N° 108 – Juin 2008

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Douce France : le monde entier nous l'envie : suite et fin !
- Placement d'argent
- Writing and spelling numbers in English

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Sommaire

Articles

Editorial

Mercredi matin, 10 heures, temps gris et pluvieux. Classe de seconde bien excitée par deux heures de français et une récréation. Aujourd'hui, rendu et corrigé du dernier devoir. Il y a Lucille, qui a comme toujours très bien réussi, il y a Jérémy, qui ne fait rien mais il voudrait bien, c'est juste qu'il ne peut pas. Entre les deux, il y a la classe moyenne de ma classe, cette masse grise qui se cherche et travaille en fonction de l'ambiance du moment et des notes des copains.
Et puis il y a Coralie.
Coralie, malgré une intuition pointue et d'excellentes bases de troisième, se retrouve avec un 8/20 sous le nez qu'elle tord avec application. Je lui ai pourtant collé dans les pattes un certain Bastien, besogneux et très efficace mais affligé d'un manque de confiance en lui tel qu'avec une moyenne de 15 il ne rate aucune de mes aides individualisées. Il chaperonne donc Coralie depuis la fin du premier trimestre : ça dégrippe les rouages cérébraux rouillées par la flemme de la jeune fille et ça replace le bodyguard dans une perspective plus positive. Ma stratégie était imparable, et pourtant…
Je creuse: « Coralie, tu n'as pas révisé, je me trompe ? » « Ben non ! De toutes façons, les maths ça sert à rien, alors je vois pas pourquoi je me fatiguerais. » Ah celle-là, je l'avais pas vue venir. J'attendais un rendez-vous de médecin, le shopping avec Maman, mais j'ai droit directement et sans détour à la cruelle vérité. Je n'ai même pas le temps d'ouvrir la bouche pour lui répondre avec douceur que ce n'est ni le lieu ni l'heure d'exprimer le ressenti de son moi profond que Bastien s'interpose : « Déjà, ça te servirait à avoir de bonnes notes ! T'as même pas fait l'exercice 1. » Lucille, qui est dans la même bande, poursuit la contre-offensive : « Et puis les maths, ça sert quand tu fais des sciences ou que tu fais ingénieur. Comment tu crois qu'ils envoient des fusées sur Mars ? » Et pendant que Coralie ronchonne et que la masse commence à approuver d'un air rigolard, Jérémy porte l'estocade : « Et puis d'abord, les maths, t'en as besoin quand tu veux trouver des solutions. »

J'ai beaucoup apprécié cet échange – qui n'a en rien profité à Coralie ; sa mère lui a soufflé dans les bronches et elle a passé la moyenne au DS suivant pour ne plus la lâcher, si ça peut vous rassurer – mais de toutes les réponses à cette déclaration de désamour qu'a faite une jeune adolescente en rébellion à ma matière chérie, c'est celle de Jérémy qui m'a le plus plu, évidemment. Enfonçons des portes ouvertes : on est tous obligés de le savoir depuis que le très bourbakiste Jean Dieudonné a écrit son Pour l'honneur de l'esprit humain, *les mathématiques vivent lorsqu'un problème est* en cours de résolution. *Qu'on regarde le théorème de Fermat et les trois cents ans d'histoire des maths que sa démonstration a permis d'écrire, les domaines d'étude très divers qui ont été ouverts au long de ce parcours chaotique ; ou encore la récente démonstration de la conjecture de Poincaré par Grigori Perelman, qui ne l'a fait que pour le plaisir et a refusé la médaille Fields et le prix Clay d'un million de dollars qui va avec ; je vous épargnerai le couplet sur nos pères de la Grèce antique. On sait tous qu'on fait des maths pour le fun, pour se prendre la tête, comme le dirait Jérémy. Pour* trouver *des solutions ; les trouver, pas les avoir ! Merci Jérémy, pour moi c'était surtout pour m'occuper pendant la semaine et le week-end avec vos copies.*

Alors dans ce numéro, on trouve des solutions. Celles des exercices des Rallyes Lycées et Collèges, auquel le Bloc-notes de ce numéro est consacré, nous montrent que nos élèves n'ont pas eu peur de la prise de tête et sont vaillamment montés au front sur des *questions qui auraient laissé Coralie de marbre. Michel Bridenne nous apporte la dernière partie de son travail sur le contrat didactique dans l'évaluation et nous aide, exemples et solutions à l'appui, à justifier correctement et sans ambiguïté nos réponses. Michel Lafond explore un problème de mathématiques financières pour le seul honneur de l'esprit humain, car sa solution ne vous apportera pas la fortune. Vous aurez également les solutions de l'activité sur les nombres en section européenne anglais. Et puis s'il vous en faut encore, les « Jeux et Problèmes » sont toujours là pour vous permettre de couvrir de gloire votre esprit.*

David Magnien

NDA : Toute ressemblance avec des personnes existant ou ayant existé est purement fictive. Aucun animal n'a été blessé au cours de cette histoire. Pour ma propre sécurité, les noms des protagonistes ont été modifiés. A consommer avec modération.

LES RALLYES

Corrigé : Lycées

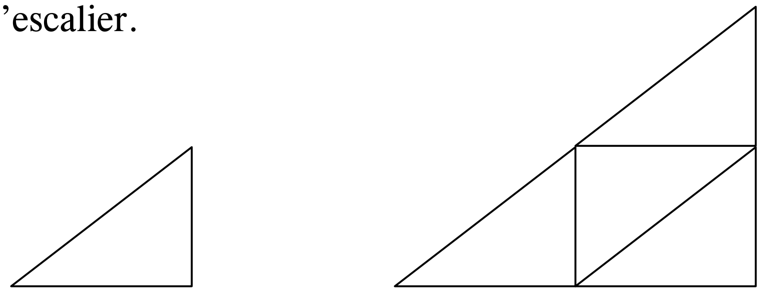
1 – ATTENTION À LA MARCHE

Énorme succès pour cet exercice, que tout le monde aborde, mais avec seulement 80% de réussite.

Les principales erreurs en dehors des erreurs de calcul sont :

110 kg pour 10 marches, cela fait 220 kg pour 20 marches. La simple proportionnalité ne marche pas ici !

Il ne faut pas se limiter au nombre de marches mais compter avec la section complète de l'escalier.



Certaines équipes ont compté hâtivement en se basant sur la figure ci-dessus. Elles en ont déduit que pour 20 marches, il faut 4 fois plus de ciment, ce qui donne la réponse fausse 440 kg.

L'erreur est cette fois minime, car on peut montrer que :

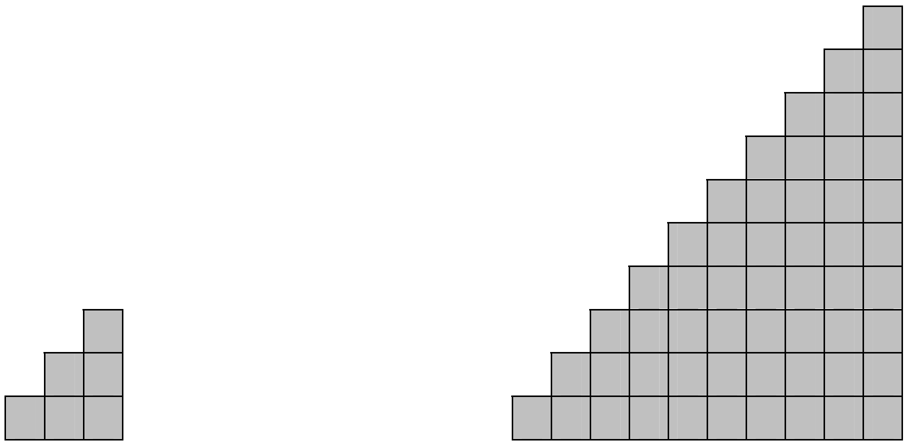
Si pour n marches il faut x kg de ciment alors pour $2n$ marches il faut

$\left(4-\frac{2}{n+1}\right)x$ kg de ciment.

La multiplication par 4 est donc très proche de la réalité, et d'autant plus que n est grand.

Revenons à notre problème :

Solution :



Un escalier de 10 marches a une section contenant

$$1 + 2 + 3 + \text{---} + 10 = 55 \text{ "carrés".}$$

La section d'un escalier de 20 marches contiendra

$$1 + 2 + 3 + \text{---} + 20 = 210 \text{ "carrés"}$$

110 kg de ciment pour 55 "carrés" cela fait 110/55 kg de ciment par carré soit :
$210 \times 110/55$ = **420 kg de ciment** pour l'escalier de 20 marches.

2 – CHOUX À LA CRÈME

Cet exercice abordé par 96% des équipes a été majoritairement bien réussi.
En revanche, beaucoup de groupes ont mal géré les encadrements et obtiennent le prix d'un chou compris strictement entre 1,23 et 1,23 ! (Ce qui ne les empêche pas de conclure sur un prix unitaire de 1,23 €...)

Solution :
Soit x le prix d'un chou.
L'expression "quelques centimes" étant au pluriel, on traduit les deux hypothèses de l'énoncé par les encadrements suivants : $\begin{cases} 11{,}02 \le 9x \le 11{,}99 \\ 15{,}02 \le 13x \le 15{,}99 \end{cases}$ qui équivalent à $\begin{cases} 143{,}26 \le 117x \le 155{,}87 \\ 135{,}18 \le 117x \le 143{,}91 \end{cases}$ après multiplication des deux encadrements respectivement par 13 et 9.
Par conséquent ce système d'encadrements implique $143{,}26 \le 117x \le 143{,}91$ puis par division par 117, l'encadrement final : $1{,}22\overline{44} \le x \le 1{,}23$.

