Certains agents ne désirent pas intervenir directement en Bourse. Dans ce cas, ce sont des sociétés financières (banques, assurances, etc.) qui jouent le rôle d'intermédiaires en proposant à leurs clients des produits d'épargne collectifs. Les OPCVM organismes de placements collectifs de valeurs mobilières proposent des portefeuilles collectifs de valeurs mobilières et de titres (SICAV, FCP) dont les titres sont gérés par des institutions financières. Les SICAV (Société d'investissement à capital variable) ne sont ni des actions ni des obligations mais des parts de portefeuille qu'un épargnant peut acheter ou revendre quand il veut. A l'aide des fonds collectés, les gestionnaires d'une SICAV achètent des titres. La valeur de la SICAV correspond à la valeur des titres quelle détient. Comme elles comprennent une part importante d'obligations et de bons du trésor, leur valeur fluctue mais moins fortement que celle des actions. Les mouvements d'entrée et de sortie affectent peu la valeur de la part car celle-ci dépend seulement de la valeur du portefeuille de la SICAV. De même, les Fonds de pension gèrent des FCP (fonds commun de placement) ou épargne constituée par des actifs en vue de la retraite (retraite par capitalisation), les caisses de retraites placent les fonds sur des titres en général peu risqués.

7. Formation d’un prix :

Le prix d’une action

Par définition, le prix résulte de la confrontation d’une offre et d’une demande de capitaux.

Le prix de l’obligation et effet balançoire

Soit une entreprise A, soucieuse de son image de marque accepte de respecter un code de conduite moral, émet des obligations qualifiées d’éthique au cours de 100 euros dont la rémunération est de 6%.

Soit une entreprise B, dont l’objectif est de se procurer des fonds rapidement, afin de réaliser des investissements pour moderniser son appareil productif, émet des obligations au cours de 100 euros dont le taux de rémunération sera de 8%.

En résumé,

Le détenteur de l’obligation A privilégie l’éthique aux dépens de la rémunération.

Le détenteur de l’obligation B privilégie la rentabilité aux dépens de l’éthique.

Mais la situation peut évoluer. Certains détenteurs de l’obligation A peuvent renoncer à leur placement et des détenteurs de l’obligation B peuvent avoir quelques remords de conscience.

Hypothèses :

Obligation A	1/3 conservent l'obligation.
	2/3 vendent l'obligation.
Obligation B	1/3 vendent l'obligation.
	2/3 conservent l'obligation.

2/3 vendent

A B

1/3 vendent

1/3 2/3
1/3 2/3

Lexique :

Actif financier : Action, obligation, titre de créances.
CAC 4O :

Indice représentatif de la valeur des 40 plus importantes sociétés françaises cotées en bourse. C'est une moyenne de leurs cours, pondérée par l'importance relative de leur capitalisation (montant de leurs capitaux mis sur le marché au moment de la définition de l'indice.)

Capitalisation boursière : correspond à la multiplication du nombre d'actions par leur cours boursier.

Pistes pour T.P.E.

Comment se fixe un cours de bourse ? Par exemple en suivant l'évolution temporelle d'un cours de bourse.
La bourse reflète-t-elle l'évolution économique ?
La bourse est-elle un marché de concurrence pure et parfait ?
Quelles sont les fonctions du marché financier dont la bourse ?
La bourse et les mouvements de concentration des entreprises
Etc.

Bibliographie :

SES Première B, éditions Belin, 1994
SES Première ES, éditions Nathan, 1999
"La Bourse, temple de la spéculation ou marché financier", Hatier, 1987
"Bourse et marchés financiers", Cahiers Français n°301, Mars Avril 2001
Le Monde du 17/12/2002 et du 25/03/2003
Alternatives Economiques, Le Cédérom
Eco flash de décembre 2001 n°163
Dictionnaire des Sciences Economiques et sociales, éditions Belin, 2002.

Activités

Jean-Marie THOMASSIN, Lycée Carnot, Dijon

Dans cette partie, sont proposées diverses activités illustrant des propos du chapitre précédent. On a présenté quelques pistes utilisant divers outils mathématiques (pourcentages, lectures graphiques, fonctions, matrices, etc.). Pour certaines des activités numériques proposées, l'utilisation d'un tableur ou d'un outil informatique pourra avantageusement remplacer des calculs que l'on pourrait parfois trouver répétitifs et permettre une exploration fructueuse de certaines situations où l'information chiffrée se révèle abondante.

1. Puissance d'un ordinateur

"La puissance de calcul des ordinateurs a été multipliée par 2 tous les 18 mois depuis 40 ans soit une multiplication par 100 en 10 ans."

On fait l'hypothèse d'une évolution régulière de la puissance de calcul des ordinateurs qui est donc supposée multipliée par 2 tous les 18 mois.

1. Par combien cette puissance est-elle multipliée en 1 an ? En 2 ans ? En 5 ans ?
2. Par combien cette puissance est-elle multipliée en 10 ans ? Le texte propose un arrondi à 100 ; quel est le pourcentage d'erreur commis avec cette approximation ?
3. Par combien cette puissance est-elle multipliée en 40 ans ?
4. Quel pourcentage d'erreur obtient-on en utilisant l'arrondi précédent ?
5. Compléter le tableau suivant :

Durée	0	1 an	18 mois	2 ans	3 ans	6 ans	10 ans	20 ans	30 ans	40 ans
Coefficient multiplicateur	1									
Hausse en pourcentage	0									
Année	1968									

6. Illustrer le tableau précédent par un graphique.
7. Comment mesure-t-on la capacité de calcul d'un ordinateur ?

2. Mémoire d'un ordinateur

Dans un ordinateur, l'information est constituée par une suite d'éléments élémentaires ne représentant que deux éléments possibles notés 0 et 1 ; il s'agit d'une représentation binaire des éléments à traiter. L'élément informatique de base est appelé bit, c'est un support représentant soit un 0 soit un 1 ; on les assemble en chaînes de longueur fixe (formant des mots utilisant donc un alphabet contenant deux symboles). Imposer une longueur fixe permet de repérer chaque mot plus facilement (il faudra lui donner aussi une adresse…).

1. La première structure normalisée imposait l'utilisation de 7 bits consécutifs ; combien pouvait-on alors représenter de symboles avec ce système ? (On a ainsi défini la table des codes dits "ASCII")

2. En fait on utilisait une architecture avec 8 bits, c'est-à-dire un octet ; le 8^{e} bit servait soit de caractère de contrôle soit à construire une table de codes dite "étendue" ; combien cette table contenait-elle de caractères ?

3. On est ensuite passé à 16 bits, puis 32 bits, puis 64 bits ; dans chacun des cas, combien peut-on représenter de caractères différents ?

4. Les informations sont stockées sur divers supports mais toujours sur le même principe : une suite de 0 et de 1 ; l'unité de base est l'octet, chaque octet possède une adresse qui est elle même un octet ou une suite d'octets (rangés dans une table).

   a. Indiquer, en octets, la capacité maximale d'une unité de stockage dont les adresses comportent 8 bits ; 16 bits ; 32 bits ; 64 bits ; 128 bits.

   b. On utilise en général, pour donner les capacités de stockage des multiples de l'octet (copiés sur le système décimal). Ainsi le kilo octet (ko) vaut **1024** octets ; le méga octet vaut 1024 ko, le giga octet 1024 Mo, etc. Convertir les résultats de la question a en utilisant ces unités.

   c. Il arrive souvent que certains commerçants remplacent 1024 par 1000 ; indiquer alors, dans chacun des cas de la question a, la quantité affichée en utilisant cette approximation puis donner l'erreur commise en pourcentage de la valeur réelle. (On pourra regrouper tous ces résultats dans un tableau).

   d. Rechercher l'évolution, depuis 1970 des différentes caractéristiques d'un ordinateur "moyen" de type PC ; on pourra construire un tableau du type suivant :

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1993	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Fréquence du microprocesseur													
Capacité de la mémoire vive													
Capacité d'une disquette													
Disque dur													
Capacité d'une clé USB													

5. Représenter ces évolutions sur différents graphiques.

6. En 1978, la salle informatique d'un lycée comprenait une unité centrale (style armoire de bureau) reliée à 8 consoles et une console imprimante. L'ensemble de la mémoire n'était constituée que par une seule disquette souple d'une capacité totale de 128 kilo-octets ; en 2008 on peut trouver (pour moins cher) un ordinateur portable muni d'un disque dur d'une capacité de 256 giga-octets ; donner le facteur multiplicatif correspondant à cette évolution, la hausse en pourcentage et définir une hausse annuelle moyenne.

Notes : Ces pratiques sont basées sur la suite des puissances de 2.
2^{10}=1024.

3. L'action Vivendi

"En l'an 2000, le capital boursier de Vivendi a été multiplié par cinq par rapport à 1997 et représente 106 milliards d'euros. Le cours de l'action Vivendi s'établissait au 10 mars 2000 à 150 euros, au 16 mars 2002 à 8,62 euros et à 17,46 euros le 7 janvier 2003."

1. Compléter le tableau suivant, en supposant le nombre d'actions inchangé pendant la période d'étude :

Date	1997	10/03/2000	16/03/02	07/01/03
Valeur de l'action en euros		150	8,62	17,46
Coefficient multiplicateur pour le calcul de la valeur suivante				
Evolution en % de la valeur précédente				
Evolution en % de la valeur de 1997				
Valeur boursière totale de la société		106 milliards		

2. Illustrer graphiquement ces données.

3. "Les survaleurs en 2000 sont estimées à 47 milliards ; quelle est alors la valeur réelle estimée de l'entreprise en tenant compte de cette information et la valeur de l'action correspondante (dans l'hypothèse de proportionnalité) ?

4. Rechercher d'autres valeurs de cette action, illustrer graphiquement et commenter.

5. Comparer, en utilisant le graphique fourni en annexe, l'évolution de l'action Vivendi à celle du CAC 40.

4. CAC 40

(CAC signifie Cotation Assistée en Continu). On utilisera le graphique fourni.

1. Décrire les évolutions de cet indice en fonction du temps ; en chercher quelques explications.
2. Pour chacune des années 1992 à 2008, donner, dans un tableau, la valeur de cet indice en début d'année puis son évolution en pourcentage par rapport à la même date de l'année précédente et par rapport à 1992.

5. EADS

Le graphique fourni donne les évolutions en pourcentage par rapport à leur valeur initiale de l'action EADS et de l'indice CAC 40. Décrire et comparer ces évolutions, en chercher quelques explications. Comparer valeurs finales et initiales.

6. L'action Vivaldi

La société informatique Vivaldi produit et vend des logiciels de jeux électroniques pour ordinateurs. On donne, dans le tableau ci-dessous, la valeur en bourse de son action pour les 30 derniers jours de cotation.

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur	18	21	20	23	22	24	34	39	41	45
Date	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Valeur	58	56	42	31	28	30	25	18	12	16
Date	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Valeur	17	23	28	26	32	35	38	36	34	35

1. Représenter graphiquement la valeur de cette action en fonction du temps.

2. Pour chaque date n, déterminer la valeur moyenne des cinq dernières valeurs, c'est-à-dire des valeurs des dates n, n-1, n-2, n-3 et n-4. Construire le graphique associé ; quel est son rôle ?

3. Pour chaque date n, déterminer la moyenne mobile d'ordre 5, c'est-à-dire la moyenne des valeurs des dates n-2, n-1, n, n+1, n+2. Construire le graphique associé ; quel est son rôle ?

4. Donner des avantages et inconvénients de chacune des deux méthodes de lissage précédentes.

5. Voici, par ordre chronologique, quelques événements marquant de la vie de la société :

- Annonce de la sortie d'un nouveau jeu innovant "Le Sacre du Printemps".
- Rumeurs sur l'existence d'une version piratée et gratuite du jeu et sur un retard de la date de sortie.
- Annonce que la version du jeu mise sur le marché sera très innovante et protégée contre le piratage.
- Annonce que, puisque le projet est abouti, on licenciera du personnel.

Indiquer des dates possibles pour ces évènements.

6. Détermination du prix d'une action

La société de forage de tunnels "La Taupe SA" est cotée en bourse. On note x le prix en euros de l'action de cette société et y la quantité, en milliers, d'actions à vendre ou à acheter pour le prix x. On a pu établir que la fonction de demande de cette action est modélisée par : $xy=30$; c'est-à-dire que si le prix de l'action est de x€, il y aura y milliers d'actions qui seront achetées. La fonction d'offre a été estimée à : $y=3(x-5)$, pour $x>5$, c'est-à-dire que si le prix est x€, la formule donne le nombre d'actions qui seront alors proposées à la vente.

1. Représenter, dans un même repère, ces deux fonctions.

2. Pour que les transactions soient réalisées en bourse, il faut qu'il y ait autant d'actions à vendre que d'actions à acheter ; tous les échanges se font au même prix et en public. Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix auquel les échanges se feront puis le nombre d'actions échangées et le volume global de ces transactions.

3. Si le prix avait été fixé par la loi à 20€ (prix plancher), quel aurait été la quantité échangée, le montant des transactions et le type de mécontentement.

4 Si le prix avait été fixé par la loi à 12€ (prix plafond), quel aurait été la quantité échangée, le montant des transactions et le type de mécontentement.

5. La société "La Taupe SA" décide, quel que soit le prix, de racheter 3000 actions de sa société ; déterminer la nouvelle fonction de demande et, graphiquement, la nouvelle cote de l'action.

6. Une société concurrente étudie la vente, quel que soit le prix, de 2000 des actions de la société "La Taupe SA" qu'elle détient ; déterminer la nouvelle fonction d'offre liée à cette stratégie et la cote de l'action qui en découlerait.

7. Suite à une information indiquant un retard certain dans le creusement d'un tunnel, les acheteurs éventuels estiment que l'action a perdu 6€ par rapport à sa valeur estimée ; déterminer la nouvelle fonction de demande et la nouvelle cote.

8 Dans l'hypothèse de la question précédente, les vendeurs acceptent de vendre leurs actions pour 3€ de moins que précédemment ; étudier alors l'état du marché de cette action.

9. Le gouvernent étudie la possibilité d'une taxe de 1€ par action achetée ; quelle sera alors la nouvelle fonction de demande ? Quel outil mathématique permet de la construire à partir de celle déjà initialement connue ? En déduire, sous cette hypothèse, graphiquement la valeur de l'action.

10. Le gouvernent étudie la possibilité d'une taxe de 1€ par action vendue ; quelle sera alors la nouvelle fonction d'offre ? Quel outil mathématique permet de la construire à partir de celle déjà initialement connue ? En déduire, sous cette hypothèse, graphiquement la valeur de l'action.

7. La crise de 1929

1. On a relevé les valeurs suivantes pour un indice boursier :

Année	1922	1923	1924	1926	1928	1929
Indice	70	100	110	150	200	Meilleure valeur 380
Variation en % par rapport à1922						
Variation en % par rapport à l'année précédente						

Illustrer ce tableau par un graphique, compléter en calculant les pourcentages d'évolution demandés et commenter.

2. On a relevé les valeurs du même indice pendant le début de la crise :

Mois d'octobre								
Date	14	15	16	17	18	19	21	22
Indice	345	340	330	335	325	315	310	315

Date	23	24	25	26	28	29	30	31
Indice	300	290	295	285	250	220	250	270

Mois de novembre							
Date	4	6	7	8	11	12	13
Indice	250	225	230	225	210	200	190

Illustrer ce tableau par un graphique ; calculer les pourcentages d'évolution par rapport à la date précédente et par rapport au 23 octobre 1929. Comparer ces valeurs de l'indice à celles données dans la question 1 et commenter. Définir une valeur "moyenne" de cet indice pour chacune des trois lignes (périodes) du tableau ; cette moyenne a-t-elle une réelle signification ? Le 8 juillet 1932, ce même indice était établi à 41,22 points ; en calculer l'évolution par rapport 1928 puis par rapport au 23 octobre et au 13 novembre 1929.