Un chou à la crème vaut donc $\boxed{\text{1 euro et 23 cents}}$.

3 – LA SOMME DE L'ANNÉE

92 équipes de Seconde sur 105 ont abordé cet exercice, et 77 d'entre elles ont trouvé une réponse exacte. Ce problème a donc été particulièrement bien trouvé, souvent par tâtonnement, il est vrai. Quelques équipes ont néanmoins présenté quelques bribes de raisonnement, un petit nombre d'entre elles ont rédigé une démonstration complète.
La solution trouvée est généralement celle ne comportant que des entiers positifs. Les deux possibilités comprenant des nombres négatifs ont été rencontrées à deux ou trois reprises.
Solution :
Si 2008 est somme de n entiers consécutifs ($n \ge 2$), notons k le plus petit de ces entiers ; on doit donc avoir :

$$k + (k+1) + (k+2) + ... + (k+n-2) + (k+n-1) = 2008.$$

Écrivons le membre de gauche à l'envers :

$$(k+n-1)+(k+n-2)+...+(k+1)+k=2008.$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient à gauche n termes identiques et égaux à $2k+n-1$. On en déduit : $n\times(2k+n-1)=2\times2008$.

<u>1[er] cas</u> : si n est pair, posons $n=2m$ avec $m\geq1$; il vient : $m\times(2k+2m-1)=2008$. Or, $2k+2m-1$ est impair, et nous sommes donc ramenés à décomposer 2008 en produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 1, dont l'un est impair et l'autre positif.

D'après la décomposition en facteurs premiers : $2008=2^3\times251$; il y a donc deux possibilités $\begin{cases}2k+2m-1=251\\ m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2k+2m-1=1\\ m=2008\end{cases}$.

On en tire $\begin{cases}k=118\\ m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}k=-2007\\ m=2008\end{cases}$.

Pour la première possibilité, le plus petit des entiers serait 118, et il y aurait 16 entiers consécutifs.

Cette solution convient, puisqu'en effet : $118+119+...+133=2008$.

Pour la deuxième possibilité, le plus petit des entiers serait -2007 et il y aurait 4016 entiers consécutifs.

Cette solution convient aussi si l'on accepte les entiers négatifs, puisque :

$$(-2007)+...+(-1)+0+1+...+2007+2008=2008.$$

<u>2[ème] cas</u> : si n est impair, posons $n=2m+1$ avec $m\geq1$; l'égalité devient : $(2m+1)(2k+2m)=2\times2008$, soit en simplifiant : $(2m+1)(k+m)=2008$. Ici encore, il s'agit de décomposer 2008 en produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 1, dont l'un est impair et l'autre positif.

Les deux seules possibilités sont $\begin{cases}2m+1=251\\ k+m=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}2m+1=1\\ k+m=2008\end{cases}$.

On en tire : $\begin{cases}m=125\\ k=-117\end{cases}$ ou $\begin{cases}m=0\\ k=2008\end{cases}$.

Pour la première possibilité, le plus petit des entiers serait -117 et il y aurait 251 entiers consécutifs.

Si l'on n'accepte que des entiers positifs, cette condition ne convient évidemment pas ; si l'on tolère des nombres négatifs, elle est acceptable puisque :

$$(-117)+...+(-1)+0+1+...+117+118+...+133=2008.$$

La deuxième possibilité est exclue puisque m est supposé non nul.

Conclusion *:* Il y a une seule solution avec plusieurs entiers tous positifs :

118 + 119 +…+ 133 = 2008, … et deux autres solutions comportant des négatifs :

(– 117) + (–116) +…+ 0 + 1 +…+ 132 + 133 = 2008

et **(– 2007) + (– 2006) +…+ (– 1) + 0 + 1 +…+ 2006 + 2007 + 2008 = 2008**

4 – FRANCHE MACONNERIE

97% des équipes sont attirées par la maçonnerie, hélas, seules 18% des équipes donnent le temps minimal à la seconde près.

La principale bourde a été d'oublier que les maçons et leurs apprentis travaillent en même temps. On ajoute alors des durées qui se chevauchent en réalité, ce qui explique nombre d'erreurs.

Les "fractions" de briques ont été sources de bien des erreurs, sinon, parmi les très nombreuses équipes qui montrent bien que 1980 briques peuvent être posées en exactement 2 heures et demi soit 9000 secondes, la majorité utilise une proportionnalité pour les 20 briques restantes, ce qui occasionne une erreur de quelques secondes.

Solution :

Que peuvent faire nos ouvriers pendant ***t*** secondes ?

Chaque maçon pourra poser $\frac{t}{25}$ briques si on admet les fractions de briques !

Sinon il faut arrondir à l'entier inférieur, et si on note comme c'est l'usage désormais $\lfloor x \rfloor$ l'entier immédiatement inférieur ou égal à x, alors pendant ***t*** secondes :

Chaque maçon pourra poser $\left\lfloor \frac{t}{25} \right\rfloor$ briques, et chaque apprenti pourra poser $\left\lfloor \frac{t}{40} \right\rfloor$ briques ; si bien qu'à eux tous ils pourront poser pendant t secondes un nombre entier de briques égal à $B(t) = 3\left\lfloor \frac{t}{25} \right\rfloor + 4\left\lfloor \frac{t}{40} \right\rfloor$

La fonction B est croissante, et comme $B(9099) = 1997$ et $B(9100) = 2000$, cela signifie qu'il leur faudra au minimum 9100 secondes pour poser 2000 briques.

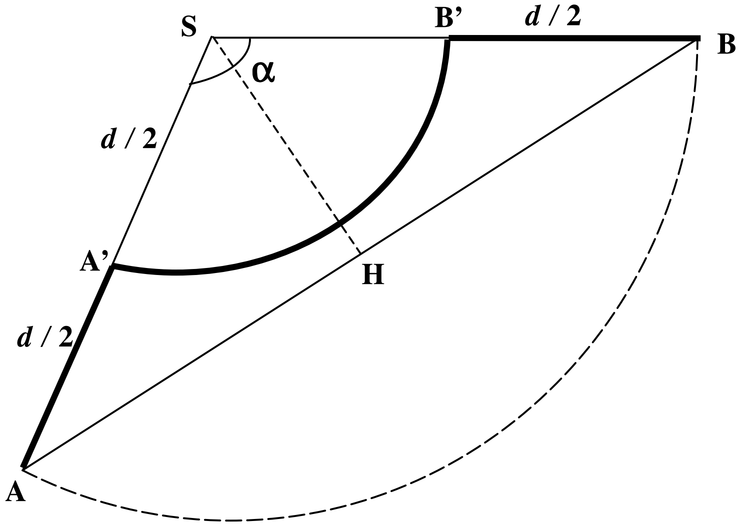
9100 secondes, cela fait **2 heures, 31 minutes et 40 secondes**.

5 – PAS FOLLE, LA GUÊPE

82% des groupes abordent cet exercice, et parmi ceux qui ont échoué, une très large majorité a proposé le parcours A-S-B, soit une distance d'exactement 30 cm. L'énoncé précisait pourtant que la distance parcourue par la guêpe devait être inférieure à 30 cm…

Il fallait effectivement se ramener au patron du cône : très peu de groupes y ont pensé ! 10% de bonnes réponses ce n'est pas beaucoup.

Solution :
Réalisons un patron du cône de révolution de sommet S.
H est le projeté orthogonal de S sur [AB].



Notons d la distance SA et α une mesure (en radians) de l'angle géométrique ASB.
Le parcours de la mouche (en pointillé) vaut 40 cm, donc $d \times \alpha = 40$.

Le parcours du frelon (en gras) vaut 35 cm, donc $2 \times \left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{d}{2}\right) \times \alpha = 35$.

La résolution du système $\begin{cases} d \times \alpha = 40 \\ d + \frac{d \times \alpha}{2} = 35 \end{cases}$ donne $\begin{cases} d = 15cm \\ \alpha = \frac{8}{3} rad \end{cases}$.

La distance la plus courte étant la ligne droite, la guêpe parcourra le segment [AB].
ASB étant isocèle en S et ASH rectangle en H, on a

$$AB = 2d \sin(\alpha/2) = 30 \times \sin\left(\frac{4}{3}\right) \approx \boxed{29,16cm}$$

qui est en effet plus petit que 30 cm.

6 – TIERCÉ GAGNANT

Ce problème a particulièrement inspiré les participants, puisque 217 équipes sur 242 l'abordent, soit environ 9 équipes sur 10. La réussite est nettement moins bonne : 22 équipes seulement trouvent la bonne solution.
Il est vrai que l'énoncé omettait de préciser que chaque coureur effectue son parcours à une vitesse supposée constante ... ce qu'il fallait supposer. La faute de raisonnement la plus fréquemment rencontrée a consisté à affirmer que lorsque le premier coureur arrive, le troisième est situé à 15 mètres, puisque $10 + 5 = 15$. Ce serait vrai uniquement dans le cas où les vitesses des coureurs seraient identiques !

Solution :

Notons v_1, v_2 et v_3 les vitesses respectives des trois coureurs (en mètre par seconde), t_1, t_2, t_3 leurs "temps" respectifs (en seconde) sur l'ensemble de la course.