Notes :

Déclaration de Irving Fisher, économiste de l'Université de Yale, le 15 octobre 1929 :

"Les actions ont atteint ce qui semble être un plateau permanent ; dans quelques mois, on verra que les cours sont beaucoup plus hauts que maintenant…"

Déclarations de Roger Babson, statisticien, le 5 septembre 1929 :

"Tôt ou tard, un krach va arriver et il se peut qu'il soit colossal"

"Il y a aujourd'hui 1200 sociétés cotées au New-York Stock Exchange. Si on soustrait de ce total les 40 leaders, on découvre que près de la moitié des actions restantes ont baissé l'année passée…"

(Une moyenne peut donc cacher certaines évolutions….)

Source : Les mots-clés de l'histoire économique ; Gabriel Leconte ; éditions ellipses.

8. Deux types de placements

Un organisme financier propose à ses clients deux types de placements :

- Un placement de type A, orienté vers des actions d'entreprises "ordinaires", connues, "sérieuses", compétitives, solide et un revenu minimum garanti de 5% par an.
- Un placement de type B, orienté vers des actions d'entreprises privilégiant le commerce équitable et le développement durable ; le rendement attendu n'est alors que de 3% par an.

Les conseillers financiers de cet organisme conseillent à leurs clients de diversifier leurs placements ; chaque année, les clients peuvent convertir tout ou partie de leur placement d'un type vers l'autre ; il n'est pas prévue de sortie "anticipée" du système financier ni d'apport complémentaire de la part du client. Les intérêts sont perçus chaque année et ne peuvent pas être ajoutés au capital de ce placement.

Après quelques années d'observation, on a pu constater que :

- 30% des placements de type A sont transformés en placements de type B ;
- 25% des placements de type B sont transformés en placements de type A ;
- les autres placements sont inchangés.

1. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte de 32 millions d'euros placés uniquement selon le type A.
2. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte de 4 millions d'euros placés uniquement selon le type B.
3. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte comprenant 32 millions d'euros placés selon le type A et 4 millions selon le type B.
4. Etant donnée une collecte initiale, on cherche à étudier son évolution au fil des ans. On note a_n le montant du placement de type A après n années et b_n le montant du placement de type B après n années ; a_0 est donc le placement initial de type A réalisé et b_0 le placement initial de type B.

On note P_n le vecteur $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Que vaut $a_{n+1}+b_{n+1}$, pourquoi ?

b. On définit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,25 \\ 0,3 & 0,75 \end{pmatrix}$; justifier l'égalité $P_{n+1}=AP_n$.

c. Exprimer P_1, P_2, P_3, P_4, ………, P_n en fonction de A et P_0.

5. En prenant les données de la question 3 pour valeurs de P_0, explorer, en utilisant une calculette, un tableur ou un logiciel de calculs formels, la suite (P_n).

6. Reprendre et modifier éventuellement le travail précédent lorsque les données connues pour P_0 ne portent que sur la répartition initiale entre les deux types de placements (exemple : 80% des placements se font selon le type A et 20% selon le type B).

9. SICAV

Une société d'aide au placement en commun de fonds en bourse propose à ses clients l'assistance à la gestion d'un portefeuille d'actions. Pour cela, elle a classé les actions du marché en trois types :

- Type A : actions françaises ;
- Type B : actions européennes non françaises ;
- Type C : actions non européennes.

Dans un objectif de minimalisation des risques et de maximalisation des profits, les agents de cette société incitent leurs clients à diversifier leur portefeuille et donc à convertir certaines actions d'un type vers l'autre ; après plusieurs années de conseils avisés, on a pu établir les observations (moyennes) suivantes :

- Devenir des actions de type A : 25% deviennent de type B et 5% de type C.
- Devenir des actions de type B : 30% deviennent de type A et 10% de type C.
- Devenir des actions de type C : 40% deviennent de type A et 15% de type B.

La sortie anticipée du système n'est pas prévue ; les entrant d'une nouvelle année constituent un nouveau fond commun de placement, indépendant (pour les pertes et profits) des précédents et donc sans influence sur les dépôts précédents.

1. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte de 6 millions d'euros placés uniquement selon le type A.

2. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte de 4 millions d'euros placés uniquement selon le type B.

3. Décrire l'évolution sur trois ans d'une collecte comprenant 6 millions d'euros placés selon le type A, 2 millions selon le type B et 1 million de type C.

4. Etant donnée une collecte initiale, on cherche à étudier son évolution au fil des ans. On note a_n, le montant du placement en actions de type A après n années, b_n le montant du placement en actions de type B après n années et c_n le montant du placement en actions de type C après n années ; a_0 est donc le placement initial en actions de type A réalisé, b_0 le placement initial en actions de type B et c_0 celui en actions de type C. On note P_n le vecteur $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer une matrice A telle que : $P_{n+1}=AP_n$.

   b. En prenant les données de la question 3 pour valeurs de P_0, explorer, en utilisant une calculette, un tableur ou un logiciel de calculs formels, la suite (P_n).

5. Reprendre et modifier éventuellement le travail précédent lorsque les données connues pour P_0 ne portent que sur la répartition initiale entre les trois types d'actions (exemple : 70% des placements se font sur des actions type A, 25% selon le type B et 5% sont des actions de type C).

10. Evolutions d'une action

1. Une banque ayant pour emblème un animal sympathique voulait asseoir sa position sur les marchés financiers ; en 2007, elle acheta des actions d'une société financière N… au prix de 72€ l'action. En juin 2008, l'action de la société N… est désormais cotée 20€. Donner, en pourcentage de la valeur initiale, la perte subie. Quel pourcentage de hausse par rapport à la valeur actuelle doit désormais subir la société N… pour retrouver sa valeur initiale ?

2. Une action vaut S€ ; elle perd x% de sa valeur (x élément de [0 ; 100[) ; déterminer en fonction de x le coefficient multiplicateur t(x) nécessaire pour que, en multipliant la valeur actuelle, on retrouve la valeur initiale. Etudier et représenter graphiquement la fonction t(x) sur l'intervalle [0 ; 100[.

3. Une action vaut S€ ; elle perd x% de sa valeur (x élément de [0 ; 100[) ; déterminer le taux f(x) d'augmentation en pourcentage de la valeur actuelle nécessaire pour qu'elle retrouve sa valeur initiale. Etudier et représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle [0 ; 100[.

4. Une personne a acheté, lors d'une augmentation de capital, une action de la société Eurotunnel 25F ; on la lui a racheté 1 centime d'euro ; donner le pourcentage de perte.

5. Une action passe de 20€ à 30€ ; quelle est le pourcentage de hausse ; quel pourcentage de baisse maximum ne fera pas perdre d'argent à l'actionnaire ?

6. Une action vaut S€ ; elle gagne x% de sa valeur (x>0) ; déterminer le taux f(x) de baisse en pourcentage de la valeur actuelle nécessaire pour qu'elle retrouve sa valeur initiale. Etudier et représenter graphiquement cette fonction.

Annexes graphiques

Exercice III – Vivendi et le CAC 40

Exercice IV – Le CAC 40

Exercice V – EADS et le CAC 40

PARTIE IV

Mathématiques financières

Mathématiques financières.

Michel PLATHEY, lycée Hyppolite Fontaine, Dijon

1. Introduction. Le problème.

Ma voiture commence à se faire vieille. Elle n'est plus à la mode. De nouveaux modèles sont apparus, qui me font envie. Mais je n'ai pas d'argent. Je vais donc contracter un prêt auprès de ma banque habituelle: le prêt classique. Cet emprunt sera remboursé par des versements constants au début de chaque mois. L'employé(e) de ma banque propose un taux très intéressant, dit-il (elle). Car le taux est faible. Il n'y a pas plus faible. Puis l'ordinateur va donner immédiatement le montant du versement mensuel, fonction bien sûr taux de l'emprunt, mais aussi de la somme empruntée et du nombre de mensualités. Est-ce dans mes possibilités? Oui, si le total des remboursements mensuels de mes différents emprunts ne dépasse pas le tiers de mon revenu mensuel. Je m'ébahis. Quelle merveille que la technique! Le montant du remboursement mensuel est tout de suite donné; on me fournit immédiatement l'échéancier complet de ma dette. Comment la machine fait-elle ? Quelles sont enfin les mathématiques sous jacentes? Est-il possible d'autre part, pour un emprunteur n'ayant pas sous la main une machine à calculer, de pouvoir cependant, de tête ou à la rigueur avec papier et crayon, de pouvoir obtenir un ordre de grandeur de son remboursement mensuel?

2. La ou les formules générales d'un emprunt ou d'un prêt à intérêts composés.

- *Première formule fondamentale. Cas de l'emprunteur.*

On considère un emprunteur, empruntant une certaine somme auprès d'un créancier (généralement une banque) et qui rembourse la somme empruntée à intervalles réguliers, par versements constants, le calcul de chaque versement se faisant en tenant compte de la somme empruntée, du nombre de périodes de remboursement et du taux d'intérêt (loyer de l'emprunt).

Soient:

- c la somme empruntée,
- n le nombre de périodes de remboursement (dans l'introduction, et dans tous les exemples donnés ci-après, cette période est le mois),
- i le taux d'intérêt pour chaque période,
- a le versement devant être effectué au début de chaque période. Le premier versement est effectué à la date 1, la date 0 étant le moment de l'emprunt.

Alors $$a = c.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Preuve.

Les dates 1, 2, …, n sont les moments du versement de a €, versements constants, 1 période, 2 périodes, …, n périodes après la signature de l'acte d'emprunt.

Le prêteur (la banque) fournit donc un capital de c €, à la date 0, au taux i par période, pendant une durée de n périodes. La valeur acquise par le prêt, à l'instant n, valeur qui serait remboursée à la banque, si ce remboursement se faisait en une seule fois à la date n est :

$$c.(1+i)^n.$$

Mais les remboursements se font progressivement.
Le premier versement, de a € se faisant à la date 1, a pour valeur acquise à la date n :

$$a.(1+i)^{n-1};$$

le deuxième versement, de a € se faisant à la date 2, a pour valeur acquise à la date n :

$$a.(1+i)^{n-2};$$

… ;
celui fait à la date k, de a € aussi, a pour valeur acquise à la date n :

$$a.(1+i)^{n-k}.$$

La somme des n versements a pour valeur acquise à la date n:

$$a.(1+i)^{n-1}+a.(1+i)^{n-2}+\ldots+a.(1+i)^{n-k}+\ldots+a.(1+i)^0 =$$

$$a.\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{n-k} =$$

$$a.\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{k} =$$

$$a.\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} =$$

$$a.\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

La dette sera alors éteinte à la date n si la valeur actuelle à la date n du prêt consenti par la banque est égale à la valeur actuelle à la date n de la somme des mensualités versées par l'emprunteur aux dates 1, 2,…, n. Ce qui donne l'équation :

$$(E_1): c.(1+i)^n = a.\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

D'où $$a=\frac{c.(1+i)^n}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}=\frac{c.i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1}.$$

Donc la mensualité constante versée au début de chaque période, de la date 1 à la date n est égale à

$$a = c.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1}.$$

L'équation

$$(E_1): c.(1+i)^n = a.\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

relie quatre quantités c, i, n et a.
Elle permet de connaître l'une d'entre elles dès que l'on connaît les trois autres.
On se rend compte que les calculs demandés pour trouver l'une de ces quantités en fonction des trois autres, devaient, avant l'avènement des calculateurs électroniques, poser des problèmes difficiles.

- *Deuxième formule fondamentale. Cas du prêteur.*

On considère cette fois un particulier effectuant un placement sur un compte en banque. Celui-ci verse une somme initiale, puis, à intervalles réguliers, il place sur son compte une valeur donnée, constante. Ces différents placements lui rapporteront des intérêts qui s'ajouteront au capital placé (intérêts cumulés). Quelle sera alors la valeur du capital placé à une date donnée ?

Soient:

- S la somme versée à la date 0,
- a le versement constant effectué au début de chaque période (le premier versement est effectué à la date 1),
- n le nombre de périodes de versement (cette période est souvent le mois),
- i le taux d'intérêt pour chaque période,
- u_n la valeur acquise à la date n par les différents versements, juste après le dernier versement.

Alors on a la relation

$$(E_2): u_n = (S+\frac{a}{i}).(1+i)^n - \frac{a}{i}.$$

Preuve.

Je vais user ici d'un autre raisonnement, qu'on rencontre dans certains exercices proposés aux élèves de premières ou de terminales.

On a :

$u_0 = S$;

$u_1 = S.(1+i)+a$. C'est la valeur acquise à la date 1 par le placement de S € à la date 0 et de a € à la date 1;

$u_2 = u_1.(1+i)+a$. C'est la valeur acquise à la date 2 par la valeur de u_1 € acquise par mon compte à la date 1 et le placement de a € à la date 2 ;

…;

$u_{n+1} = u_n.(1+i)+a$. C'est la valeur acquise à la date $n+1$ par la valeur de u_n € acquise par mon compte à la date n et le placement de a € à la date $n+1$.

La suite $(u_n)_{n\in N}$ est donc définie par la récurrence :

$$u_0 = S;$$
$$u_{n+1} = u_n.(1+i)+a.$$

Cette suite est arithmético-géométrique. On la résout comme d'habitude. On a

$$u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g(x) = (1+i).x+a$$

Pour trouver l'expression de u_n en fonction de n, il faut d'abord chercher les points fixes de g. On a :

$$(g(x)=x) \Leftrightarrow ((1+i)x+a=x) \Leftrightarrow (i.x=-a) \Leftrightarrow (x=-\frac{a}{i}).$$

g a un seul point fixe $x_0 = -\frac{a}{i}$.

On définit ensuite la suite $v_n = u_n - x_0 = u_n + \frac{a}{i}$. Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{a}{i} = u_n.(1+i)+a+\frac{a}{i} = u_n.(1+i)+a.\frac{(1+i)}{i} = (1+i).(u_n+\frac{a}{i}).$$

Donc : $v_{n+1} = (1+i).v_n$.

La suite v est géométrique de raison $1+i$ avec

$$v_0 = u_0 + \frac{a}{i} = S + \frac{a}{i}.$$

Donc:

$$v_n = (S + \frac{a}{i})(1+i)^n$$

et

$$(E_2): u_n = v_n - \frac{a}{i} = (S + \frac{a}{i})(1+i)^n - \frac{a}{i}.$$

Cela constitue la formule (E_2) de la valeur acquise u_n à la date n par mes placements en fonction de S, a, i, n.

Remarquons que, avec $S = 0$, on a: $u_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Si, au lieu de faire ce placement, avec $S = 0$, j'avais pu placer à la date 0 une somme c, sans autre placement ultérieur, sa valeur actuelle à la date n aurait été $c.(1+i)^n$.

Les deux placements sont équivalents si $c.(1+i)^n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ et on retrouve l'équation (E_1).

- *Quelques applications numériques et exemples relativement à la formule* (E_2).

Exemple 1.

$$S = 1000\,;\, a = 500\,;\, i = 0,5\%\,;\, n = 12.$$

Je place 1 000€ à l'ouverture du compte puis tous les mois pendant 12 mois au taux mensuel de 0,5% une somme de 500€.
Quelle est la valeur acquise par ce plan d'épargne à l'instant après le dernier versement?

Réponse.
Le montant total des versements pendant l'année (durée qui sépare le premier versement de 1000€ du dernier versement de 500€) a été de

$$1000 + 12 * 500 = 7000.$$

Puis la valeur acquise u_{12} par mon compte après le douzième versement de 500€ est:

$$u_{12} = (1000 + \frac{500}{0,005})(1,005)^{12} - \frac{500}{0,005} \approx 7229,46.$$

La valeur acquise par ce plan d'épargne à l'instant après le dernier versement est de 7220,46€.
Ce placement a fourni un intérêt global de 229,46 € pour l'année.

Exemple 2.

$$S = 1000\,;\, a = 500\,;\, i = 0,5\%.$$

Je place une somme initiale de 1 000€ puis ensuite chaque mois 500€. Le taux mensuel des intérêts est de 0,5%.Combien de mois de placement faut-il pour obtenir un capital de 30 000 €?

Réponse.
Ce problème revient à résoudre l'équation

$$(E): (1000 + \frac{500}{0,005}).(1,005)^n - \frac{500}{0,005} = 30000.$$

On a : $$(E): (1,005)^n = \frac{130000}{101000} \approx 1,287.$$

Si on est en classe de première, on peut résoudre cette équation par dichotomie et en classe de terminale, on peut utiliser la fonction logarithme. On trouve alors $n \approx 51$, c'est-à-dire 4 ans et 3 mois.
Je dois donc placer une somme initiale de 1000€ puis ensuite chaque mois 500€ pendant 51 mois pour avoir 30 000€ sur mon compte.

Avec une machine à calculer simple, même non scientifique, le calcul de u_n est très facile, comme pour toute suite récurrente du type $u_{n+1} = g(u_n)$. Il suffit d'effectuer les instructions :

S (ici $S = 1000$) *exécute* : entrée de u_0 ;
ANS * (1 + *i*) + *a* (ici $i = 0,005; a = 500$) *exécute* : calcul de u_1;
exécute : calcul de u_2 ;
.
.
.
exécute : calcul de u_n .

Cette méthode permet aussi de répondre rapidement à la question posée, de façon très élémentaire. Il suffit de compter le nombre d'exécutions jusqu'à ce qu'on atteigne 30 000.

<u>*Exemple 3.*</u>

$$S = 1000 \,;\, a = 500 \,;\, n = 30 \,.$$

Je place une somme initiale de 1 000€ puis ensuite chaque mois 500€ pendant 30 mois.
Quel doit être le taux mensuel de placement si je veux disposer à la fermeture du compte d'une somme de 18 000 € ?

Réponse.
Il faut résoudre l'équation

$$(E) : u_{30} = 18000 = (1000 + \frac{500}{i}).(1+i)^{30} - \frac{500}{i} \,.$$

Résolvons d'abord cette équation par dichotomie.
Pour cela, je considère la fonction

$$f(i) = (1000 + \frac{500}{i}).(1+i)^{30} - \frac{500}{i} \text{ pour } i > 0 \,.$$

Il est pratiquement très évident que *f* est une fonction croissante de *i*.

Pour le prouver mathématiquement, on pourrait considérer deux taux i_1 et i_2 avec $i_1 < i_2$ et les suites u_n^1 et u_n^2 des valeurs acquises par les deux placements, l'un au taux mensuel i_1, l'autre au taux mensuel i_2 , avec dans les deux cas $S = 1000 \,; a = 500$ à la date *n*.
On a:

$$\begin{array}{l} u_0^1 = S; u_0^2 = S. \\ u_{n+1}^1 = u_n^1.(1+i_1) + a; u_{n+1}^2 = u_n^2.(1+i_2) + a \end{array} .$$

On considère l'hypothèse de récurrence :

$$(HR_n) : u_n^1 \leq u_n^2 \,.$$

Alors :

$$(HR_0) : u_0^1 \leq u_0^2 \text{ est vraie car } S \leq S \,.$$

$$\text{Si } (HR_n): u_n^1 \le u_n^2 \text{ est vraie}$$

$$\text{alors } u_{n+1}^1 = (1+i_1).u_n^1 + a \le u_{n+1}^2 = (1+i_2).u_n^2 + a$$

car la fonction affine $x \mapsto (1+i).x + a$ est croissante puisque $1+i > 0$.

$$\text{Donc } (HR_{n+1}): u_{n+1}^1 \le u_{n+1}^2 \text{ est vraie.}$$

$$\text{Donc } (HR_n): u_n^1 \le u_n^2 \text{ est vraie pour tout } n \in N.$$

Elle est en particulier vraie pour $n = 30$.
Donc $f(i_1) \le f(i_2)$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$.
On peut remarquer que la justification par récurrence de la croissance de la fonction f est plus simple que l'étude du signe de la dérivée de la fonction

$$f(i) = (1000 + \frac{500}{i}).(1+i)^{30} - \frac{500}{i}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&f(0,01) \approx 18740,3 > 18000\\
&f(0,005) \approx 17301,4 < 18000\\
&f(0,007) \approx 17859,6 < 18000\\
&f(0,008) \approx 18147,3 > 18000\\
&f(0,0075) \approx 18002,7 \approx 18000\\
&f(0,0074) \approx 17974,0 < 18000
\end{aligned}.$$

Donc la solution i_0 de (E) est comprise entre 0,0074 et 0,0075.
Le taux mensuel du placement est alors de 0,75% ce qui donne un taux annuel de

$$(1{,}0075)^{12} - 1 \approx 9{,}38\,\%.$$

Pour disposer à la fermeture du compte d'une somme de 18000 €, le taux annuel de placement doit être de 9,38%?
On peut dire qu'en 6 pas, cette méthode de dichotomie nous a donné 2 chiffres significatifs pour la résolution approchée de (E).
On sait que cette méthode est simple et pratique mais elle est lente. Puisque $2^3 = 8$ et $2^4 = 16$, il faut entre 3 et 4 pas supplémentaires pour gagner une décimale.

Les finances sont chose très sérieuse. Pour avoir plus de chiffres significatifs, on va affiner notre résultat en utilisant la méthode de Newton de résolution approchée des équations dont on sait que, dans des conditions favorables, elle fournit une suite de valeurs approchées de i_0 qui converge très rapidement vers i_0 : chaque itération fournit 2 décimales supplémentaires.
Auparavant, je regarde ce que donne l'application de la touche SOLVE d'une calculatrice. Mon ancienne TI92 ne peut pas répondre à la question.

Utilisation de la méthode de Newton.
Celle-ci repose sur le théorème suivant:
Soit h une fonction deux fois continûment dérivable sur un intervalle I de réels et soit $\alpha \in I^\circ$ (intérieur de I) tel que $h(\alpha) = 0; h'(\alpha) \ne 0$. Il existe un réel η tel que pour tout $x_0 \in [\alpha - \eta; \alpha + \eta]$, la suite $(x_n)_{n \in N}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ converge vers α.

Ici :

$$h(x) = (1000 + \frac{500}{x}).(1+x)^{30} - \frac{500}{x} - 18000 .$$

$$h'(x) = -\frac{500.(1+x)^{30}}{x^2} + 30.(1000 + \frac{500}{x}).(1+x)^{29} + \frac{500}{x^2} .$$

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} .$$

On part de $x_0 = 0{,}0075$ (meilleure approximation de la solution de l'équation à résoudre) et on obtient :

$$x_1 = 0{,}007490534584;$$
$$x_2 = 0{,}007490530098;$$
$$x_3 = 0{,}007490534514;$$
$$x_4 = 0{,}007490529472;$$
$$x_5 = 0{,}007490537782;$$
$$x_6 = 0{,}007490531767;$$
$$x_7 = 0{,}007490531767.$$

On a donc $i = 0{,}007490531767$ à 10^{-12} près et $I = (1+i)^{12} - 1 \approx 0{,}0936835522$.
Donc, à 10^{-5} près, le taux annuel de l'intérêt est de 9,368%.

Une autre méthode standard de résolution approchée des équations est la méthode dite du point fixe ou des approximations successives. Elle consiste à remplacer l'équation donnée $(E): f(i) = 18000$ par une équation équivalente de la forme $(E): k(i) = i$ où la fonction *k* sera •-contractante, le réel • étant de module strictement inférieur à 1. On a le théorème suivant :

<u>Théorème du point fixe pour les applications contractantes :</u>

Si dans l'intervalle $[a;b]$, une fonction *g* vérifie les conditions suivantes :

- $(x \in [a;b]) \Rightarrow (g(x) \in [a;b])$;
- g est une application strictement contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda : 0 \leq \lambda < 1$ tel que, $\forall x \in [a;b], \forall y \in [a;b]$, on ait : $|g(x) - g(y)| \leq \lambda.|x - y|$.

Alors, quel que soit $x_0 \in [a;b]$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution *l* de l'équation $x = g(x)$ avec $l \in [a;b]$.
On a aussi le théorème suivant, plus facile à mettre en œuvre :

<u>Théorème :</u>
Soit l une solution de l'équation $x = g(x)$ avec g' continue. Si $|g'(l)| < 1$, alors il existe un intervalle $[a;b]$ contenant l tel que la suite récurrente définie par $x_0 \in [a;b]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers *l*.

Utilisation de la méthode du point fixe.

Il s'agit donc de trouver *i* tel que

$$(E) : (1000 + \frac{500}{i}).(1+i)^{30} - \frac{500}{i} = 18000 .$$

Cette équation s'écrit successivement :

$$(E):(1000+\frac{500}{i}).(1+i)^{30}-18000=\frac{500}{i};$$

$$(E):\frac{(1000+\frac{500}{i}).(1+i)^{30}}{500}-\frac{18000}{500}=\frac{\frac{500}{i}}{500};$$

$$(E):(2+\frac{1}{i}).(1+i)^{30}-36=\frac{1}{i};$$

$$(E):i=\frac{1}{(2+\frac{1}{i}).(1+i)^{30}-36}=g(i).$$

Espérons que les conditions du théorème du point fixe soient bien vérifiées et utilisons la méthode des approximations successives décrite par ce théorème. Il faut donc calculer les termes successifs de la suite $(i_n)_{n\in N}$ définie par

$i_0=0{,}0075$, terme le plus précis obtenu avec la méthode de dichotomie, et par

$$i_{n+1}=g(i_n)=\frac{1}{(2+\frac{1}{i}).(1+i)^{30}-36}.$$

On constate alors que, dans ce cas précis, la suite obtenue converge très lentement. Ce manque de performance provient du calcul suivant :

$$g'(x)=-\frac{-\frac{1}{x^2}.(1+x)^{30}+30.(1+x)^{29}.(2+\frac{1}{x})}{((2+\frac{1}{x}).(1+x)^{30}-36)^2}$$

$$=-\frac{(1+x)^{29}}{((2+\frac{1}{x}).(1+x)^{30}-36)^2}.(-\frac{1+x}{x^2}+30.(2+\frac{1}{x})$$

$$=-\frac{(1+x)^{29}}{((2+\frac{1}{x}).(1+x)^{30}-36)^2}.\frac{60.x^2+29.x-1}{x^2}.$$

On a alors $g'(0{,}0075)\approx 0{,}96756$ ce qui est trop près de 1. Cela explique la mauvaise qualité, dans ce cas, de la méthode du point fixe. En résolvant l'inéquation $(I):0{,}96756^n\leq 0{,}1$, on obtient $n\geq 70$. Cela signifie qu'il faut 70 itérations pour gagner 1 décimale.

Exemple 4.

$$c=10000;a=500;n=24.$$

J'emprunte une somme de 10 000€ et je rembourse chaque mois 500€ pendant 24 mois. Quel est alors le taux mensuel de l'intérêt ?

Réponse.

Il faut donc calculer le réel *i* tel que :

$$(E):500=\frac{10000.i.(1+i)^{24}}{(1+i)^{24}-1}.$$

Par la méthode de dichotomie, on obtient en 4 étapes $i\approx 0{,}015$ ce qui correspond à un intérêt annuel $I\approx 12.i\approx 12*0{,}015=0{,}18=18\%$.

On a :

$$(E) : (1 = \frac{20.i.(1+i)^{24}}{(1+i)^{24}-1}) \Leftrightarrow (\frac{1}{i} = \frac{20.(1+i)^{24}}{(1+i)^{24}-1}) \Leftrightarrow (i = \frac{(1+i)^{24}-1}{20.(1+i)^{24}} = g(i)).$$

$$g(x) = \frac{(1+x)^{24}-1}{20.(1+x)^{24}} = \frac{1}{20}.\frac{(1+x)^{24}-1}{(1+x)^{24}} = \frac{1}{20}.(1-(1+x)^{-24});$$

$$g'(x) = \frac{1}{20}.(24.(1+x)^{-25}) = 1{,}2.(1+x)^{-25}$$

Donc

$$g'(0{,}015) \approx 0{,}827.$$

Ce résultat n'est pas excellent. Il est néanmoins bien meilleur que dans le cas précédent car un calcul analogue montre qu'il ne faut alors que 12 itérations pour gagner une décimale.
Les calculs effectifs donnent un résultat à 10^{-12} près en 80 itérations. On obtient :

$$i \approx 0{,}015130843884.$$

L'intérêt annuel est donc égal à

$$I = (1+i)^{12} - 1 \approx 0{,}197469 \approx 19{,}75\%.$$

3. *La formule simplifiée d'un emprunt au taux annuel I, à intérêts composés, à mensualités constantes.*

On appelle toujours *i* le taux d'intérêt mensuel, *I* étant le taux annuel.
On a, par un calcul approché:

$$1 + I = (1+i)^{12} \approx 1 + 12.i \text{ pour } i \text{ petit.}$$

$$\text{Donc } I \approx 12.i \text{ d'où } i \approx \frac{I}{12}.$$

Les taux annuels pratiqués varient entre 3% et 12% et on a alors $\frac{3\%}{12} \leq i \leq \frac{12\%}{12}$.

Donc : $0{,}0025 \leq i \leq 0{,}01$.
On considérera donc que *i* est petit.
Alors :

$$(1+i)^n \approx 1 + n.i + \frac{n.(n-1)}{2}.i^2$$

et donc

$$(1+i)^n - 1 \approx n.i + \frac{n.(n-1)}{2}.i^2 = n.i.\left(1 + \frac{n-1}{2}.i\right).$$

Puis

$$c.i.(1+i)^n \approx c.i.(1+n.i).$$

Donc

$$a = \frac{c.i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \approx c.\frac{i.(1+n.i)}{n.i.\left(1+\frac{n-1}{2}.i\right)} \approx \frac{c}{n}.(1+n.i)\left(1-\frac{n-1}{2}.i\right) \approx \frac{c}{n}.\left(1+n.i-\frac{n-1}{2}.i\right).$$

Puis

$$a \approx \frac{c}{n}.\left(1+\frac{n+1}{2}.i\right) = \frac{c}{n} + \frac{c}{2}.\frac{n+1}{n}.i.$$

Supposons que le nombre de mensualités soit grand, de sorte que $\frac{n+1}{n}$ soit proche de 1. Cela entraîne que l'on a :

$$a \approx \frac{c}{n} + \frac{c}{2}.i = \frac{1}{n}.\left(c + \frac{c}{2}.n.i\right).$$

Or, si on note N le nombre d'années de remboursements, $N = \frac{n}{12}$ et puisque $I \approx 12.i$, on obtient

$$N.I \approx \frac{n}{12}.12.i = n.i,$$

donc

$$a \approx \frac{1}{n}.\left(c + \frac{c}{2}.N.I\right).$$

$\frac{c}{2}.N.I$ est alors le coût approché de l'emprunt, c'est-à-dire le montant total des intérêts versés.

Ainsi, pour calculer une valeur approchée du montant de chaque mensualité, il faut augmenter le montant du capital emprunté c de la quantité $\frac{c.N.I}{2}$ et ensuite diviser par le nombre de mensualités. La quantité $\frac{c.N.I}{2}$ est alors une valeur approchée du coût total de l'emprunt.

La valeur obtenue n'est qu'une valeur approchée. Elle ne peut en aucun cas se substituer au résultat obtenu avec la formule exacte. Cela est d'autant plus vrai que le raisonnement précédent ne fournit pas d'ordre de grandeur de l'erreur commise en passant de la formule exacte à la formule simplifiée. Il faut donc prendre cette formule approchée pour ce qu'elle est : un moyen rapide et à portée du seul cerveau humain de se faire une idée préalable du montant du remboursement mensuel d'un emprunt.

Exemples.

Exemple 1.

J'emprunte 20 000 € au taux annuel de 8% sur 5 ans, les remboursements constants se faisant mensuellement. Calculer une valeur approchée du montant de chaque mensualité.