Les données du problème conduisent aux conditions : $\begin{cases} v_1t_1 = v_2t_2 = v_3t_3 = 500 \\ v_2t_1 = 495 \\ v_3t_2 = 490 \\ t_3 = t_1 + 3 \end{cases}$.

On en tire : $t_1 + 3 = t_3 = \dfrac{500}{v_3} = \dfrac{500}{490}t_2 = \dfrac{500}{490} \times \dfrac{500}{v_2} = \dfrac{500^2}{490 \times 495}t_1$.

Si on regroupe les t_1 dans $\dfrac{500^2}{490 \times 495}t_1 = t_1 + 3$ on obtient :

$\left(\dfrac{500^2 - 490 \times 495}{490 \times 495}\right)t_1 = 3$, ce qui fournit $t_1 = \dfrac{3 \times 490 \times 495}{500^2 - 490 \times 495} = \dfrac{14553}{149} \approx 97{,}67$.

On en déduit la vitesse du vainqueur : $v_1 = \dfrac{500}{t_1} = \dfrac{74500}{14553} \approx 5{,}119$.

Conclusion : la vitesse du vainqueur est environ 5,119 m.s $^{-1}$
(soit encore **18,429 km.h $^{-1}$**).

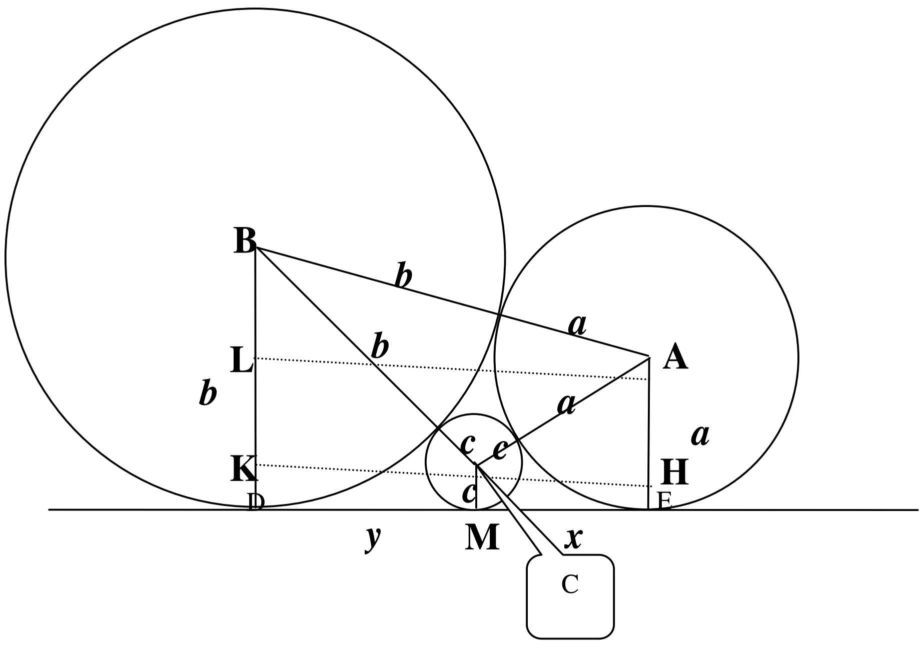
7 – LES TROIS CERCLES

Deux tiers des équipes tentent de calculer le petit rayon, seules 11% des équipes donnent la valeur exacte.

Quelques équipes ont cru que le triangle ABC était rectangle, d'autres ont voulu à tout prix utiliser le théorème de Thalès, d'autres partent sur l'idée fausse que le rapport entre les rayons *c* et *a* est le même qu'entre les rayons *a* et *b*, et beaucoup n'exploitent pas les équations parfois incomplètes.

Bref, les écueils étaient nombreux…

Solution :



Nommons a, b, c les mesures des trois rayons, A, B, C les trois centres de cercles et posons $x = \mathrm{ME}$ $y = \mathrm{MD}$.
Pythagore dans CHA donne $(a - c)^2 + x^2 = (a + c)^2$ (1)
Pythagore dans CKB donne $(b - c)^2 + y^2 = (b + c)^2$ (2)
Pythagore dans ALB donne $(x + y)^2 + (b - a)^2 = (b + a)^2$ (3)

De (1) on tire $x^2 = 4ac$ donc $x = 2\sqrt{ac}$
De (2) on tire $y^2 = 4bc$ donc $y = 2\sqrt{bc}$
Enfin, de (3) on tire $(x + y)^2 = 4\,ab$ donc $(x + y) = 2\sqrt{ab}$ qui s'écrit, en utilisant les expressions ci-dessus : $2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab}$

D'où la belle expression de c en fonction de a et b : $\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Ce qui donne ici avec $a = 4$ et $b = 9$: $\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{36}}{2+3} = 1{,}2$ d'où $\mathbf{c = 1{,}44\ m}$.

8 – CODE DE VINCI

92% des équipes cherchent le code, et pratiquement tous ceux qui l'ont abordé ont proposé la bonne solution : pour certains, la chance y est pour beaucoup, pour d'autres, cette solution a été accompagnée d'un raisonnement logique et souvent consistant.
A noter quelques tentatives de programmation sur calculatrice (en Basic) ou sur tableur, dont l'une est maîtrisée et complète.

Solution :
Notons le code $abcd$ avec $a \neq 0$.
D'après l'énoncé, nous avons : $57{,}8 < \dfrac{1000a + 100b + 10c + d}{a + b + c + d} < 57{,}9$ (1)
Ce qui entraîne $1000a + 100b + 10c + d < 57{,}9\,(a + b + c + d)$ soit :
$$942{,}1\,a + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d \qquad (2)$$

- Montrons d'abord que $a = 1$.

En effet, si l'on suppose que a est supérieur ou égal à 2, (2) entraînerait :
$1884{,}2 \leq 942{,}1 \times 2 + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d \leq (47{,}9 \times 9 + 56{,}9 \times 9) = 943{,}2$
qui est manifestement impossible.

Par conséquent, $\boxed{a = 1}$ et (2) devient : $942{,}1 + 42{,}1\,b < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d$ (3)

- Montrons ensuite que $b = 0$.

Si l'on suppose b supérieur ou égal à 1, alors :
(3) entraînerait : $984{,}2 \leq 942{,}1 + 42{,}1\,b \leq (47{,}9 \times 9 + 56{,}9 \times 9) = 943{,}2$
qui est manifestement impossible.

Par conséquent, $\boxed{b = 0}$

- Montrons enfin que $c = 9$.

(3) avec $b = 0$ donne $942{,}1 < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d$ (4)

Si l'on suppose c inférieur ou égal à 8, alors :

(4) entraînerait $942{,}1 < 47{,}9\,c + 56{,}9\,d \leq 47{,}9 \times 8 + 56{,}9\,d$ donc $558{,}9 < 56{,}9d$

qui est impossible puisque d dépasserait 9.

Par conséquent, $\boxed{c = 9}$

- Pour le dernier chiffre : (4) avec $c = 9$ donne $511 < 56{,}9\,d$ donc $8{,}98 < d$

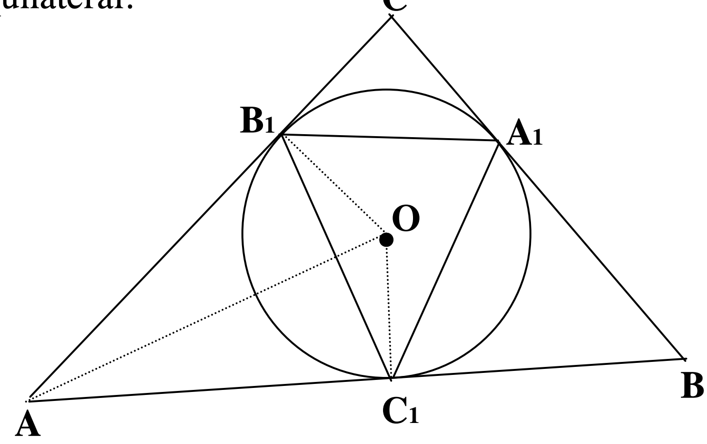
donc $\boxed{d = 9}$.

En conclusion le code de Leonardo est **1099** (unique possibilité).

Complément :
C'est plus difficile à démontrer, mais avec $a = 0$, il existe une seule possibilité : c'est le code 0925.

9 – TRIANGLES EN CASCADE

Cet exercice a connu une réussite médiocre, mais peut-être parce que c'était le dernier. 50% des équipes se sont risqués dans cette cascade, et la plupart d'entre eux s'y sont noyés : 5 équipent au total exposent une solution correcte. Les outils requis pour ce problème ne dépassaient pourtant pas ceux étudiés au collège, le principal étant le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé.
Parmi les incorrections rencontrées, beaucoup d'élèves se contentent de mesurer le triangle particulier de l'énoncé, d'autres affirment –à tort– que le triangle $A_3B_3C_3$ est équilatéral.



Étudions d'abord la figure formée par un triangle ABC, son cercle inscrit, de centre O, et les trois points de contact A_1, B_1, C_1 avec les côtés.

D'après le théorème de l'angle inscrit : $angle(C_1A_1B_1) = \frac{1}{2} angle(C_1OB_1)$.

La bissectrice (AO) est un axe de symétrie du quadrilatère AC_1OB_1, donc $\frac{1}{2} angle(C_1OB_1) = angle(C_1OA)$.