Réponse.
Le montant de chaque mensualité sera environ de :

$$\frac{1}{60}.\left(20000 + \frac{20000 * 5 * 0,08}{2}\right) = \frac{1}{60}.\left(20000 + 4000\right) = 400.$$

Comparons avec le calcul exact :
Le taux mensuel i de placement est de :

$$i = \sqrt[12]{1,08} - 1 \approx 0,0\ \ 0$$

La mensualité a constante vaut donc :

$$a = 20000.\frac{i.(1+i)^{60}}{(1+i)^{60} - 1} \approx 40\ ,80.$$

L'approximation obtenue apparaît très bonne (erreur relative de $\frac{-2,86}{402,86} \approx -0,007$) et permet de plus de voir directement le coût approximatif de l'emprunt : 4 000 €.
Voyons maintenant un cas qui va se révéler beaucoup moins favorable.

Exemple 2.

Soit un achat plus important nécessitant un emprunt de 150 000 € au taux annuel de 10% sur 20 ans, les remboursements constants se faisant mensuellement.
Avec le calcul approché, chaque mensualité devrait se monter environ à :

$$\frac{1}{20*12}.(150000+\frac{150000*20*0,1}{2}) = \frac{1}{240}.(150000+150000) = 1250 .$$

Le calcul exact donnerait 1404,96.

L'approximation obtenue est ici mauvaise (erreur relative de $\frac{-154,96}{1404,96} \approx -0,11$).
L'ordre de grandeur est cependant toujours valable.

On voit aussi, il semble que la valeur approchée est inférieure à la valeur donnée par la formule exacte.

Et on se rend compte ainsi que la somme totale remboursée s'élève à plus du double de la somme empruntée.

<u>Remarque :</u> souvent, les taux d'emprunt augmentent avec la durée de l'emprunt. Alors PRUDENCE.

4. On revient aux calculs exacts sur ordinateur : constitution du tableau d'amortissement d'un emprunt avec mensualités constantes.

J'en donne ici un exemple, exécuté sur tableur.

Je suis censé emprunter 15 000 € sur 4 ans au taux annuel de 8% avec remboursements mensuels constants.

Sur le tableau joint ci-après, je note :

- CE : le capital emprunté, ici 15000 € (cellule A2);
- TAI :le taux annuel des intérêts, ici 0,08=8%(cellule B2) ;
- TMI :le taux mensuel correspondant, ici calculé avec la formule exacte =(1+TAI)^(1/12)-1(cellule C2) ;
- NA :le nombre d'années de remboursement, ici 4 (cellule D2);
- NM :le nombre de mois, calculé avec la formule =NA*12(cellule E2) ;
- RM :le remboursement mensuel, ici calculé avec la formule exacte =CE*TMI*(1+TMI)^NM/((1+TMI)^NM-1) (cellule F2);
- RT :le remboursement total effectué =CE*(1+TMI)^NM(cellule **G**2).

Les valeurs CE, TAI et NA sont les seules à introduire. Les valeurs TMI, NM, RM et RT se calculent automatiquement.

La colonne VA donne la valeur acquise à chaque début de mois de la somme de tous les versements déjà effectués depuis le début jusqu'au mois correspondant inclus. A la date NM, c'est-à-dire à la fin, le nombre indiqué coïncide avec le nombre RT.

La colonne RP désigne ce qui reste à payer : RP=RT-VA.

La colonne CR désigne le capital restant à rembourser.

La colonne CRM désigne la partie « capital remboursé » dans la mensualité.

La colonne CP désigne la partie du capital effectivement remboursée depuis le début jusqu'au mois correspondant inclus. A la date NM, ce nombre doit être égal à CE.

<u>Calculs effectifs.</u>

Dans la colonne A, intitulée P pour « périodes de remboursement », j'introduis 1 et 2 en cellules B5 et B6 . Je les sélectionne ensuite et j'étire cette colonne vers le bas à l'aide de la poignée de recopie jusqu'à 48.

Dans la colonne B, intitulée RM, je recopie en cellule B5 le nombre RM(=$F$2) et j'étire ce nombre jusqu'à la cellule B52.

Dans la colonne C, intitulée VA, j'écris =B5 en C5 puis =C5*(1+$C$2)+B6 en C6 et j'étire ce calcul avec la poignée de recopie jusqu'en C52.
On a ainsi la suite des valeurs acquises aux différentes dates de versement des sommes totales versées jusqu'à cette date. A la date 48, on obtient RT.

Dans la colonne D, intitulée RP, j'écris =$G$2-C5 en D5 étirée jusqu'en D52 pour avoir la somme des valeurs acquises à la date 48 de la somme restant à rembourser à la date considérée.

En E5, j'écris =A2-(B5-A2*C2)
En E6, j'écris =E5-(B6-E5*$C$2) et j'étire jusqu'en E52. E5*C2calcule le remboursement des intérêts de la période 2 et B6-E5*$C$2 le remboursement effectif du capital pour cette période puis E5-(B6-E5*$C$2) la partie du capital emprunté restant vivante après avoir versé la somme B6 à la date 2.

En F5, j'écris =A2-E5.
En F6, j'écris =E5-E6 et j'étire jusqu'en F52.Cela montre le remboursement du capital chaque mois.

En G5, j'écris =F5.
En G6, j'écris =G5+F6. On obtient la partie du capital effectivement remboursée à cette date.

Ce programme souffre d'un défaut au début : il faut soi-même écrire la liste des périodes en colonne A.

La constitution de ce tableau d'amortissement permet de voir que l'affirmation suivante souvent entendue : « Lorsqu'on emprunte sur le long terme, les premiers versements ne servent qu'à rembourser les intérêts. On rembourse les intérêts d'abord, le capital ensuite. » n'est pas à prendre au pied de la lettre.

Voyons ce qu’il en est sur l’exemple choisi : pour une mensualité de 324,23 €, la partie du capital remboursé est, après le premier paiement de 267,72 €. L’emprunteur a donc payé ce premier mois un intérêt de 324,23 € - 267,72 € = 56,51 € ce qui représente 17,43% du versement effectué. Cela infirme quelque peu l’affirmation précédente. Mais, 4 ans, ce n’est pas du long terme.

Prenons un autre exemple, que je traiterai avec la formule simplifiée, malgré sa relative imprécision. Supposons que nous empruntions 12 000€ sur 10 ans au taux annuel de 6%. Le remboursement mensuel est alors estimé à $\frac{1}{120}.(12000+\frac{12000*10*0,06}{2})=130$.

L’intérêt dû sur le premier mois de prêt est de $12000*\frac{0,06}{12}=60$. On peut alors estimer que la partie remboursée du capital s’élève seulement à 70€. On constate que près de la moitié de la première mensualité a servi à payer les intérêts du premier mois de l’emprunt. La proportion de chaque mensualité servant à payer les intérêts du mois écoulé va ensuite diminuer avec le remboursement du capital emprunté, mais il en restera toujours quelque chose.

En fait, l’affirmation citée plus haut, est vraie à la limite pour n, durée de l’emprunt, tendant vers l’infini.

Les intérêts de la première période sont égaux à $c.i$ et le versement est $a=\frac{c.i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$.

Le quotient vaut $\frac{c.i}{a}=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}=1-\frac{1}{(1+i)^n}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}((1+i)^n)=+\infty$ car $1+i>1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}(\frac{c.i}{a})=1$.

<u>Si la durée d’un emprunt était infinie, les différents remboursements ne serviraient qu’à payer les intérêts de l’emprunt.</u>

On pourrait, pour s’amuser, se poser la question : Un taux i étant donné, quelle serait la durée d’un emprunt pour lequel seulement 10% du montant du premier versement servirait à rembourser le capital emprunté.

Prenons $i=0,01$.

Cela correspond à un taux d’intérêt annuel de $(1,01)^{12}-1\approx 12,68\%$.

On doit donc résoudre l’équation $1-\frac{1}{(1,01)^n}\geq 1-0,1$

Cette équation s’écrit $\frac{1}{(1,01)^n}\leq 0,1$

Elle équivaut à

$$(1,01)^n\geq 10 \Leftrightarrow (n\geq\frac{\ln(10)}{\ln(1,01)}\approx 231).$$

Cela correspond à un emprunt fait sur 19 ans et 4 mois.

Donc, dans le cas d’un emprunt fait sur 20 ans à un taux annuel de 12,5 %, l’adage qui veut qu’au début, on ne rembourse que les intérêts de l’emprunt, est vraiment confirmé. Et, le problème, c’est que le début dure longtemps.

5. Des questions supplémentaires.

On peut refaire les calculs ci-dessus dans des conditions différentes.

- On peut par exemple chercher à adapter les calculs pour un prêt à remboursements différés.
- Que se passe-t-il au contraire lorsqu'on décide de faire un remboursement global anticipé après une suite de k (k<n) versements égaux pour un emprunt prévu pour une durée de n versements et que l'on veuille solder la dette entière à, la date (k+1) ? L'expérience montre qu'ici, les banques ont des calculs particuliers qui leur permettent de conserver les intérêts entiers prévus initialement. cela serait à étudier de près.
- On pourra également tester nos calculs sur les campagnes publicitaires faites par les banques sur le coût de leurs prêts.
- Il serait également intéressant d'aménager la théorie et le programme de calculs lorsque les remboursements ou les placements ne sont pas égaux ou que les intervalles de temps séparant des opérations successives ne sont pas égaux (périodes irrégulières). Ainsi,si j'emprunte 1500€ à 8% l'an, et que je rembourse 500, 400 et 200 € aux dates 1, 3, 5 en mois, quel devra être le montant du dernier versement fait à la date 10 en mois, de façon à solder la dette ?
- Qu'est-il des remboursements progressifs, par exemple en progression arithmétique ou géométrique ?
- Peut-on trouver un critère général permettant d'obtenir un domaine de validité et une majoration de l'erreur faite lorsqu'on remplace la valeur exacte de la mensualité $a = c.\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ avec $i = \sqrt[12]{1+I} - 1$ où I est le taux annuel de l'emprunt par $a \approx \frac{1}{n}.(c + \frac{c}{2}.N.I)$. J'ai échoué dans cette tâche car il apparaît que les fonctions $f_{.;n}(i) = \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; i > 0$ et $f_{i;.}(n) = \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; n > 0$ ont des dérivées dont il est malaisé de calculer le signe. Il est pourtant évident du point de vue de l'utilisateur que la fonction $f_{.;n}$ est une fonction strictement croissante de la variable *i* (plus le taux est fort, plus la mensualité est grande) et que la fonction $f_{i;.}$ est une fonction strictement décroissante de la variable *n*. En effet, c'est bien pour diminuer le montant des mensualités que l'on allonge la durée de l'emprunt. On se trouve en présence d'une fonction $f(i;n) = \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; i > 0, n > 0$ des deux variables *i* et *n* définie sur $(]0;+\infty[)^2$ qu'il faudrait étudier.
- Une question facile maintenant. Quelle est l'influence de l'approximation $i = \sqrt[12]{1+I} - 1 \approx \frac{I}{12}$ sur le calcul de *a*?

Réponse :

D'abord un exemple.

Avec un placement de 300 € chaque mois, sur 6 mois, au taux annuel de 2,5%, la valeur acquise à la date 6 par ce placement vaut $300 * \frac{(1+i)^6 - 1}{i}$.

En prenant $i = \sqrt[12]{1,025} - 1 \approx 0,00206$, le calcul donne 1 809,40 € soit un intérêt global de 9,40 €.

En prenant $i = \dfrac{0{,}025}{12} \approx 0{,}00208$, le calcul donne 1809,25 € soit un intérêt global de 9,29 €.
On a $9{,}29 < 9{,}40$.

Il semble que, si on désigne par I l'intérêt annuel et par i l'intérêt mensuel correspondant, le remplacement de la valeur exacte $i = \sqrt[12]{1+I} - 1$ par la valeur approchée $i = \dfrac{I}{12}$ soit en faveur du prêteur, et en défaveur de l'emprunteur.
Cela est justifié par le calcul suivant .
Soit la fonction

$$d(x) = \sqrt[12]{1+x} - 1 - \frac{x}{12};\ x \geq 0\,.$$

Alors

$$d'(x) = \frac{1}{12}.(1+x)^{\frac{1}{12}-1} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.\left((1+x)^{-\frac{11}{12}} - 1\right).$$

La fonction $x \mapsto x^{-\frac{11}{12}}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$. Donc :

$$(0 \leq x) \Rightarrow (1 \leq 1+x) \Rightarrow \left(1^{-\frac{11}{12}} = 1 \geq (1+x)^{-\frac{11}{12}}\right).$$

Donc

$$d'(x) \leq 0 \text{ sur } [0;+\infty[\,.$$

Comme $d(0) = 0$, on en déduit que $d(x) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$ et donc :

$$\sqrt[12]{1+x} - 1 \leq \frac{x}{12};\ x \geq 0\,.$$

On a donc toujours :

$$i = \sqrt[12]{1+I} - 1 \leq \frac{I}{12}\,.$$

On peut de plus donner facilement une majoration grossière de l'erreur absolue si on se limite à l'intervalle $I \in [0;0{,}15]$.
On a $|d(I)| \leq |d(0{,}15)| = \dfrac{0{,}15}{12} - (\sqrt[12]{1{,}15} - 1) \approx 0{,}0125 - 0{,}0117 = 0{,}0008$.
Ce résultat est trop grossier et on pourrait certainement l'améliorer en faisant intervenir la fonction $d''(x)$.
Voyons cela.

$$d''(x) = \frac{1}{12}.\frac{-11}{12}.(1+x)^{-\frac{23}{12}} = \frac{-11}{144}.(1+x)^{-\frac{23}{12}}\,.$$

Donc $|d''(x)| \leq |d''(0)| = \dfrac{11}{144}$ sur $[0;0{,}15]$ car la fonction $x \mapsto (1+x)^{-\frac{23}{12}}$ y est décroissante.

Comme $d'(0) = 0$, par intégration de l'inégalité $|d''(t)| \leq \dfrac{11}{144}$ sur l'intervalle $[0;x]$ avec $x \geq 0$ on obtient $|d'(x)| \leq \dfrac{11}{144}.x$.

Comme $d(0) = 0$, par intégration de l'inégalité $|d'(t)| \leq \dfrac{11}{144}.t$ sur l'intervalle $[0;x]$ avec $x \geq 0$ on obtient

$$|d(x)| \leq \frac{11}{144}.\frac{1}{2}.x^2\,.$$

On a alors

$$0 \le \frac{I}{12} - (\sqrt[12]{1+I} - 1) \le \frac{11}{144}.I^2 .$$

Ainsi

$$0 \le \frac{0,05}{12} - (\sqrt[12]{1,05} - 1) \le \frac{11}{144}.(0,05)^2 \approx 2,0 \quad 5$$

qu’on peut comparer avec la valeur approximative exacte à 10^{-6} près :

$$\frac{0,05}{12} - (\sqrt[12]{1,05} - 1) \approx 0,0 \quad 0 .$$

- Obtention d’une formule simplifiée analogue à celle obtenue dans le paragraphe 3 pour le montant global b_N des intérêts au bout de N années d’un placement mensuel d’une mensualité constante a au taux annuel I.

Réponse possible.

On se place dans le cas où l’on place une mensualité de a € aux dates 1, 2, 3, …, n et on note u_n la valeur acquise par ces placements à la date n.
On a

$$u_n = a.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \approx a.\frac{(1+n.i+\frac{n.(n-1}{2}.i^2) - 1}{i} = a.(n + \frac{n.(n-1)}{2}.i) .$$

Soit β_n l’intérêt global obtenu à la date n où n est le nombre de mois de placement.
Alors

$$\beta_n \approx a.\frac{n.(n-1)}{2}.i .$$

En faisant l’approximation $i \approx \frac{I}{12}$ et puisque $n = 12.N$, avec $n-1 \approx n$ pour n grand, on a

$$b_N \approx a.\frac{12.N.12.N}{2}.\frac{I}{12} = \frac{12.a.N^2.I}{2} .$$

En appelant $C = 12.a$ le capital placé en un an, on obtient

$$b_N \approx \frac{C.N^2.I}{2} .$$

Application :

$$a = 300 \,; N = 5 \,; I = 4\% = 0,04 .$$

Je place mensuellement 300 € pendant 5 ans au taux annuel de 4%. Quel sera le montant approximatif des intérêts obtenus ?

Réponse.

$$b_5 \approx \frac{12*300*5^2*0,04}{2} = 1800 \ .$$

Mon placement me fournira 1 800€ d’intérêts.
Le calcul exact aurait donné :

$$b_5 = 300.\frac{(\sqrt[12]{1.04})^{5*12} - 1}{\sqrt[12]{1,04} - 1} - 300*5*12 \approx 1853,71 .$$

Là encore, la différence n’est certes pas négligeable (54 € environ), mais l’ordre de grandeur du résultat est bon. L’erreur relative faite est de .

- Je n'ai pas non plus parlé de l'influence de l'assurance sur le taux du crédit dans le cas d'un emprunt. Il faudrait pour cela savoir comment le montant global de l'assurance est réparti sur les différentes mensualités et comment celui-ci est calculé.

6. Des conclusions provisoires.

On vient de constater la très grande importance des suites géométriques dans les mathématiques financières. On les voit à l'œuvre dès le début dans la simple notion de la valeur actuelle d'un placement, notion que j'ai beaucoup utilisée mais que je n'ai pas explicitée. Avec des élèves, ce travail devrait être fait soigneusement.

On constate aussi les interconnexions entre théorie et pratique. La théorie est indispensable mais il est très certainement formateur d'appliquer la théorie à des cas concrets et dans ce but, la programmation des tâches à faire effectuer à un tableur qui découle de la théorie exposée au préalable, constitue une activité pratique intéressante et nécessaire pour un futur professionnel. A ce stade, l'élève ou l'étudiant devrait pouvoir interroger un véritable programmateur de logiciels financiers. Il y a sûrement beaucoup à découvrir.

J'ai cependant introduit un calcul approché d'une mensualité, qu'on peut faire mentalement. On peut évidemment dire que ce résultat ne sert à rien, vu qu'une simple machine à calculer financière donne immédiatement le résultat précis. Je répondrais à cette objection que le fonctionnement d'un ordinateur a quelque chose de « magique » et il ne faut évidemment pas hésiter à se servir de cette technologie. Mais la puissance de calcul même des calculateurs électroniques entraîne un danger pour l'homme. C'est celui de ne plus pouvoir se passer de la machine, et ainsi de perdre confiance en ses propres capacités. On le voit bien chez certains de nos élèves, qui perdent de leurs moyens dans une interrogation écrite où on leur interdit la machine à calculer. Pour remédier à cet inconvénient, il est bon de pouvoir contrôler, autant que possible, les résultats qui sont fournis.

L'enseignement des mathématiques pourraient être un domaine où théorie et pratique s'équilibreraient harmonieusement, mais il faudrait pour cela plus d'heures d'enseignement car il nous faut maintenant concilier à la fois la découverte de l'utilisation des technologies nouvelles et la pérennité d'anciennes méthodes, qui restent indispensables. Il faudrait aussi pouvoir rencontrer le monde professionnel. Tout cela demande du temps.

PARTIE V

Occasions de faire de la géométrie

Le calcul mental approché de la somme de plusieurs nombres réels et les probabilités.

Michel PLATHEY, lycée Hippolyte Fontaine, Dijon

0. Le problème.

Lorsqu'on doit additionner des nombres réels, il est souvent utile, avant ou après avoir réalisé effectivement cette somme, d'en évaluer un ordre de grandeur.

Par exemple, je vais faire des courses au supermarché. Je n'ai pas de machine à calculer dans ma poche. Pour obtenir une valeur approchée du montant total de mes achats, je vais arrondir le montant de chacun d'eux à l'euro ou même à la dizaine d'euros la plus proche, suivant ma force en calcul mental. J'effectue alors l'addition des valeurs arrondies et j'espère que le résultat obtenu est voisin de la somme exacte.

Cette attitude permet de contrôler le résultat donné à la caisse. Elle permet de détecter d'éventuelles erreurs, pas si rares que cela, non pas parce que l'ordinateur qui effectue le calcul s'est trompé, mais souvent parce que les prix affichés ne correspondent pas aux prix effectivement pratiqués.

En fait, ce travail de vérification mentale du résultat d'une opération est très nécessaire, aussi bien dans la vie courante, que dans un contexte scientifique.

C'est une habitude que chacun doit prendre et que l'on doit enseigner à nos élèves.

Pour voir si la méthode qui consiste à remplacer les termes d'une somme par des valeurs arrondies plus simples à traiter mentalement est fiable, résolvons une question plus spécifique :

<u>Question Q :</u>

Est-il courant que, lorsqu'on additionne les valeurs approchées à l'unité près de plusieurs nombres réels, j'obtienne exactement la valeur approchée de la somme exacte ?

Dans toute la suite S désigne une somme de n nombres réels, S' désigne la somme des valeurs approchées à l'unité près des termes de la somme S, S'' désigne la valeur approchée à l'unité près de S.
Faisons quelques essais pour voir si on peut avoir $S' = S''$.
Soit la somme $S = 22{,}90 + 38.87 + 77.92 + 49.83 = 189{,}52$ correspondant à la somme des montants de 4 achats.
Alors $S' = 23 + 39 + 78 + 50 = 190$ et $S'' = 190$.
On a $S' = S''$.

Soit $S_1' = 20 + 40 + 80 + 50 = 190$ la somme des valeurs approchées à la dizaine d'unités près des mêmes 4 nombres et S_1'' la valeur approchée à la dizaine d'unités près de S.
On a: $S_1' = 190; S_1'' = 190$ et $S_1' = S_1''$.

Un autre exemple. Soit la somme $S = 31{,}35 + 79{,}35 + 43.85 + 1.73 = 156{,}28$.
Alors $S' = 31 + 79 + 44 + 2 = 156; S'' = 156$ Donc $S' = S''$.
$S_1' = 30 + 40 + 80 + 0 = 150; S_1'' = 160$. Ici $S_1' \neq S_1''$.

Il fut aussi un temps, celui du passage à l'euro de l'Union Européenne où le problème posé avait un caractère irritant. Pendant cette période de transition, les comptables des entreprises étaient tenus, lorsqu'ils traitaient de sommes d'argent, reçues en francs à l'époque, de les transformer d'abord en euros, d'arrondir chacun des nombres traités au centime d'euro le plus proche, d'effectuer ensuite la somme de ces arrondis, puis de retransformer le résultat obtenu en francs, résultat arrondi au centime de franc le plus proche. Evidemment, chaque comptable espérait fortement que le résultat final coïncide avec la somme en francs obtenue directement, ce qui était assez peu souvent le cas. L'intendant de mon lycée disait : « il y a des centimes qui se baladent ».

Je traiterai le problème posé sous quatre points de vue.

- Dans un premier temps, j'utilise un tableur pour me donner une grande variété de sommes de 2 ou 3 nombres ou plus et estimer sur un échantillon avec quelle fréquence la somme S' et la valeur approchée S'' de S coïncident.
- Dans un deuxième temps, j'utilise la géométrie du plan ou de l'espace à trois dimensions pour calculer de façon exacte la probabilité avec laquelle la somme S' et la valeur approchée S'' de S coïncident pour une somme S de 2 ou 3 nombres.
- Puis, un changement de point de vue va permettre d'utiliser l'approximation normale d'une somme de variables aléatoires identiquement distribuées et indépendantes d'espérance finie (théorème de la limite centrale) pour calculer une valeur approchée de la probabilité avec laquelle la somme S' et la valeur approchée S'' de S coïncident pour une somme S de n nombres, pour $n \in N; n \geq 30$. On calculera aussi une valeur approchée de la probabilité avec laquelle la somme S' et la valeur approchée S'' de S diffèrent de 1, de 2, … pour une somme S de n nombres, pour $n \in N; n \geq 30$.
- Enfin, dans un quatrième temps, une autre méthode de calcul permet de calculer, de façon exacte, la probabilité avec laquelle la somme S' et la valeur approchée S'' de S coïncident pour une somme S de n nombres, pour tout $n \in N$.

1. Expérimentation sur tableur.

Examinons le cas de la somme de 2 nombres réels. On établit d'abord un lemme qui permet de ramener le problème posé à la somme de deux nombres réels appartenant à l'intervalle $[0;1[$.

Définition.

Soit $x \in R$. On appelle arrondi entier de x, le nombre $E(x+\frac{1}{2})$ où E est la fonction « partie entière » définie sur R. Je note $Arr : R \to Z; x \mapsto E(x+\frac{1}{2})$ cette fonction « valeur approchée à l'entier le plus proche » définie sur R à valeurs dans Z.

Ainsi $$\begin{aligned}&Arr(1{,}3) = E(1{,}8) = 1; Arr(-2{,}7) = E(-2{,}2) = -3;\\ &Arr(-1{,}3) = E(-0{,}8) = -1; Arr(4{,}5) = E(5) = 5.\end{aligned}$$

Le lemme.

Soient x et y deux réels quelconques. On peut écrire $x = E(x) + X; y = E(y) + Y$ où X et Y sont appelées les parties décimales de x et y dont les valeurs appartiennent à l'intervalle $[0;1[$.

Alors
$$(Arr(x+y) = Arr(x) + Arr(y)) \Leftrightarrow (Arr(X+Y) = Arr(X) + Arr(Y)).$$
Donc, l'arrondi de la somme de deux nombres est égal à la somme des arrondis de ces nombres si et seulement si l'arrondi de la somme des parties décimales de ces deux nombres est égal à la somme des arrondis des parties décimales de ces nombres.

Preuve.

$$\begin{aligned}&Arr(x+y) = E(x+y+\tfrac{1}{2}); Arr(x) = E(x+\tfrac{1}{2}); Arr(y) = E(y+\tfrac{1}{2});\\ &x = E(x) + X; y = E(y) + Y; X \in [0;1[; Y \in [0;1[.\end{aligned}$$

On a alors la suite de propositions équivalentes :

$$(P) : Arr(x+y) = Arr(x) + Arr(y)$$
$$(P) : E(x+y+\frac{1}{2}) = E(x+\frac{1}{2}) + E(y+\frac{1}{2})$$
$$(P) : E(E(x) + X + E(y) + Y + \frac{1}{2}) = E(E(x) + X + \frac{1}{2}) + E(E(y) + Y + \frac{1}{2})$$
$$(P) : E(X+Y+\frac{1}{2}) + E(x) + E(y) = E(X+\frac{1}{2}) + E(x) + E(Y+\frac{1}{2}) + E(y)$$
$$(P) : E(X+Y+\frac{1}{2}) = E(X+\frac{1}{2}) + E(Y+\frac{1}{2})$$
$$(P) : Arr(X+Y) = Arr(X) + Arr(Y)$$

Cette propriété montre qu'il suffit de résoudre le problème posé pour $(x; y) \in [0;1[* [0;1[$.

Donc, dans la suite, je vais considérer que le premier terme x de la somme $S = x + y$ est un réel de l'intervalle $[0;1[$ pris au hasard et que la variable aléatoire X qui, à la prise d'un tel réel, associe sa valeur, est uniformément distribuée sur $[0;1[$. De même, la variable aléatoire Y qui, à la prise au hasard du deuxième terme y de la somme S associe sa valeur, est uniformément distribuée sur $[0;1[$. Je suppose aussi que X et Y sont indépendantes. Il s'ensuivra que le couple $(X;Y)$ est uniformément distribué sur $[0;1[* [0;1[$.

En effet, avec $a;b;c;d \in [0;1[; a \le b; c \le d$, on a :

$$p((X;Y) \in [a;b[* [c;d[) = p((X \in [a;b[) \cap (Y \in [c;d[)) =$$
$$p(X \in [a;b[) * p(Y \in [c;d[) = (b-a)*(d-c).$$

Cette propriété de distribution uniforme est une hypothèse de travail, certainement valable dans certains cas, mais pas dans celui choisi dans l'introduction. En effet, les supermarchés ont une tendance marquée à regrouper les parties fractionnaires des prix de leurs articles vers l'extrémité droite de l'intervalle $[0;1[$. Une approximation plus grossière, à la dizaine d'euros près, permettra peut-être de retrouver une distribution à peu près uniforme.

On reformule donc ainsi le problème posé dans l'introduction :

X et Y étant deux variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0;1[$, quelle est la probabilité de l'événement

$$(E) : Arr(X+Y) = Arr(X) + Arr(Y) \ \textbf{?}$$

Avec le tableur Excel, la fonction *Arr* se nomme ARRONDI et admet deux arguments : le nombre dont on veut avoir l'arrondi entier, et l'entier 0 qui signifie que je veux avoir l'arrondi de x à $10^0 = 1$ près.
Je veux faire un essai avec 50 couples $(x;y)$.

<u>Procédure.</u>

En colonne A, j'inscris les numéros des expériences, de 1 à 50, dans les cellules A3 à A52. (Numéros des essais)
En colonne B, en B3, j'inscris =ALEA() et j'étire ce calcul jusqu'en B52. (Premier terme x de la somme S pris au hasard dans l'intervalle $[0;1[$. Les répétitions de ce calcul sont faites de façon indépendante)
En colonne C, en C3, j'inscris =ALEA() et j'étire ce calcul jusqu'en C52. (Deuxième terme y de la somme S)
En colonne D, en D3, j'inscris =B3+C3 et j'étire ce calcul jusqu'en D52. (Calcul de S)
En colonne E, en E3, j'inscris =ARRONDI(B3,0) et j'étire ce calcul jusqu'en E52. (Calcul de la valeur approchée à l'unité près de x)
En colonne F, en F3, j'inscris =ARRONDI(C3,0) et j'étire ce calcul jusqu'en F52. (Calcul de la valeur approchée à l'unité près de y)
En colonne G, en G3, j'inscris =E3+F3 et j'étire ce calcul jusqu'en G52. (Calcul de la somme des valeurs approchées à l'unité près de x et de y)
En colonne H, en H3, j'inscris =ARRONDI(D3,0) et j'étire ce calcul jusqu'en H52. (Calcul de la valeur approchée à l'unité près de S)
En colonne I, en I3, j'inscris =SI(G3=H3 ,1,0) et j'étire ce calcul jusqu'en H52. (1 si la somme des arrondis de x et y, notée en G3 est égale à l'arrondi de S, noté en H3, 0 sinon)
En H54, j'inscris =(SOMME(I3 :I52)/50. Cela me donne la fréquence de la réalisation de l'événement $(E) : Arr(x+y) = Arr(x) + Arr(y)$ dans cet échantillon de 50 expériences.

De façon analogue, je peux refaire des échantillons de 50 expériences avec des sommes de 3 ou 4 nombres ou davantage.

Les feuilles de calculs pages 18, 19, 20 donnent respectivement des échantillons de taille 50 des variables aléatoires S' et S'' pour des sommes de 2, 3 ou 4 nombres.

Ils permettent d'estimer (l'estimation ponctuelle obtenue est égale à la fréquence de réalisation de *(E)* sur l'échantillon) que l'événement (*E*) est réalisé avec une probabilité de 0,8 dans le cas d'uns somme de 2 nombres, de 0,68 le cas d'uns somme de 3 nombres et de 0,52 dans le cas d'uns somme de 4 nombres.

Soit p_2(respectivement $p_3; p_4$) la probabilité de réalisation de (*E*) dans le cas d'une somme de deux nombres (respectivement 3 puis 4 nombres).
Alors :

- Un intervalle de confiance de p_2 avec le coefficient de confiance de 95% est
$$I_2 \approx \left[0{,}8 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}8.0{,}2}{49}}; 0{,}8 + 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}8.0{,}2}{49}}\right] \approx [0{,}688; 0{,}912].$$
- Un intervalle de confiance de p_3 avec le coefficient de confiance de 95% est
$$I_3 \approx \left[0{,}68 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}68.0{,}32}{49}}; 0{,}8 + 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}68.0{,}32}{49}}\right] \approx [0{,}549; 0{,}811].$$
- Un intervalle de confiance de p_4 avec le coefficient de confiance de 95% est
$$I_4 \approx \left[0{,}52 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}52.0{,}48}{49}}; 0{,}52 + 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}52.0{,}48}{49}}\right] \approx [0{,}380; 0{,}660].$$

2. Raisonnements géométriques permettant de calculer de façon exacte la probabilité de (E) dans le cas des sommes de deux ou trois nombres.