Le triangle AC_1O est rectangle en C_1 (propriété du cercle inscrit), donc $angle(C_1OA) = 90° - angle(BAO)$.

O est sur la bissectrice issue de A, donc : $angle(BAO) = \frac{1}{2} angle(CAB)$.

Il résulte des quatre égalités précédentes que $angle(C_1A_1B_1) = 90° - \frac{1}{2} angle(CAB)$.

Appliquons cette dernière égalité à chacun des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, et $A_3B_3C_3$. Il vient :

$$angle\ (C_3A_3B_3) = 90° - \frac{1}{2} angle\ (C_2A_2B_2) = 90° - \frac{1}{2}\left(90° - \frac{1}{2} angle(C_1A_1B_1)\right)$$

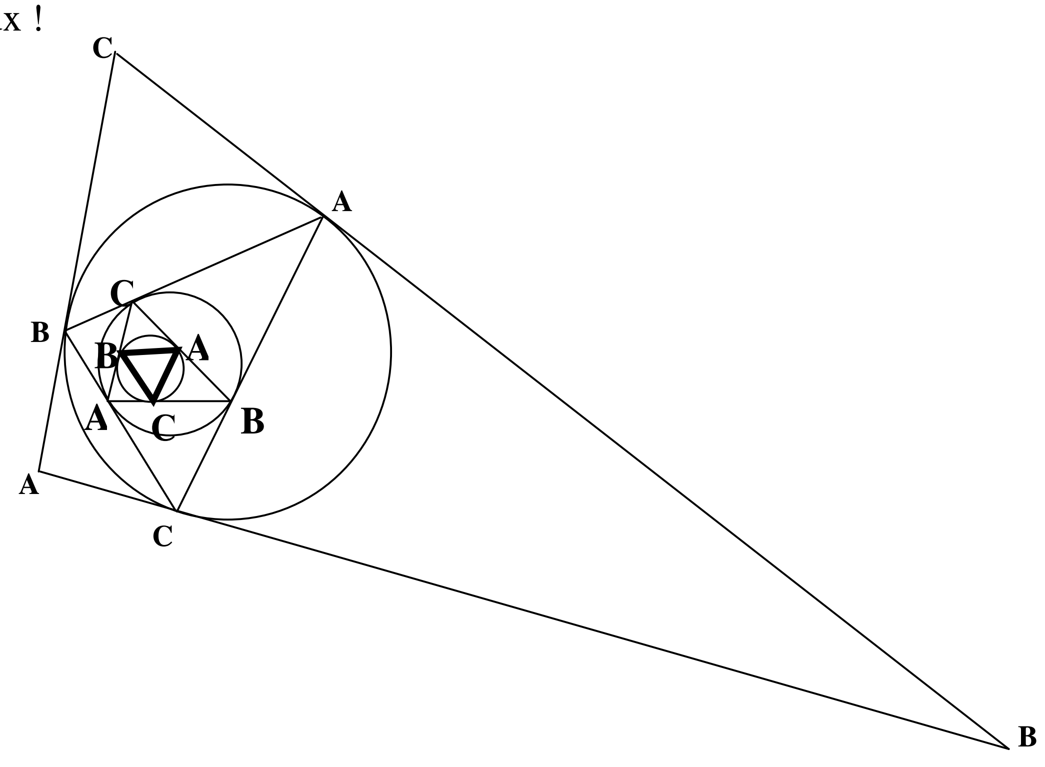
$$angle\ (C_3A_3B_3) = 45° + \frac{1}{4} angle\ (C_1A_1B_1)$$

$$= 45° + \frac{1}{4}\left(90° - \frac{1}{2} angle\ (CAB)\right) = 67{,}5° - \frac{1}{8} angle\ (CAB)$$

Soit $angle\ (C_3A_3B_3) = 67{,}5° - \frac{1}{8} angle\ (CAB)$.

Conclusion : l'angle $(C_3A_3B_3)$ a une mesure inférieure à 67,5°, et il en est de même des deux autres.

Remarque : si l'on continuait le procédé de construction, les petits triangles se rapprocheraient d'un triangle équilatéral (trois angles de 60°). Voilà un défi pour les courageux !



Exercice 1. On tourne (6^e et 5^e)

- **Lettre posée par Antoine :**

Il était sans doute utile de compter le nombre de cases extérieures lorsque le nombre de lignes et de colonnes est moins important pour bien comprendre le mode de calcul qui n'est pas, comme beaucoup d'équipes l'ont proposé, 366 $\times$ 4 (qui compte deux fois les cases « des coins »).

Le tour extérieur comporte : $365 \times 4 = \mathbf{1\,460}$ cases.

Toutes les six cases, RALLYE est écrit entièrement.

Comme $1\,460 = (243 \times 6) + \mathbf{2}$, Antoine pose donc la deuxième lettre du mot RALLYE qui est un **A**.

- **Lettre posée par Bertrand :**

o Il doit poser la 2 008^e lettre.

Comme $2\,008 = (334 \times 6) + \mathbf{4}$, Antoine pose donc la quatrième lettre du mot RALLYE qui est un **L**.

o Au bout du premier tour complet, on a posé 1 460 lettres. En continuant sur la deuxième ligne et jusqu'à l'avant dernière colonne, on peut encore en poser :

$$366 - 2 = 364.$$

Par suite, la deuxième lettre de la 365^e colonne est la :

$$1\,460 + 364 = 1\,824^e \text{ posée.}$$

Il faut donc encore en poser : $2\,008 - 1\,824 = 184$ dans la 365^e colonne.

La 2 008^e lettre est donc la **186^e lettre** de la **365^e colonne.**

Exercice 2. Dagobert et son T-shirt à l'envers (6^e et 5^e)

Attention ! Sur Dagobert, le T-shirt est doublement retourné : « la tête en bas » et « l'extérieur à l'intérieur ». L'expérience peut être facilement réalisée avec un papier et un miroir.

Voici donc ce que lit Dagobert dans le miroir :

Beaucoup d'équipes n'ont fait qu'une seule symétrie axiale avec ou non la symétrie centrale « tête en bas », oubliant ainsi soit le miroir, soit le « dedans-dehors ».

Exercice 3. Des diagonales bien embrochées (6^e et 5^e)

Le gros cube comportant $125 = 5 \times 5 \times 5$ petits « Apéricubes », chaque brochette transperce 5 étages à raison d'un cube par étage en suivant une diagonale du cube. Il fallait remarquer que le petit cube central est transpercé par les quatre brochettes (quatre diagonales).

Bilan : Les quatre brochettes traversent : $4 \times 5 = 20$ petits cubes, mais l'un d'eux est transpercé quatre fois, donc seuls : $20 - 4 + 1 = 17$ restent accrochés aux 4 brochettes solidarisées par le cube central !

Il restera : $125 - 17 = $ **108 Apéricubes** non transpercés.

Exercice 4. Les gourmands ! (6^e et 5^e)

Autour de la table, ils sont un de plus (Julien) que d'invités (par Julien). Chaque invité doit donc apporter **un** chocolat de plus que le nombre d'invités. Comme Julien a reçu 650 chocolats, on doit donc avoir : (nombre d'invités) $\times$ (nombre d'invités + **un**) = 650. Seul le produit $25 \times 26 = 650$ convient.

Julien a donc **25** amis dans sa classe.

Exercice 5. Le jour "D" (Tous)

D'après ce que voit le professeur NESDJOWOI, on sait déjà que :

- sur le dé de gauche, il y a 2, 6 **ou** 9, 7 et **8.**
- sur le dé de droite, il y a 3, 4 et **5.**

0 placé sur un seul cube ne permettrait pas, avec les **six** faces du deuxième cube, de présenter les **huit** caractères nécessaires pour écrire les **neuf** nombres : 01,02, ... ,09 (le 6 pouvant être renversé pour faire 9). Il y a donc 0 sur les deux cubes.

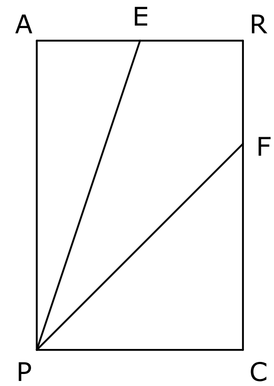
Pour pouvoir écrire 11 et 22, il faut que 1 et 2 soient sur les deux cubes.

Bilan : Sur le dé de gauche: 0, 1, 2, 6 ou 9, 7 et 8.

Sur le dé de droite : 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Exercice 6. Le laboureur et ses enfants (Tous)

- AR = PC = 70 m donc **AE** = 70 m **:** 2 = **35 m.**



Le double de l'aire de PAE vaut : 2 × 1 680 m² = 3 360 m² et permet de calculer : PA = 3 360 m² **:** 35 m = **96 m.**

Par suite, l'aire du terrain **PARC** mesure :

96 m × 70 m = 6 720 m².

Donc l'aire des parcelles de **chacun**, si le partage était équitable, mesurerait : 6 720 m² **:** 3 = **2 240 m².**

Comme Alfred n'a que 1 680 m², **le partage n'est donc pas équitable**.

Le calcul de CF $= \dfrac{2}{3} \times 96$ m $= 64$ m permet d'obtenir l'aire de **PCF :**

(64 m × 70 m) **:** 2 = 2 240 m², ce qui confirme que Cléopâtre a juste sa part. Il faut donc modifier les parcelles attribuées à Alfred et René pour qu'elles mesurent 2 240 m².