1. Probabilité de (E) dans le cas d'une somme de deux nombres.

La variable aléatoire $Arr(X)$ prend deux valeurs 0 ou 1 et c'est pareil pour la variable aléatoire $Arr(Y)$.
La variable aléatoire $S' = Arr(X) + Arr(Y)$ prend alors les valeurs 0, 1 ou 2.
La variable aléatoire $S = X + Y$ peut prendre toute valeur réelle de l'intervalle $[0;2[$ et donc la variable aléatoire $S'' = Arr(S) = Arr(X + Y)$ prend alors les valeurs 0, 1 ou 2.
L'ensemble des valeurs prises par le couple $(X;Y)$ est alors représenté, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ par le carré $(OABC) = [0;1[* [0;1[$ dont l'aire est égale à 1. On se réfère ici à la figure 1 page 117.

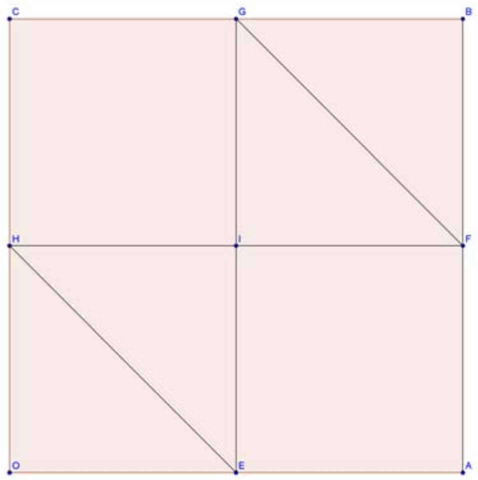


Figure 1

Il faut alors trouver les probabilités des événements $E_0;E_1;E_2$ suivants :

$E_0 =" Arr(X)+Arr(Y)=Arr(X+Y)=0";$
$E_1 =" Arr(X)+Arr(Y)=Arr(X+Y)=1";$
$E_2 =" Arr(X)+Arr(Y)=Arr(X+Y)=2".$

Ces probabilités sont égales aux aires des domaines plans D_0, D_1, D_2 correspondants, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$,avec :

$D_0 = \{(x;y)/ Arr(x)+Arr(y)=Arr(x+y)=0\};$
$D_1 = \{(x;y)/ Arr(x)+Arr(y)=Arr(x+y)=1\};$
$D_2 = \{(x;y)/ Arr(x)+Arr(y)=Arr(x+y)=2\}.$

On a, en se référant à la figure 1 :

$E_0 = \{(x;y)/0 \leq x < 0{,}5; 0 \leq y < 0{,}5; 0 \leq x+y < 0{,}5\}$, qui est le triangle rectangle *(OEH)* dont les côtés de l'angle droit valent 0,5 et dont l'aire vaut alors $\frac{0{,}5*0{,}5}{2} = 0{,}125$.

Donc : $p(E_0) = \frac{1}{8}$.

$E_1 = \{(x;y)/0 \leq x < 0{,}5; 0{,}5 \leq y < 1; 0{,}5 \leq x+y < 1{,}5\} \cup$
$\{(x;y)/0{,}5 \leq x < 1; 0 \leq y < 0{,}5; 0{,}5 \leq x+y < 1{,}5\} =$
$E_1' \cup E_1''.$

qui est la réunion de deux carrés $E_1' = (HIGC)$ et $E_1'' = (EAFI)$ chacun de côté 0,5.
Son aire vaut alors $2*0{,}5^2 = 0{,}5$.

Donc : $p(E_1) = \frac{1}{2}$.

$E_2 = \{(x;y)/0{,}5 \leq x < 1; 0{,}5 \leq y < 1; 1{,}5 \leq x+y < 2\}$, qui est le triangle rectangle *(FBG)* ont les côtés de l'angle droit valent 0,5 et dont l'aire vaut alors $\frac{0{,}5*0{,}5}{2} = 0{,}125$. Donc : $p(E_2) = \frac{1}{8}$.

Donc : $p(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

Dans exactement 75% des cas, l'arrondi à l'unité près de la somme de deux nombres réels pris au hasard, sera égale à la somme des arrondis à l'unité près de ces deux nombres.

Ce résultat est en adéquation avec la conclusion de la partie 1 : $0{,}75 \in I_2$.

2. Probabilité de E dans le cas d'une somme de trois nombres.

Le lemme de la partie 2 s'étend sans problème au cas de trois réels x, y, z.
Je considère donc maintenant la somme $S = x + y + z$ de trois réels de l'intervalle $[0;1[$ pris au hasard et je suppose que la variable aléatoire X qui, à la prise du réel x, premier terme de la somme S, associe sa valeur, est uniformément distribuée sur $[0;1[$. De façon analogue, les variables aléatoires Y et Z qui, à la prise au hasard du deuxième terme y et du troisième terme z de la somme S associent leur valeur, sont uniformément distribuées sur $[0;1[$. Je suppose aussi que X, Y et Z sont indépendantes deux à deux. Il s'ensuivra que le triplet $(X;Y;Z)$ est uniformément distribuée sur $[0;1[*[0;1[*[0;1[$.

Cela se démontre comme dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuée sur $[0;1[$.

On a $S = X + Y + Z$.
La variable aléatoire $Arr(X)$ prend deux valeurs 0 ou 1 et c'est pareil pour les variables aléatoires $Arr(Y)$ et $Arr(Z)$.
La variable aléatoire $S' = Arr(X) + Arr(Y) + Arr(Z)$ prend alors les valeurs 0, 1, 2 ou 3.
La variable aléatoire $S = X + Y + Z$ peut prendre toute valeur réelle de l'intervalle $[0;3[$ et donc la variable aléatoire $S'' = Arr(S) = Arr(X + Y + Z)$ prend alors les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

Il faut alors trouver les probabilités des événements $E_0; E_1; E_2; E_3$ suivants :

$E_0 = "Arr(X) + Arr(Y) + Arr(Z) = Arr(X + Y + Z) = 0";$

$E_1 = "Arr(X) + Arr(Y) + Arr(Z) = Arr(X + Y + Z) = 1";$

$E_2 = "Arr(X) + Arr(Y) + Arr(Z) = Arr(X + Y + Z) = 2";$

$E_3 = "Arr(X) + Arr(Y) + Arr(Z) = Arr(X + Y + Z) = 3".$

Ces probabilités sont égales aux volumes des domaines de l'espace correspondants, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, notés $D_0; D_1; D_2; D_3$, qui sont inclus dans le cube $(OABCO'A'B'C') = [0;1[*[0;1[*[0;1[$ dont le volume est égale à 1 , avec :

$$D_0 = \{(x;y;z) / Arr(x) + Arr(y) + Arr(z) = Arr(x + y + z) = 0\};$$
$$D_1 = \{(x;y;z) / Arr(x) + Arr(y) + Arr(z) = Arr(x + y + z) = 1\};$$
$$D_2 = \{(x;y;z) / Arr(x) + Arr(y) + Arr(z) = Arr(x + y + z) = 2\};$$
$$D_3 = \{(x;y;z) / Arr(x) + Arr(y) + Arr(z) = Arr(x + y + z) = 3\}.$$

On a, en se référant à la figure 2 :

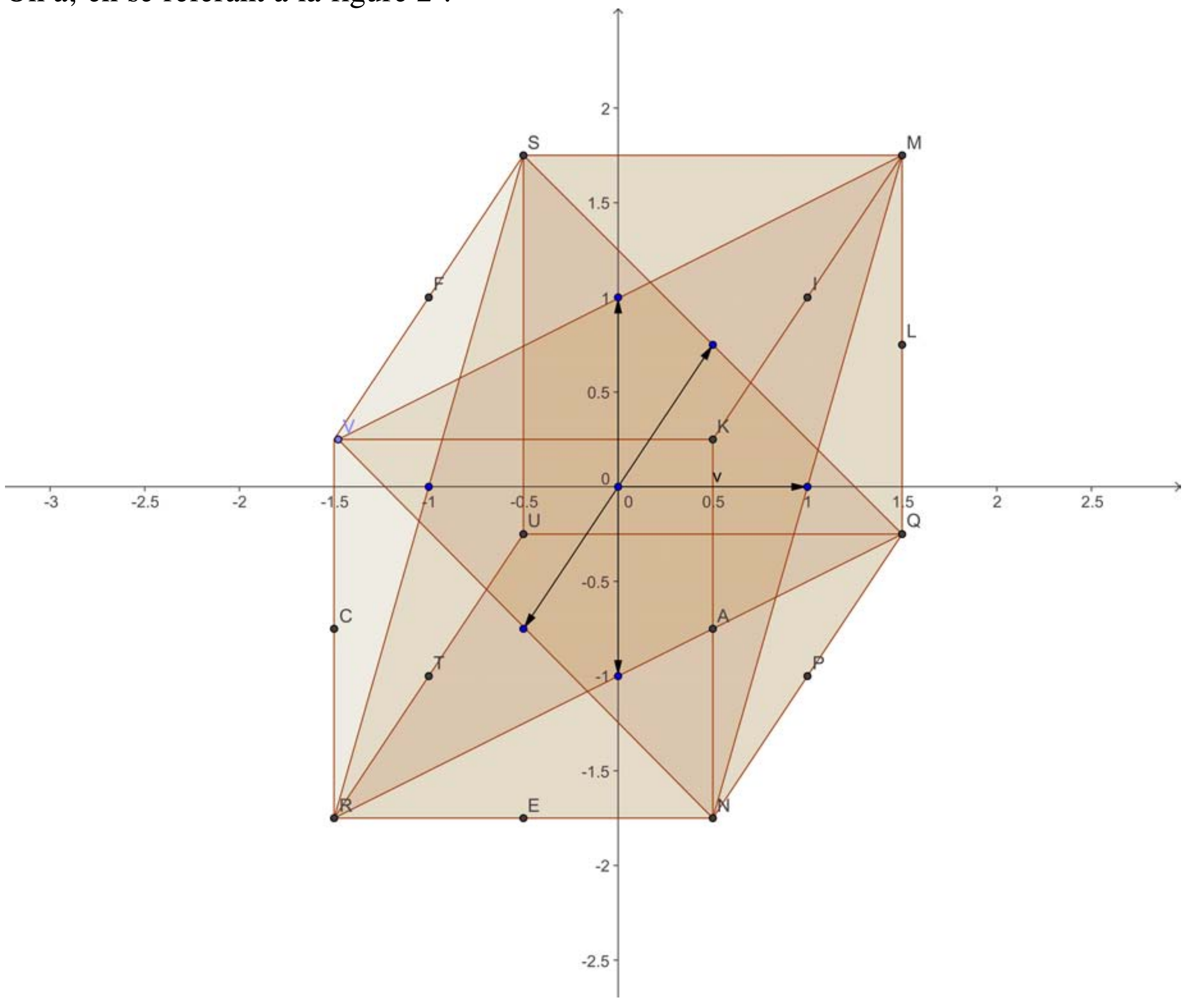


Figure 2

$D_0 = \{(x;y;z)/0 \le x < 0{,}5; 0 \le y < 0{,}5; 0 \le z < 0{,}5; 0 \le x+y+z < 0{,}5\}$, qui est le tétraèdre $(OA_2'C_2'O_1')$ trirectangle en O dont les côtés des 3 angles droits en O valent tous 0,5 et dont le volume vaut alors $\frac{1}{3}.\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{48}$.

Donc $p(E_0) = \frac{1}{48}$.

$$D_1 = \{(x;y;z)/0 \le x < 0{,}5; 0 \le y < 0{,}5; 0{,}5 \le z < 1; 0{,}5 \le x+y+z < 1{,}5\} \cup$$
$$\{(x;y;z)/0 \le x < 0{,}5; 0{,}5 \le y < 1; 0 \le z < 0{,}5; 0{,}5 \le x+y+z < 1{,}5\} \cup$$
$$\{(x;y;z)/0 \le x < 0{,}5; 0{,}5 \le y < 1; 0 \le z < 0{,}5; 0{,}5 \le x+y+z < 1{,}5\} =$$
$$D_1' \cup D_1'' \cup D_{1.}'''$$
,

L'équation $x+y+z=0{,}5$ représente le plan $(O_1'A_2'C_2')$.

L'équation $x+y+z=1{,}5$ représente le plan $(A_1'A_3'B_3'C_3'D_3'C_1')$. Il passe par I, centre du cube unité. D_1' est l'intersection du cube $(O_1'GIFO'A_1'HC_1')$ avec la bande d'espace déterminée par les plans d'équations $x+y+z=0{,}5$ et $x+y+z=1{,}5$. Donc :

D_1' est le cube arrière gauche haut $(O_1'GIFO'A_1'HC_1')$ de côté 0,5, de volume $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ privé du tétraèdre $(HA_1'IC_1')$ trirectangle en H dont les côtés des 3 angles droits en H valent tous 0,5. Le volume de ce tétraèdre vaut alors $\frac{1}{48}$. Le volume de D_1' est égal à $\frac{1}{8} - \frac{1}{48} = \frac{5}{48}$. $p(E_1') = \frac{5}{48}$.

Pour des raisons de symétrie, on a $p(E_1') = p(E_1'') = p(E_1''') = \frac{5}{48}$. Donc $p(E_1) = 3.\frac{5}{48} = \frac{15}{48}$.

Par symétrie encore, on a : $p(E_2) = \frac{15}{48}; p(E_3) = \frac{1}{48}$.

Donc $p(E) = 2.\frac{15}{48} + 2.\frac{1}{48} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$.

<u>Deux fois sur trois, l'arrondi à l'unité près de la somme de trois nombres réels pris au hasard, sera égale à la somme des arrondis à l'unité près de ces trois nombres.</u>
Ce résultat est en adéquation avec la conclusion de la partie 1 : $0{,}68 \in I_3$.

On remarque que $p(E)$ diminue lorsque le nombre de termes dont est constituée la somme augmente. Cela est tout à fait intuitif.

Remarque. L'intersection du cube $(OABCO'A'B'C') = [0;1[* [0;1[* [0;1[$ par le plan d'équation $x + y + z = 1.5$, orthogonal à la diagonale (OB') du cube forme une jolie figure qui est un hexagone régulier ayant pour centre le centre I du cube. Cette figure est appelée hexagone de Bergson en l'honneur du philosophe qui, jeune homme, avait été reçu 1er au concours général de mathématiques et qui avait eu à résoudre une question concernant ce polygone.

<u>*3. Calcul approché de $p(E)$ dans ne cas d'une somme de n réels avec $n \in N; n \geq 30$.*</u>

On ne se restreint plus à $n = 2$ ou 3 et on va faire un calcul valable pour tout entier naturel n non nul, assez grand, de façon à permettre l'application du théorème de la limite centrale.

Soit donc la somme $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$ de n réels de l'intervalle $[0;1[$ pris au hasard et je suppose, pour $k \in N; 1 \leq k \leq n$, que la variable aléatoire X_k qui, à la prise du réel x_k, terme de rang k de la somme S, associe sa valeur, est uniformément distribuée sur $[0;1[$ et que les variables aléatoires X_k sont indépendantes deux à deux.

L'événement E, dont on se propose de calculer une valeur approchée de la probabilité, s'écrit alors

$$E = "Arr(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Arr(X_1) + Arr(X_2) + ... + Arr(X_n)".$$

Je vais reformuler l'événement E en utilisant les variables aléatoires $Y_k = X_k - Arr(X_k)$ qui, étant symétriques par rapport à 0, conduisent à des simplifications.