Pour Alfred, afin que (PA × AE) **:** 2 = 2 240 m², il faut que:

$$\text{AE} = \frac{4\,480 \text{ m}^2}{96 \text{ m}} = \frac{2 \times 70}{3} \text{ m} \approx 46{,}667 \text{ m}$$

Ce qui place le point E aux $\frac{2}{3}$ de [AR] à partir de A**.**

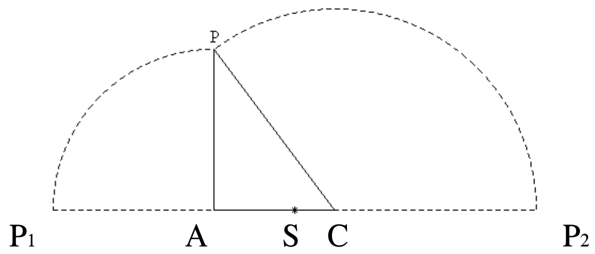
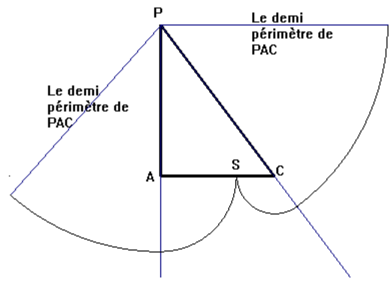
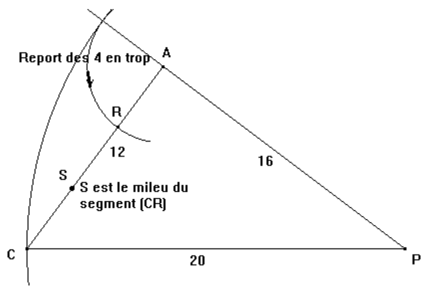
Une solution plus géométrique existait. PERF a manifestement une aire plus grande que celle de PER.
Or les triangles PAE et PER ont même base (AE = ER), même hauteur AP et donc même aire, **le partage n'est donc pas équitable.**
Traçons la diagonale [PR]. Comme FC est égal aux deux tiers de RC, l'aire de PCF est le tiers de l'aire de PARC (les deux tiers de celle de PRC). On placera de la même façon E aux deux tiers de [AR] en partant de A pour que l'aire de PAE soit le tiers de l'aire de PARC. Ainsi, l'aire de PERF sera aussi le tiers de celle de PARC.

Exercice 7. Le jardinier et la couturière (Tous)

Un dessin à l'échelle ou même à main levée est sans aucun doute le bien venu pour constater que : pour que les triangles CPS et APS, ayant le côté [PS] en commun, aient le même périmètre, il suffit que :

PC + CS = PA + AS = le demi-périmètre du triangle PAC.

Cette observation étant faite, de nombreuses constructions utilisant un fil sont possibles.

Une construction possible : Avec le fil, on reporte P en P_1 puis P en P_2. Le fil étant tendu entre P_1 et P_2, il suffit alors de le plier en deux en amenant P_1 sur P_2 (ou l'inverse) pour trouver le point S, milieu de $[P_1P_2]$.	
Une autre construction possible : (très voisine de la précédente). Avec le fil, on relève le périmètre de PAC. On plie le fil en deux et on reporte cette longueur à partir de P en contournant A ou en contournant C. L'extrémité nous donne la position de S.	
Une troisième construction possible : (qui n'a besoin que de 20 m de fil) Avec le fil, on relève la longueur PC. On reporte cette longueur à partir de P en contournant A.L'extrémité nous donne un certain point R. On relève, avec le fil, la longueur CR et, en pliant en deux, on a alors CS ou RS.	

Une quatrième construction est possible avec seulement 16 m de fil.

Périmètre commun aux deux triangles PAS et PCS :

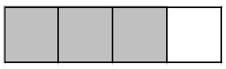
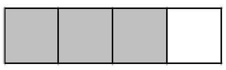
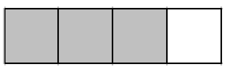
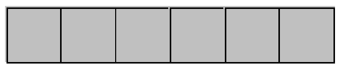
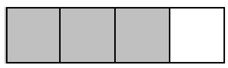
- Le périmètre de PAC étant de : $20 + 16 + 12 = 48$, le demi-périmètre est donc de 24 et par suite $PA + AS = PC + CS = 24$ ce qui donne $AS = 8$ et/ou $CS = 4$.
- Calcul de PS.
  - Dans le triangle PAC, $PC^2 = 20^2 = 400$ et
    $PA^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$.
    La réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que PAC est rectangle en A.
  - Le triangle PAS étant rectangle en A, l'utilisation du théorème de Pythagore conduit à :
  - $PS = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{320} =$ **17,88854...**
  - Le périmètre de chaque parcelle est de $(24 + \sqrt{320})$ m = **41,88854... m**

Exercice 8. Un gros cube, des petits cubes... (Tous)

Le plus simple ici est sans doute de procéder par essais et corrections successifs.
Un gros cube de 10 petits cubes de 1 cm d'arête en contient $10^3 = 1\,000$.
Un gros cube de 15 petits cubes de 1 cm d'arête en contient $15^3 = 3\,375$.
En affinant, on arrive à : $12^3 = 1\,728$ et $13^3 = 2\,197$.
Avec les 2 008 petits cubes, le plus gros cube réalisable a donc une arête de 12 cm et, bien sûr, rentre dans n'importe quelle chambre « normale » !
Restent : $2\,008 - 1\,728 = 280$ petits cubes à ranger, et en procédant comme ci-dessus, le plus gros cube réalisable a une arête de 6 cm puisque : $6^3 = 216$ et $7^3 = 343$.
Restent : $280 - 216 = 64$ petits cubes à ranger.
Or $64 = 4^3$. On peut donc terminer le rangement avec un troisième cube de 4 cm d'arête.
Les 2 008 petits cubes sont donc rangés en trois plus gros cubes de chacun 12^3, 6^3 et 4^3 petits.
Au passage, on remarquera que : $2\,008 = 12^3 + 6^3 + 4^3$.

Exercice 9. PARIS – SÈTE par TROYES. (4^e^ et 3^e^)

- *Plusieurs équipes répondent en faisant des dessins de rectangles coloriés ou hachurés, ce qui nous semble de saines solutions !*

Les passagers  dans les trois cars  au départ de PARIS 	Les 2/3 des passagers qui restent à TROYES  Le reste des passagers qui continuent vers SÈTE réunis dans un seul car 

Cela revient à prendre le quart de car comme unité…

- *D'autres, dans l'élan des nombreux calculs effectués en classe, se livrent à des calculs plus ou moins explicites et trouvent le bon résultat.* Voici une solution possible :

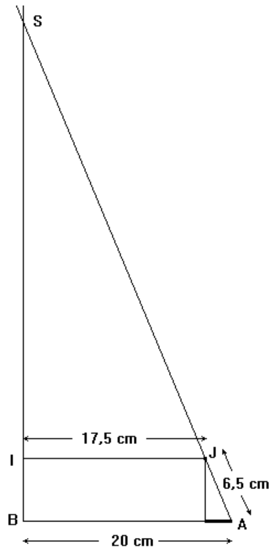
Si $\frac{2}{3}$ des passagers partis de PARIS descendent à TROYES, $\frac{1}{3}$ reste pour SÈTE

Très mathématiquement, part de TROYES le 1/3 de 3 fois les 3/4 d'un bus, soit :

$$\frac{3}{4}\text{ bus} \times 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}\text{ bus.}$$

Partant de TROYES, le car pour SÈTE sera donc rempli aux $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Exercice 10. Le Trapézien. (4^{e} et 3^{e})



- Le nombre d'étages.
  - *La technique la plus simple :*

Partant du bas, à chaque étage, on « perd » 2,5 cm (20 – 17,5) de rayon.

Le nombre d'étages est : 20 cm **:** 2,5 cm = 8

- *La tentation d'utiliser le théorème de Thalès (et sa conséquence) a été grande pour beaucoup de groupes qui ont proposé :*

$\frac{SI}{SB} = \frac{SJ}{SA} = \frac{IJ}{BA}$ conduit à :

$$\frac{SA - 6{,}5}{SA} = \frac{17{,}5}{20} \text{ soit } 20\ SA - 130 = 17{,}5\ SA$$

ou encore : 2,5 SA = 130 et par suite à : SA = 52 cm.

Sur [SA], tous les 6,5 cm, on a un étage, il y a donc 52 cm **:** 6,5 cm = 8 (étages).

- Le nombre de parts de gâteau, sachant qu'il y a 8 étages, est donc de :

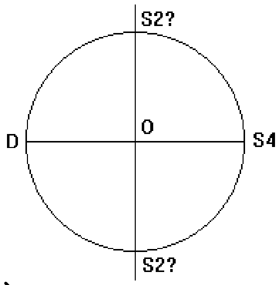
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = \mathbf{255.}$$

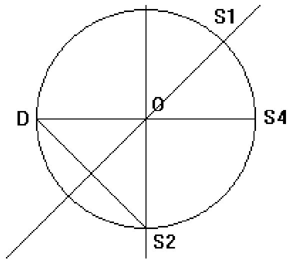
Exercice 11. Lapin sauteur. (4^{e} et 3^{e})

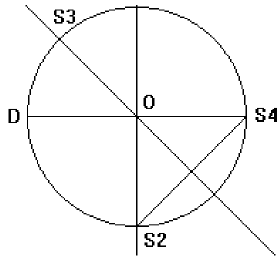
Un dessin à main levée est sans aucun doute le bien venu pour visualiser la situation. Il faut avoir bien lu que les sauts ont tous une même longueur supérieure à 5 m (le rayon du terrain).

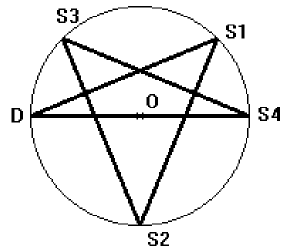
- **Le trajet ; solution géométrique.**

On appelle D le point de départ, S1, S2, S3, et S4 les points d'arrivée après chacun des sauts.



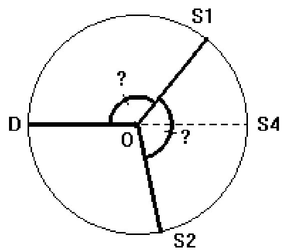






À la fin du deuxième saut, Jeannot Lapin est à égale distance (à vol d'oiseau) de son point de départ D et de son point d'arrivée S_4. Le chemin déjà fait est parfaitement semblable à celui qu'il lui reste à faire. Par conséquent, S_2 est sur la médiatrice de $[DS_4]$ et bien évidemment sur le cercle.
Deux positions sont possibles. On en choisit une ; elle imposera un sens de rotation autour de O.
Pour aller de D à S_2, il passe par S_1 qui est à mi-chemin. Donc S_1 est sur la médiatrice de $[DS_2]$ qui coupe le cercle en 2 points. L'un est trop près de D et de S_2 (à moins de 5 m); on choisit l'autre pour S_1.
Même raisonnement pour la place de S_3 situé sur le cercle à mi-chemin de S_2 et S_4.
<u>Remarque</u> : si Jeannot faisait encore 4 sauts, il reviendrait à son point de départ et aurait parcouru une étoile régulière à 8 branches ; ce qui invite à tracer précisément des angles au centre de 45°. Il suffit alors de choisir les sommets de 3 en 3.

- **<u>Le trajet ; solution par le calcul.</u>**



Jeannot Lapin reste toujours sur le bord de la pelouse. On peut chercher à déterminer la mesure de l'angle dont le sommet est le centre de la pelouse et dont les côtés passent par deux positions successives du lapin.
Jeannot fait plus d'un demi-tour puisqu'il fait 4 bonds et que les sauts sont supérieurs à 5 m, en effet 3 bonds de 5 m suffiraient pour conduire exactement de D en A (demi-hexagone régulier).

Si Jeannot fait un tour et demi, il tourne, en quatre sauts, de :

$$360° + 180° = 540° \text{ autour de O.}$$

$\widehat{DOS_1} = \widehat{S_1OS_2} = \widehat{S_2OS_3} = \widehat{S_3OS_4} = 540° : 4 = 135°$. On peut alors déterminer les mesures de $\widehat{S_1OS_4} = 1 \text{ plat} - \widehat{DOS_1} = 180° - 135° = 45°$,
de $\widehat{S_4OS_2} = \widehat{S_1OS_2} - \widehat{S_1OS_4} = 135° - 45° = 90°$ etc.
D'où la construction au rapporteur ou, mieux, à la règle et au compas.
<u>Remarque :</u> il ne peut pas faire deux tours et demi car il tournerait de $2\times360° + 180° = 900°$ autour de O.
On aurait : $\widehat{DOS_1} = \widehat{S_1OS_2} = \widehat{S_2OS_3} = \widehat{S_3OS_4} = 900° : 4 = \underline{225°}$. Ces angles ayant une mesure supérieure à 180°, cela revient à la solution précédente en tournant dans l'autre sens, et ainsi de suite.

- **Longueur de chaque saut.**
  - Par mesurage sur une figure précise à l'échelle 1/100, on trouve : un saut voisin de 9,2 m.
  - Par le calcul, on a : $\widehat{S_1OS_4} = 1$ plat – $\widehat{DOS_1} = 180° - 135° = \underline{\mathbf{45°}}$ puis $\widehat{S_1DS_4} = \dfrac{\widehat{S_1OS_4}}{2} = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$ (angle au centre, angle inscrit interceptant le même arc).

Le triangle DS_1S_4 dont un côté est diamètre de son cercle circonscrit, est donc rectangle en S_1.

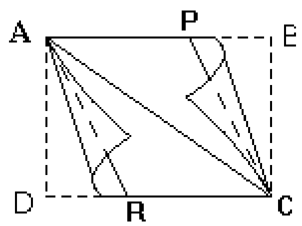
$DS_1 = DS_4 \times \cos \widehat{S_1DS_4} = 10 \text{ m} \times \cos 22{,}5° = 9{,}238\,795\,325\ldots \text{ m} \approx \mathbf{9{,}24 \text{ m}}$ à 1 cm près par excès.

La longueur des sauts mesure donc environ **<u>9,24 m</u>**.

<u>Exercice 12. Courage, plions. (4^e et 3^e)</u>

Beaucoup d'équipes ont réalisé par essais successifs la feuille attendue et effectué les mesures nécessaires. De la part de 4^e et 3^e, nous attendions une solution plus mathématique.

- Pour que APCR soit un losange, il faut que, **après pliage**, B et D soient confondus afin que les diagonales de APCR soient perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



On aura donc : $AC = AD + BC = 20$.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B, alors formé, on peut calculer la longueur de la feuille :

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = \mathbf{17{,}32050\ldots\ cm}$$

- Pour obtenir la mesure du côté du losange par le calcul.
  - Ou : ABC étant un triangle rectangle en B avec $AC = 20$ et $BC = 10$, on a : $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{10}{20}$ et donc $\widehat{ACB} = 60°$.

    P étant à égale distance des côtés [CA) et [CB) de l'angle $\widehat{ACB}$ est donc situé sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$, donc $\widehat{PCA} = \widehat{PCB} = 30°$.

    PBC étant un triangle rectangle en B, on a : $\cos \widehat{PCB} = \dfrac{BC}{PC}$ et donc :

$$PC = \frac{10 \text{ cm}}{\cos 30°} = \mathbf{11{,}54700\ldots\ cm}$$

  - Ou : Utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle PBC rectangle en B :

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 = (\sqrt{300} - PC)^2 + 10^2$$

qui donne : $PC^2 = 300 - 2 \times \sqrt{300} \times PC + PC^2 + 100$

et par suite : $PC = 200 : \sqrt{300} = \mathbf{11{,}54700\ldots\ cm}$

JEU - 58

Placer quelques pièces d'un euro à plat sur une table, sans chevauchement, mais de manière que chaque pièce en touche exactement trois autres.

PROBLÈME - 58

Démontrer que si un triangle a un périmètre de 41 cm et une aire de 72 cm^2 alors tous ses côtés mesurent moins de 17 cm.

Solutions :

JEU - 57.

Trouver dans la suite harmonique 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ ... 6 termes en progression arithmétique.

Solution :
Le PPMC de (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) est égal à 60.
6/60 ; 5/60 ; 4/60 ; 3/60 ; 2/60 et 1/60 est de toute évidence une suite arithmétique.
Donc en réduisant : $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{60}$ est une suite arithmétique de raison 1/60.

Emmanuel MOREAU envoie des compléments à ce jeu
Pour une suite de n termes, notons P_n la propriété :

$$\begin{cases} \text{Les } n \text{ termes sont en progression arithmétique.} \\ \text{Les } n \text{ termes sont des inverses d'entiers naturels.} \end{cases}$$

La suite $\left(\frac{1}{n!} ; \frac{2}{n!} ; .... ; \frac{n}{n!}\right)$ possède la propriété P_n, ainsi que la suite :

$$A_n = \left(\frac{1}{N} ; \frac{2}{N} ; .... ; \frac{n}{N}\right) \text{ où } N = ppcm(1 ; 2 ; .... ; n).$$

La suite $A_6 = \left(\frac{1}{60}\,;\frac{1}{30}\,;\frac{1}{20}\,;\frac{1}{15}\,;\frac{1}{12}\,;\frac{1}{10}\right)$ est donc l'une des solutions du jeu 57.

On peut se demander si, parmi les suites de *n* termes ayant la propriété cherchée, la suite A_n est celle dont les termes ont les dénominateurs les plus petits possibles.

La réponse est non, notamment lorsque

$$ppcm(1\,;2\,;....\,;n\,) = ppcm(1\,;2\,;....\,;n\,;n+1\,).$$

C'est le cas lorsque n = 5, n = 9 ou n = 11 par exemple.

Illustration :

La suite ayant la propriété P_5 dont les dénominateurs sont les plus petits possibles est $\left(\frac{1}{30}\,;\frac{1}{20}\,;\frac{1}{15}\,;\frac{1}{12}\,;\frac{1}{10}\right)$, alors que $A_5 = \left(\frac{1}{60}\,;\frac{1}{30}\,;\frac{1}{20}\,;\frac{1}{15}\,;\frac{1}{12}\right)$.

Remarque : il n'est pas très facile de trouver une suite

$$\begin{cases} \text{Ayant la propriété } P_n \\ \text{Qui n'est pas obtenue en multipliant les termes de } A_n\,, \\ \text{Qui n'est pas extraite d'une suite } A_m \text{ avec } m > n \end{cases}$$

mais il en existe tout de même. La suite $\left(\frac{1}{315}\,;\frac{1}{105}\,;\frac{1}{63}\,;\frac{1}{45}\,;\frac{1}{35}\right)$ est l'une de ces suites ayant la propriété P_5.