On a le

Lemme.

Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\left[0;1\right[$. Alors la variable aléatoire $Y = X - Arr(X)$ est uniformément distribuée sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.

Preuve.

$(0 \le X < \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (Arr(X) = 0) \Leftrightarrow (0 \le Y = X < \frac{1}{2}).$

$(\frac{1}{2} \le X < 1) \Rightarrow (Arr(X) = 1) \Leftrightarrow (-\frac{1}{2} \le Y = X - 1 < 0).$

La variable aléatoire Y prend donc ses valeurs dans $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.

Soit alors y nombre réel.

- $(y < -\frac{1}{2}) \Rightarrow (p(Y \le y) = 0)$;
- $(-\frac{1}{2} \le y < 0) \Rightarrow (p(Y \le y) = p(-\frac{1}{2} \le Y \le y) = p(-\frac{1}{2} \le X - 1 \le y) =$
  $p(-\frac{1}{2} + 1 \le X \le y + 1) = y + 1 - \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2} = y - (-\frac{1}{2})).$
- $(0 \le y < \frac{1}{2}) \Rightarrow (p(Y \le y) = p(Y \le 0) + p(0 \le Y \le y) = \frac{1}{2} + p(0 \le X \le y) = \frac{1}{2}. + (y - 0) = y - (-\frac{1}{2}))$
- $(\frac{1}{2} \le y) \Rightarrow (p(Y \le y) = 1)$.

Y est donc uniformément distribuée sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.

Pour $k \in N; 1 \le k \le n$, les variables aléatoires $Y_k = X_k - Arr(X_k)$ sont toutes uniformément distribuées sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et sont indépendantes 2 à 2.

Soit E l'événement :

$$Arr(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Arr(X_1) + Arr(X_2) + ... + Arr(X_n).$$

On sait que pour tout nombre réel a : $Arr(a) - \frac{1}{2} \le a < Arr(a) + \frac{1}{2}$.

Avec $a = x_1 + x_2 + ... + x_n$, cela donne :

$$Arr(x_1 + x_2 + ... + x_n) - \frac{1}{2} \le x_1 + x_2 + ... + x_n < Arr(x_1 + x_2 + ... + x_n) + \frac{1}{2}.$$

Donc si l'événement E est réalisé alors :

$$Arr(X_1) + Arr(X_2) + ... + Arr(X_n) - \frac{1}{2} \le X_1 + X_2 + ... + X_n < Arr(X_1) + Arr(X_2) + ... + Arr(X_n) + \frac{1}{2}$$

et réciproquement,

si cette double inégalité est réalisée, alors, comme $Arr(X_1)+Arr(X_2)+...+Arr(X_n)$ est un nombre entier, on a : $Arr(X_1+X_2+...+X_n)=Arr(X_1)+Arr(X_2)+...+Arr(X_n)$ et l'événement E est réalisé. Donc l'événement E peut s'écrire :

$$E:\sum_{k=1}^{n}(Arr(X_k))-\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}X_k<\sum_{k=1}^{n}(Arr(X_k))+\frac{1}{2}.$$

Cela s'écrit encore :

$$E:-\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}(X_k-Arr(X_k))<\frac{1}{2}.$$

On peut donc énoncer le

Lemme.

$$(Arr(\sum_{k=1}^{k=n}X_k)=\sum_{k=1}^{k=n}(Arr(X_k)))\Leftrightarrow(-\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}(X_k-Arr(X_k))<\frac{1}{2})\Leftrightarrow(-\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}Y_k<\frac{1}{2}).$$

On a :

$$E:-\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}Y_k<\frac{1}{2}$$

Ce point de vue permet de revisiter la partie 3 et on peut retrouver les résultats de cette partie avec une visualisation moins complexe. Ainsi

si $S=X_1+X_2$ alors $E:-\frac{1}{2}\leq Y_1+Y_2<\frac{1}{2}$. La variable aléatoire Y_1+Y_2 est uniformément distribuée dans le carré $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[*\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et l'événement E est représenté par l'intersection de ce carré avec la bande du plan limitée par les droites d'équations respectives $x+y=-\frac{1}{2}$ et $x+y=\frac{1}{2}$, ce plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

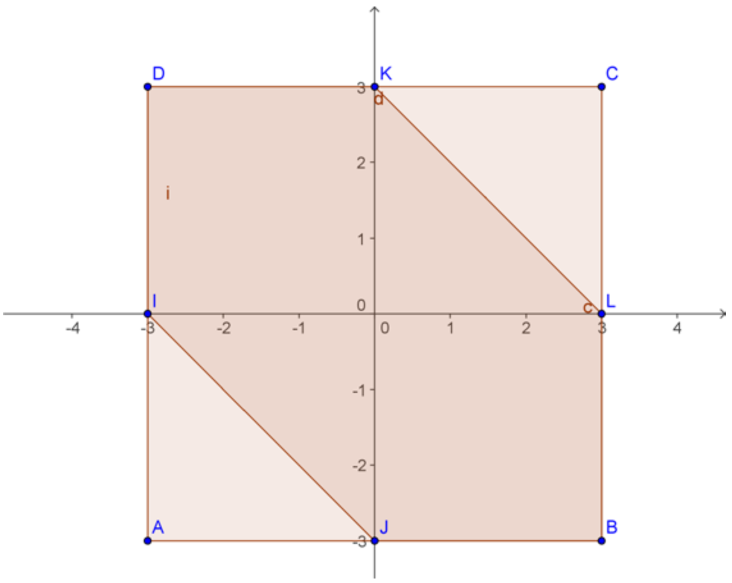


Figure 3

Ce domaine est obtenu en supprimant du carré $(ABCD)$ les deux triangles rectangles isocèles (AIJ) et (CKL) dont le côté de l'angle droit égal à $\frac{1}{2}$ dans les coins supérieur droit et inférieur gauche du carré. Son aire est donc de $1-2*\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ et on retrouve le résultat précédemment obtenu.

Si $S = X_1 + X_2 + X_3$ alors $E : -\frac{1}{2} \le Y_1 + Y_2 + Y_3 < \frac{1}{2}$. La variable aléatoire $Y_1 + Y_2 + Y_3$ est uniformément distribuée dans le cube $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[* \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[* \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et l'événement E est représenté par l'intersection de ce cube avec la bande d'espace limitée par les plans d'équations respectives $x+y+z=-\frac{1}{2}$ et $x+y+z=\frac{1}{2}$, ce plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

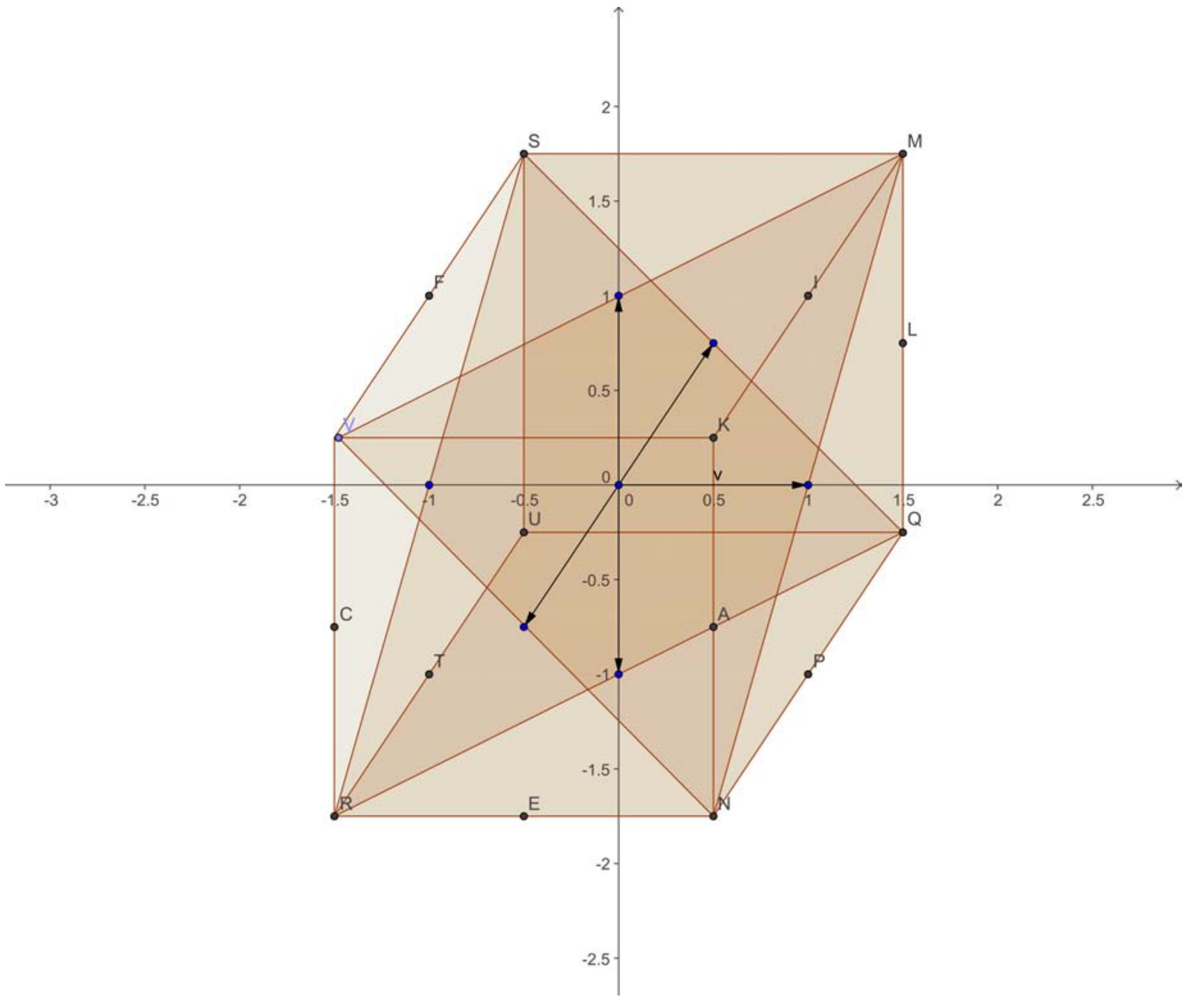


Figure 4

Ce domaine est obtenu en supprimant du cube $(URNQVKMS)$ les deux tétraèdres $(USRQ)$ et $(KVNM)$ trirectangles isocèles de côtés des angles droits égaux à 1, situés dans les coins inférieur arrière gauche et supérieur avant droit.

Son volume est donc de $1-2*\frac{1}{3}*1*\frac{1*1}{2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ et on retrouve le résultat précédemment obtenu.

Revenons au propos principal.

Pour traiter de l'égalité entre l'arrondi de la somme et la somme des arrondis de n nombres à l'unité près, quittons les raisonnements géométriques et supposons que n soit assez grand pour que l'on puisse appliquer le théorème de la limite centrale.

Pour pouvoir appliquer ce théorème, en pratique, on doit prendre $n \geq 30$. Alors

$$E : -\frac{1}{2} \leq Y_1 + Y_2 + ... + Y_n < \frac{1}{2},$$

où les $Y_k, k \in N; 1 \leq k \leq n$ sont des variables aléatoires identiques et indépendantes uniformément distribuées sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.

Donc

$$E(Y_k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x.dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$$

et

$$V(Y_k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2.dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}.$$

On est alors dans les conditions d'application du théorème de la limite centrale.

Donc la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{k=n} Y_k$ est approximativement normale de moyenne 0 et de variance $\frac{n}{12}$.

Ainsi, d'après le théorème de la limite centrale, la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k - 0}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$ a pour limite, lorsque n tend vers l'infini, la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite, que je note Φ.

Donc :

$$P(-\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{k=n} Y_k < \frac{1}{2}) = P(-\sqrt{\frac{3}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \sqrt{\frac{3}{n}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\sqrt{\frac{3}{n}}}^{\sqrt{\frac{3}{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt = 2.\Phi(\sqrt{\frac{3}{n}}) - 1.$$

On peut ainsi dresser le tableau de valeurs suivant :

n	$\sqrt{\frac{3}{n}}$ à 10^{-3} près.	$2.\Phi(\sqrt{\frac{3}{n}})-1.$
1	1,732	0,917 au lieu de 1.
2	1,225	0,779 au lieu de 0,75.
3	1	0,683 au lieu de 0,667.
4	0,866	0,614
5	0,775	0,561
6	0,707	0,520
7	0,655	0,487
8	0,612	0,460
9	0,577	0,346
10	0,548	0,416
20	0,387	0,361
30	0,316	0,248
40	0,274	0,216
50	0,245	0,194
100	0,173	0,138
200	0,122	0,097
500	0,077	0,062
1000	0,055	0,044
10000	0,017	0,013

Bien que j'aie dit que, pour appliquer le théorème de la limite centrale, il est nécessaire d'avoir $n \geq 30$, j'ai quand même fait le calcul pour des valeurs de n inférieures. Cela permet de constater une adéquation étonnante entre la valeur approchée de $p(E)$ obtenue par cette méthode et la valeur exacte obtenue dans le paragraphe 4.
Pour $n=1$, l'erreur relative faite en remplaçant la valeur exacte par la valeur approchée issue de l'application du théorème de la limite centrale est de $\frac{0{,}917-1}{1}=-0{,}083=-8{,}3\%$.

Pour $n=2$, elle est de environ $\frac{0{,}779-0{,}75}{0{,}75}\approx -0{,}037=3{,}7\%$.

Pour $n=3$, elle est de environ $\frac{0{,}683-0{,}667}{0{,}667}\approx -0{,}024=2{,}4\%$.

On constate un remarquable accord entre les valeurs approchées et les valeurs exactes, même dans ces cas où le théorème de la limite centrée n'est pas censé s'appliquer.

Ainsi, pour une somme de 4 réels pris au hasard, reprenant l'exemple de l'introduction, j'ai, si je fais confiance aux résultats du tableau, une probabilité supérieure à 0,6 que l'arrondi de la somme cherchée soit égale à la somme des arrondis des 4 nombres dont est constituée cette somme.

Qu'en est-il des erreurs relatives faites pour les valeurs de $n \in N; n \geq 4$?

On constate aussi, ce qui est intuitif, que, pour n grand, la probabilité de réalisation de E est faible.
On peut alors se contenter, au lieu de réaliser E, de se demander, m étant un entier donné, quelle est la probabilité de réalisation de l'événement

$$F = "\left| Arr(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) \right| \le m" .$$

Soit l un entier naturel. On considère l'événement $F_l = " Arr(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) = l"$.

Alors, en reprenant un raisonnement précédent :

$$(Arr(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) - \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) = l) \Leftrightarrow (Arr(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) + l) \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) + l - \frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{k=n} X_k < \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) + l + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow l - \frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{k=n} Y_k < l + \frac{1}{2})$$

Alors

$$F = "\left| \sum_{k=1}^{k=n} Y_k \right| \le m + \frac{1}{2}" .$$

Avec $m = 1$, on a : $P(-\frac{3}{2} \le \sum_{k=1}^{k=n} Y_k < \frac{3}{2}) = P(-3.\sqrt{\frac{3}{n}} \le \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Y_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < 3.\sqrt{\frac{3}{n}}) \approx 2.\Phi(3.\sqrt{\frac{3}{n}}) - 1$.

On obtient alors pour $n = 108$:

$$P(-\frac{3}{2} \le \sum_{k=1}^{k=108} Y_k < \frac{3}{2}) \approx 2.\Phi(3.\sqrt{\frac{3}{108}}) - 1 = 2.\Phi(\frac{1}{2}) - 1 \approx 2 * 0{,}6915 - 1 = 0{,}383 .$$

Et, puisque $1{,}96.\sqrt{\frac{108}{12}} \approx 2.\sqrt{\frac{108}{12}} = 6$, on sait que, dans 95% des cas, la différence entre l'arrondi de la somme et la somme des arrondis sera inférieure à 6.