PROBLÈME - 57.

Démontrer que si une fraction p/q vérifie :

$$\frac{p}{q} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-...-\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}$$

alors p est un multiple de 3011.

Solution :

Soit $S = p\,/\,q$ la somme alternée donnée, et :

$$T = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+...+\frac{1}{3010}$$

En groupant les termes extrêmes, cette somme s'écrit encore :

$$T = \left(1+\frac{1}{3010}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3009}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3008}\right)+...+\left(\frac{1}{1505}+\frac{1}{1506}\right)$$

Dans chaque parenthèse, le numérateur vaut 3011, et comme 3011 est un nombre premier, le PPMC de (1, 2, 3,…3010) est premier avec 3011.

Donc on peut écrire $T = 3011 \times \frac{a}{b}$ avec *b* premier avec 3011.

On a

$$T - S = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3}+ \frac{1}{4} + \frac{1}{5}+ ...+ \frac{1}{1003} + \left(\frac{1}{2008}+ \frac{1}{2009}+...+\frac{1}{3009}+\frac{1}{3010}\right)$$

En groupant les termes extrêmes, cette somme s'écrit encore :

$$T - S = \left(1+\frac{1}{3010}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3009}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3008}\right)+ ...+ \left(\frac{1}{1003} + \frac{1}{2008}\right)$$

Dans chaque parenthèse, le numérateur vaut 3011, donc comme dans la somme précédente, on peut écrire $T - S = 3011 \times \frac{c}{d}$ avec d premier avec 3011.

On en déduit $S = T - (T - S) = 3011 \times\frac{a}{b} - 3011 \times\frac{c}{d} = 3011 \times \frac{ad-bc}{bd} = \frac{p}{q}$

ou encore $3011 \times (ad - bc)\, q = p\, bd$.
Mais 3011 divise $p\, bd$ et est premier avec bd.

On en déduit bien **3011 divise *p***.

<u>Remarque</u> :
On démontre plus généralement, de la même manière, que si p est un nombre premier, alors
toute fraction égale à

$$1-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}-... \pm \frac{1}{partie\ \ entière\ \ (2p/3)}$$

a un numérateur multiple de p.

Il se trouve que 3011 est premier, et que la partie entière de $2 \times 3011/3$ vaut 2007.

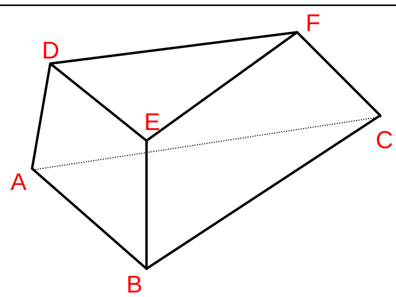
Douce France, le monde entier nous l'envie : suite et fin !

Michel Bridenne, lycée G. Eiffel et Irem de Dijon
michel.bridenne@wanadoo.fr

La première partie de cet article proposait un regard particulier sur des évaluations usuelles que sont des épreuves de mathématiques de baccalauréats, pour en signaler un certain flou, un écart évident entre des attentes supposées et la réalité de ce que d'aucun produit (évalué ou évaluateur), la deuxième esquissait une problématique de référence pour élaborer des textes d'évaluation « ordinaires ».
Cette troisième partie exemplifie au niveau d'une classe de seconde.

Autres exemples

Exemple 4

Après avoir examiné le dessin ci-contre avec la légende qui l'accompagne, expliquer pourquoi ce dessin n'est pas en accord avec la légende. * partie d'une pyramide à base triangulaire coupée par un plan.	 représentation, en perspective cavalière, d'un tronc de tétraèdre*.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 4)

On se place dans une perspective cavalière adaptée. On appelle abcs le tétraèdre, où s est le sommet. S'il est coupé par un plan (def), avec d sur (as), e sur (bs) et f sur (cs) alors, suivant les règles énoncées ci-contre, les droites (ad), (be) et (cf) ayant le point s en commun, devraient être représentées par des droites (AD), (BE) et (CF) ayant un point en commun. Ce qui n'est pas le cas.	R1 : La perspective d'une droite est une droite. R2 : Des droites concourantes dans l'espace restent concourantes dans toute perspective cavalière.

Exemple 5

On appelle E l'ensemble de tous les nombres solutions du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} -7x+3>1 \\ 3x+11 \geq -\dfrac{2}{5} \end{cases}$.

1) Démontrer que le système donné est équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x>a & (1) \\ x \geq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x>a & (1) \\ x \leq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<a & (1) \\ x \geq b & (2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x<a & (1) \\ x \leq b & (2) \end{cases}$ (où a et b sont des nombres connus), permettant de dessiner l'ensemble E et de l'écrire à l'aide des notations d'intervalles. Les nombres a et b devront être écrits sous la forme de quotients de nombres entiers.
2) Suivant le résultat obtenu et sur la droite orientée proposée sur la feuille réponse, dessiner en rouge l'ensemble des solutions de (1), et en bleu l'ensemble des solutions de (2), puis en vert l'ensemble E.

2) $\longrightarrow$

3) Ecrire E, avec les notations d'intervalles, sous deux formes différentes.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 5)

1) $\begin{cases} -7x+3>1 \\ 3x+11 \geq -\dfrac{2}{5} \end{cases}$ ⇅ théorèmes ci-contre) $\begin{cases} x<\dfrac{2}{7} \\ x \geq \dfrac{-57}{15} \end{cases}$ (ou $\begin{cases} x<\dfrac{2}{7} \\ x \geq \dfrac{-19}{5} \end{cases}$.)	Avec les conventions d'usage, on peut par exemple citer Th.1 : a > b ⇆ a + c > b + c Th.2 : (avec b et c non nuls) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$ Th.3 : (avec b non nul) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ Th.4 : (avec c < 0) a > b ⇆ ac < bc Th.5 : (avec c > 0) a ≥ b ⇆ ac ≥ bc Th.6 : (avec b et d non nuls) $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
2) ---[(2/7) $\longrightarrow$ (-57/15)[-- (-57/15)[----------------------------------[(2/7)	
3) E = $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{7}\right[\cap \left[\dfrac{-57}{15}\,;+\infty\right[$; E = $\left[\dfrac{-57}{15}\,;\dfrac{2}{7}\right[$	

Exemple 6

On connaît une fonction f par son tableau de variations, donné ci-dessous :

Valeurs et variations de la variable libre t	- 15		- 12		7		10
Valeurs et variations de f(t)	5	↗	14	↘	- 3	↗	15

On sait par ailleurs que les croissances ou décroissances de f sont strictes et que la représentation graphique de f est d'un seul tenant (sans trou), Remplis le tableau ci-dessous

1) Quel est la plus grande valeur de f(t) ? ➔		**1)** Quel est la plus petite valeur de f(x) ? ➔	
3) Compléter à l'aide de < ou de > ➔		f(2,3) ….. f(2,4)	
Justifier la réponse. ↓			
4) Combien y a t-il de nombres a dans [- 15 ; 10] et tels que f(a) = 4. ➔			

Les éléments de corrigé (de l'exemple 6)

1) Quel est la plus grande valeur de f(t) ? ➔	**15**	**2)** Quel est la plus petite valeur de f(t) ? ➔	**-3**

2) Compléter à l'aide de < ou de > ➔	f(2,3) **>** f(2,4)
Justifier la réponse. ↓	
2,3 et 2,4 sont dans l'intervalle [-12 ; 7], et 2,3 < 2,4 et f est strictement décroissante sur [-12 ; 7].	
4) Combien y a - t -il de nombres a dans [- 15 ; 10] et tels que f(a) = 4. ➔	2

Exemple 7

Soit f la fonction affine dont la représentation graphique a $-\frac{2}{3}$ pour coefficient directeur et 5 comme ordonnée à l'origine, g la fonction définie sur **R** et telle que g(t) = t – 3, et c est la fonction « élévation au carré ».

On construit la fonction h par la chaîne ci-dessous :

sur [-10 ; 7], $\_\_\_ \xrightarrow{g(\ )} \_\_\_ \xrightarrow{c(\ )} \_\_\_ \xrightarrow{f(\ )} \_\_\_$

1) Compléter le schéma ➔	$x \xrightarrow{g(\ )} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{c(\ )} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{f(\ )} \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) A l'aide de tableaux de valeurs, de représentations graphiques, et d'un peu d'expérience, on conjecture que h est strictement croissante sur [-10 ; 3] et strictement décroissante sur [3 ; 7].

a) Pour confirmer les sens de variations de la fonction h sur [-10 ; 3], on propose la méthode ci-dessous. Il s'agit de citer les théorèmes, propriétés employés. On admet que la conjecture est exacte sur [3 ; 7].