Il existe certainement des formules donnant des majorations de l'erreur faite en utilisant cette approximation permise par le théorème de la limite centrée.

Il existe aussi une expression exacte, en fonction de *n*, de la probabilité que l'événement E soit réalisé où E s'écrit

$$Arr(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} Arr(X_k) \; .$$

Je n'en donnerai pas la démonstration car elle fait appel à des notions d'un niveau universitaire. Voici cette formule :

4. Calcul exact de $p(E)$ dans ne cas d'une somme de n réels avec $n \in N; n \ge 2$.

Théorème.

$$p(E) = \frac{1}{2^n.n!} . \sum_{k < \frac{n+1}{2}} (-1)^k . C_{n+1}^k . (n + 1 - 2.k)^n .$$

Ainsi, en appliquant la formule du théorème, on a :

$$p_1 = \frac{1}{2}.2^1 = 1;$$
$$p_2 = \frac{1}{4.2}.(3^2 - 3.1^2) = \frac{3}{4};$$
$$p_3 = \frac{1}{8.6}.(4^3 - 4.2^3) = \frac{32}{8.6} = \frac{2}{3};$$
$$p_4 = \frac{1}{16.24}.(5^4 - 5.3^4 + 10.1^4) = \frac{230}{2.8.24} = \frac{115}{192} \approx 0{,}59896;$$
$$p_5 = \frac{1}{32.120}.(6^5 - 6.4^5 + 15.2^5) = \frac{2112}{4.8.3.40} = \frac{176}{320} = \frac{11}{20} = 0{,}55;$$
$$p_6 = \frac{1}{64.720}.(7^6 - 7.5^6 + 21.3^6 - 35.1^6) = \frac{23548}{4.11520} = \frac{5887}{11520} \approx 0{,}51102.$$

On retrouve bien les résultats antérieurs obtenus pour $n = 1;2;3$. Pour $n = 4$, l'erreur relative faite en remplaçant la valeur exacte par la valeur approchée issue de l'application du théorème de la limite centrée est de environ : $\frac{0{,}614 - 0{,}599}{0{,}599} \approx 0{,}025 = 2{,}5\%$.

Pour $n = 5$, elle est de environ $\frac{0{,}561 - 0{,}550}{0{,}550} \approx 0{,}02 = 2{,}0\%$.

Pour $n = 6$, elle est de environ $\frac{0{,}520 - 0{,}511}{0{,}511} \approx 0{,}018 = 1{,}8\%$.

5. Conclusion.

La réponse à la question posée est relativement étonnante. Elle montre que le calcul mental approché est un instrument assez fiable, que les erreurs faites à chaque approximation ont tendance à se compenser et qu'on risque peu, avec ce genre de calcul de faire de grosses fautes. L'habitude de chercher à toujours vouloir estimer des ordres de grandeur des résultats à obtenir est donc une attitude fondamentalement saine qui, elle peut éviter les erreurs, toujours possibles.

Essais.	N1	N2.	S	Arr(N1)	Arr(N2)	S'	S"	S'=S"?
1	0,2846	0,5467	0,8313	0	1	1	1	1
2	0,7299	0,0595	0,7894	1	0	1	1	1
3	0,8389	0,5921	1,4311	1	1	2	1	0
4	0,4493	0,6840	1,1334	0	1	1	1	1
5	0,8734	0,1450	1,0185	1	0	1	1	1
6	0,9477	0,5537	1,5014	1	1	2	2	1
7	0,0137	0,5920	0,6057	0	1	1	1	1
8	0,5441	0,8629	1,4071	1	1	2	1	0
9	0,3621	0,6989	1,0610	0	1	1	1	1
10	0,6386	0,4249	1,0635	1	0	1	1	1
11	0,0100	0,1372	0,1472	0	0	0	0	1
12	0,7435	0,6949	1,4384	1	1	2	1	0
13	0,0416	0,9623	1,0039	0	1	1	1	1
14	0,0010	0,5665	0,5675	0	1	1	1	1
15	0,0911	0,9008	0,9919	0	1	1	1	1
16	0,5596	0,8257	1,3853	1	1	2	1	0
17	0,3718	0,0768	0,4486	0	0	0	0	1
18	0,0656	0,8713	0,9369	0	1	1	1	1
19	0,6939	0,5197	1,2136	1	1	2	1	0
20	0,8602	0,7565	1,6167	1	1	2	2	1
21	0,3709	0,3959	0,7668	0	0	0	1	0
22	0,9920	0,4352	1,4272	1	0	1	1	1
23	0,7764	0,1862	0,9626	1	0	1	1	1
24	0,1244	0,4612	0,5856	0	0	0	1	0
25	0,4034	0,1596	0,5630	0	0	0	1	0
26	0,9514	0,9845	1,9360	1	1	2	2	1
27	0,8717	0,6447	1,5164	1	1	2	2	1
28	0,6493	0,9663	1,6156	1	1	2	2	1
29	0,8279	0,7418	1,5697	1	1	2	2	1
30	0,7943	0,3586	1,1528	1	0	1	1	1
31	0,6064	0,0917	0,6980	1	0	1	1	1
32	0,2983	0,6004	0,8987	0	1	1	1	1
33	0,1050	0,9027	1,0077	0	1	1	1	1
34	0,6048	0,7113	1,3161	1	1	2	1	0
35	0,3632	0,0247	0,3879	0	0	0	0	1
36	0,2939	0,4500	0,7439	0	0	0	1	0
37	0,4292	0,0521	0,4813	0	0	0	0	1
38	0,5367	0,9765	1,5132	1	1	2	2	1
39	0,9378	0,4363	1,3741	1	0	1	1	1
40	0,7636	0,3399	1,1035	1	0	1	1	1
41	0,3364	0,2650	0,6014	0	0	0	1	0
42	0,0199	0,5758	0,5957	0	1	1	1	1
43	0,4949	0,2644	0,7593	0	0	0	1	0
44	0,7558	0,8691	1,6249	1	1	2	2	1
45	0,2415	0,9070	1,1485	0	1	1	1	1
46	0,4258	0,7477	1,1736	0	1	1	1	1
47	0,3596	0,1690	0,5286	0	0	0	1	0
48	0,7613	0,9117	1,6730	1	1	2	2	1
49	0,7526	0,6707	1,4232	1	1	2	1	0
50	0,8544	0,5220	1,3764	1	1	2	1	0

Fréquence d'obtention de S' = S":	0,7

Es.	N1	N2	N3	A(N1)	A(N2)	A(N3)	S	S'	S"	S'=S"?	
1	0,0325	0,7577	0,0780	0	1	0	0,8683	1	1	1	Nombre
2	0,9488	0,8504	0,2462	1	1	0	2,0454	2	2	1	d'égalités :
3	0,4086	0,3636	0,8162	0	0	1	1,5884	1	2	0	34
4	0,4217	0,6891	0,4247	0	1	0	1,5354	1	2	0	
5	0,0831	0,2303	0,2360	0	0	0	0,5494	0	1	0	Fréquence:
6	0,2540	0,5042	0,3724	0	1	0	1,1307	1	1	1	
7	0,9088	0,5487	0,7897	1	1	1	2,2472	3	2	0	0,68
8	0,5697	0,3747	0,5565	1	0	1	1,5009	2	2	1	
9	0,6144	0,4331	0,3671	1	0	0	1,4147	1	1	1	
10	0,6268	0,6998	0,0402	1	1	0	1,3668	2	1	0	
11	0,0202	0,1181	0,8480	0	0	1	0,9864	1	1	1	
12	0,2259	0,0800	0,1856	0	0	0	0,4915	0	0	1	
13	0,2912	0,9304	0,9606	0	1	1	2,1822	2	2	1	
14	0,6811	0,4720	0,6635	1	0	1	1,8166	2	2	1	
15	0,5234	0,0759	0,8249	1	0	1	1,4242	2	1	0	
16	0,5629	0,2264	0,4175	1	0	0	1,2068	1	1	1	
17	0,9844	0,2816	0,5088	1	0	1	1,7749	2	2	1	
18	0,3087	0,1705	0,7963	0	0	1	1,2755	1	1	1	
19	0,6169	0,6073	0,6189	1	1	1	1,8430	3	2	0	
20	0,3603	0,1367	0,1565	0	0	0	0,6535	0	1	0	
21	0,0754	0,6569	0,2707	0	1	0	1,0030	1	1	1	
22	0,8531	0,7611	0,6132	1	1	1	2,2274	3	2	0	
23	0,1011	0,4075	0,3816	0	0	0	0,8902	0	1	0	
24	0,0622	0,0814	0,6699	0	0	1	0,8134	1	1	1	
25	0,1378	0,6993	0,8634	0	1	1	1,7005	2	2	1	
26	0,8810	0,7469	0,9857	1	1	1	2,6136	3	3	1	
27	0,7269	0,2463	0,1815	1	0	0	1,1548	1	1	1	
28	0,5819	0,3281	0,3266	1	0	0	1,2365	1	1	1	
29	0,2393	0,4031	0,1219	0	0	0	0,7642	0	1	0	
30	0,0840	0,9981	0,5904	0	1	1	1,6726	2	2	1	
31	0,2140	0,8653	0,8111	0	1	1	1,8903	2	2	1	
32	0,5251	0,7145	0,9363	1	1	1	2,1759	3	2	0	
33	0,0385	0,5498	0,2765	0	1	0	0,8649	1	1	1	
34	0,8936	0,8453	0,0894	1	1	0	1,8284	2	2	1	
35	0,4195	0,2457	0,6664	0	0	1	1,3316	1	1	1	
36	0,7568	0,8529	0,5773	1	1	1	2,1870	3	2	0	
37	0,9216	0,2895	0,7018	1	0	1	1,9129	2	2	1	
38	0,4270	0,8104	0,2266	0	1	0	1,4640	1	1	1	
39	0,7902	0,5018	0,3987	1	1	0	1,6907	2	2	1	
40	0,4535	0,8713	0,5240	0	1	1	1,8488	2	2	1	
41	0,3079	0,4055	0,4043	0	0	0	1,1177	0	1	0	
42	0,5719	0,0488	0,1623	1	0	0	0,7830	1	1	1	
43	0,4659	0,3525	0,8244	0	0	1	1,6428	1	2	0	
44	0,8967	0,6412	0,1222	1	1	0	1,6602	2	2	1	
45	0,8076	0,1423	0,7929	1	0	1	1,7428	2	2	1	
46	0,1475	0,5680	0,3751	0	1	0	1,0905	1	1	1	
47	0,6662	0,1720	0,3436	1	0	0	1,1817	1	1	1	
48	0,8915	0,9313	0,0191	1	1	0	1,8420	2	2	1	
49	0,6578	0,5077	0,5011	1	1	1	1,6667	3	2	0	
50	0,5623	0,0718	0,3583	1	0	0	0,9924	1	1	1	

Es.	N1	N2.	N3	N4	S	A(N1)	A(N2)	A(N3)	A(N4)	S'	S"	Eg.
1	0,9927	0,2722	0,1130	0,5459	1,9239	1	0	0	1	2	2	1
2	0,6830	0,5088	0,3626	0,6757	2,2301	1	1	0	1	3	2	0
3	0,9778	0,0691	0,5446	0,9428	2,5343	1	0	1	1	3	3	1
4	0,9408	0,5876	0,4629	0,6264	2,6177	1	1	0	1	3	3	1
5	0,9551	0,3695	0,5353	0,9394	2,7994	1	0	1	1	3	3	1
6	0,6851	0,4608	0,3975	0,6872	2,2306	1	0	0	1	2	2	1
7	0,2949	0,5400	0,6607	0,5802	2,0758	0	1	1	1	3	2	0
8	0,0056	0,4633	0,5548	0,2486	1,2724	0	0	1	0	1	1	1
9	0,4314	0,0655	0,8012	0,3083	1,6064	0	0	1	0	1	2	0
10	0,3026	0,1167	0,4411	0,0817	0,9421	0	0	0	0	0	1	0
11	0,5881	0,3499	0,4373	0,0237	1,3990	1	0	0	0	1	1	1
12	0,5113	0,0234	0,3614	0,2318	1,1279	1	0	0	0	1	1	1
13	0,9526	0,9688	0,9139	0,1982	3,0335	1	1	1	0	3	3	1
14	0,1261	0,1557	0,2418	0,4399	0,9635	0	0	0	0	0	1	0
15	0,9677	0,8036	0,5945	0,9527	3,3185	1	1	1	1	4	3	0
16	0,9025	0,4541	0,1413	0,8150	2,3129	1	0	0	1	2	2	1
17	0,9290	0,8934	0,3443	0,0663	2,2329	1	1	0	0	2	2	1
18	0,2146	0,0356	0,2368	0,1232	0,6102	0	0	0	0	0	1	0
19	0,5884	0,5523	0,1796	0,9033	2,2237	1	1	0	1	3	2	0
20	0,6814	0,3754	0,7021	0,6116	2,3705	1	0	1	1	3	2	0
21	0,5656	0,4113	0,9716	0,2707	2,2192	1	0	1	0	2	2	1
22	0,3793	0,2247	0,4620	0,5696	1,6355	0	0	0	1	1	2	0
23	0,9537	0,7109	0,7088	0,9452	3,3186	1	1	1	1	4	3	0
24	0,0888	0,2079	0,9776	0,1758	1,4500	0	0	1	0	1	1	1
25	0,8286	0,1586	0,5481	0,9701	2,5054	1	0	1	1	3	3	1
26	0,5763	0,4118	0,8576	0,1546	2,0003	1	0	1	0	2	2	1
27	0,0172	0,8627	0,4173	0,6677	1,9650	0	1	0	1	2	2	1
28	0,2744	0,1905	0,6646	0,5525	1,6820	0	0	1	1	2	2	1
29	0,1696	0,0441	0,2394	0,1972	0,6503	0	0	0	0	0	1	0
30	0,1975	0,3145	0,0459	0,5857	1,1436	0	0	0	1	1	1	1
31	0,8952	0,1617	0,1970	0,3947	1,6485	1	0	0	0	1	2	0
32	0,6304	0,4161	0,5858	0,1349	1,7671	1	0	1	0	2	2	1
33	0,9906	0,8021	0,1887	0,0030	1,9844	1	1	0	0	2	2	1
34	0,5296	0,1925	0,4345	0,9784	2,1350	1	0	0	1	2	2	1
35	0,2704	0,7217	0,5081	0,5124	2,0126	0	1	1	1	3	2	0
36	0,3352	0,1218	0,7399	0,8936	2,0905	0	0	1	1	2	2	1
37	0,8442	0,1759	0,2029	0,4605	1,6836	1	0	0	0	1	2	0
38	0,6634	0,5479	0,4976	0,1778	1,8868	1	1	0	0	2	2	1
39	0,8823	0,3102	0,2475	0,4526	1,8926	1	0	0	0	1	2	0
40	0,4709	0,3760	0,0481	0,9893	1,8843	0	0	0	1	1	2	0
41	0,0101	0,1638	0,1688	0,2413	0,5840	0	0	0	0	0	1	0
42	0,2089	0,3920	0,1118	0,9956	1,7083	0	0	0	1	1	2	0
43	0,8238	0,0408	0,5244	0,8620	2,2510	1	0	1	1	3	2	0
44	0,5616	0,1170	0,2970	0,5567	1,5324	1	0	0	1	2	2	1
45	0,6872	0,1691	0,7672	0,6821	2,3056	1	0	1	1	3	2	0
46	0,7023	0,8590	0,5185	0,4745	2,5543	1	1	1	0	3	3	1
47	0,1427	0,5018	0,7533	0,8984	2,2962	0	1	1	1	3	2	0
48	0,3548	0,8936	0,8151	0,1384	2,2019	0	1	1	0	2	2	1
49	0,3338	0,0490	0,8651	0,5460	1,7940	0	0	1	1	2	2	1
50	0,4434	0,5676	0,4229	0,8668	2,3007	0	1	0	1	2	2	1

Fréquence d'obtention de S' = S":	0,56