Preuve que h est strictement croissante sur [-10 ; 3]	Propriétés, théorèmes … utilisés dans
Soit $a \in [-10\ ;\ 3]$, $b \in [-10\ ;\ 3]$ et $a < b$	
alors (1)	(1)
$g(a) < g(b) \leq 0$	
donc (2)	(2)
$(a-3)^2 > (b-3)^2$	
donc (3)	(3)
$h(a) < h(b)$.	
c.q.f.d.	

b) Compléter le tableau suivant (pas de valeur approchée ; les résultats seront écrits sous forme de quotients d'entiers irréductibles).	valeurs et variations de x	-10 … 7
	valeurs et variations de h(x)	… ↗ … ↘ …

3) Pour représenter la fonction h sur l'écran graphique de la calculatrice, en cohérence avec le tableau de variations (« pour tout voir »), comment organiser sa « fenêtre » (window) ? ➔	

Les éléments de corrigé (de l'exemple 7)

1) Compléter le schéma ➔	$x \xrightarrow{g(\ )} x-3 \xrightarrow{c(\ )} (x-3)^2 \xrightarrow{f(\ )} -\frac{2}{3}(x-3)^2+5$

2) A l'aide de tableaux de valeurs, de représentations graphiques, et d'un peu d'expérience, on conjecture que h est strictement croissante sur [-10 ; 3] et strictement décroissante sur [3 ; 7].

a) Pour confirmer les sens de variations de la fonction h sur [-10 ; 3], on propose la méthode ci-dessous. Il s'agit de citer les théorèmes, propriétés employés. On admet que la conjecture est exacte sur [3 ; 7].

Preuve que h est strictement croissante sur [-10 ; 3]	Propriétés, théorèmes … utilisés dans
Soit $a \in [-10 ; 3]$, $b \in [-10 ; 3]$ et $a < b$ alors (1) $g(a) < g(b) \leq 0$	(1) **toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement positif, est strictement croissante sur J** et calcul de g(3)
donc (2) $(a - 3)^2 > (b - 3)^2$	(2) **la fonction « carrée » est strictement décroissante sur]-∞ ; 0]**
donc (3) $h(a) < h(b)$. c.q.f.d.	(3) **toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement négatif, est strictement décroissante sur J** **et substitution** (déf. de h)

b) Compléter le tableau suivant (pas de valeur approchée ; les résultats seront écrits sous forme de quotients d'entiers irréductibles).	valeurs et variations de x	-10 **3** 7
	valeurs et variations de h(x)	$\frac{-323}{3}$ ↗ 5 ↘ $\frac{-17}{3}$

3) Pour représenter la fonction h sur l'écran graphique de la calculatrice, en cohérence avec le tableau de variations (« pour tout voir »), comment organiser sa « fenêtre » (window) ? ➔	Par exemple : $x_{min} = -10$ $x_{max} = 7$ pas : 1 $y_{min} = -110$ $y_{max} = 10$ pas : 10

Exemple 8

Ici J = [0 ; 100]. Une fonction g est telle que, pour x dans J, $g(x) = \frac{x}{2x+3}$ (écriture n°1).

1) Prouver, par le calcul algébrique, que, pour x dans J, on peut aussi écrire $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x+3)}$ (écriture n°2). <u>Remarque :</u> *les théorèmes essentiels doivent être cités.*
2) Mettre chaque écriture de f sous la forme d'une chaîne de fonctions. Chaque maillon de la chaîne doit être l'un des maillons suivants :

3) $\sqcup \xrightarrow{a(\ )+b} \sqcup$ (dans ce cas, a et b doivent être précisés), $\sqcup \xrightarrow{(\ )^2} \sqcup$,

$\sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup$, $\sqcup \xrightarrow{\sqrt{(\ )}} \sqcup$, $\left.\begin{matrix}\sqcup\\ \\ \sqcup\end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} \sqcup$, $\left.\begin{matrix}\sqcup\\ \\ \sqcup\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times} \sqcup$ (ces deux derniers cas interviennent dans les chaînes à deux rangs). <u>*Remarque :*</u> *aucune « preuve » n'est demandée, mais il n'est pas inutile de contrôler ce que l'on fait … sur un brouillon.*

4) On choisit a et b dans J tels que a $>$ b. Lequel de g(a) et de g(b) est le plus grand ? Prouver l'affirmation.

Les éléments de corrigé (de l'exemple 8)

<table>
<tr><td>1) Pour x dans J, $\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = \frac{(2x+3)-3}{2(2x+3)}$
(th.1 et th.2)
donc (développement et th.1)
$\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = \frac{x}{2x+3}$
d'où (écriture n°1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2(2x+3)} = g(x)$.</td><td>Th.1 : pour tous b et c non nuls, $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$
Th.2 : pour tout b non nul, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Ecriture n°1
Sur J, $\sqcup \left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\qquad\qquad(\ )\qquad\qquad} \sqcup \\ \\ \xrightarrow{2(\ )+3} \sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} \sqcup$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ecriture n°2
Sur J, $\sqcup \xrightarrow{2(\ )+3} \sqcup \xrightarrow{\frac{1}{(\ )}} \sqcup \xrightarrow{-\frac{3}{2}(\ )+\frac{1}{2}} \sqcup$</td></tr>
</table>

3) On choisit a et b dans J tels que a $>$ b. Lequel de g(a) et de g(b) est le plus grand ? Prouver l'affirmation.

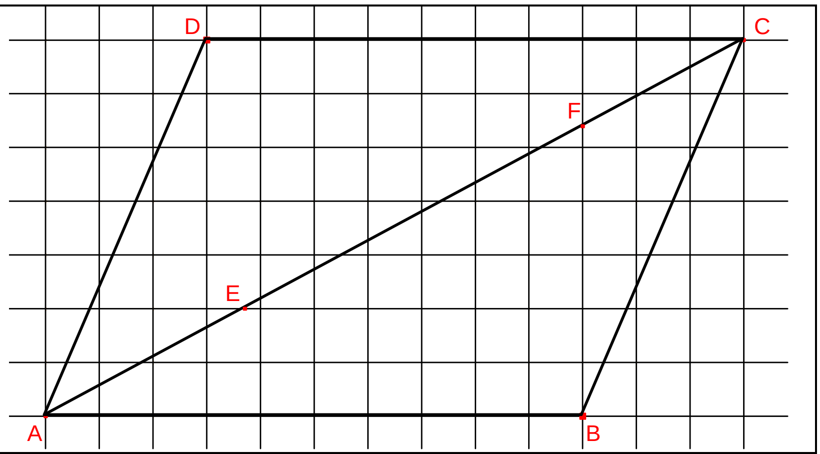
Soit a et b dans J tels que a $>$ b, alors (déf.) a $>$ b $>$ 0 donc (th.1) 2a + 3 $>$ 2b + 3 $>$ 3 d'où (th.2) $\frac{1}{2a+3} < \frac{1}{2b+3}$ d'où (th.3)	Déf. : traduction de l'appartenance à un intervalle Th.1 : toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est strictement positif, est strictement croissante sur J Th.2 : la fonction « inverse » est strictement décroissante sur]0 ; $+\infty$[. Th.3 : toute fonction affine sur J dont le « coefficient directeur » est

$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2a+3}\right)+\frac{1}{2} > -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2b+3}\right)+\frac{1}{2}$ soit, par définition de g, $g(a) > g(b)$.	strictement négatif, est strictement décroissante sur J.

Exemple 9

Le quadrillage ci-dessous est un quadrillage carré : toutes ses ressources sont utilisables. L'unité de longueur est le côté des carrés de ce quadrillage. Sur le dessin ci-dessous, ABCD représente un parallélogramme. Les points A, B, C et D sont aux intersections de droites du quadrillage. Les points E et F sont à l'intersection de la droite (AC) et des droites du quadrillage.

1. Compléter les égalités ci-contre :	$\overrightarrow{AE} = \quad .\overrightarrow{CF}$	$\overrightarrow{CF} = \quad .\overrightarrow{AC}$
2. Compléter les égalités ci-contre :	$\overrightarrow{EF} = \quad .\overrightarrow{AC}$	(valeur exacte dans l'unité donnée) EF =
ou 2'. Quelle est la valeur exacte de EF, dans l'unité donnée ? (aucune justification ne doit être fournie).		

3. Construire, sur ce dessin, les points J et K définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{DB} = 7.\overrightarrow{DJ}$ et $6.\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DK}$. **Les traits de construction doivent permettre de lever toute ambiguïté sur la position des points J et K.**	

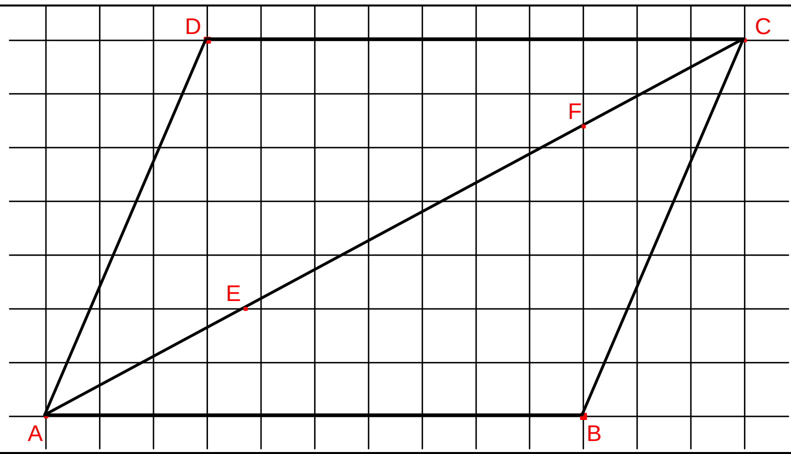
4. Soit l'affirmation suivante : **les droites (AJ) et (CK) sont parallèles**. Pour résoudre cette conjecture, on veut utiliser une méthode vectorielle pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires ou non, puis conclure.		
4.1 Décomposer chacun des vecteurs ci-contre sous la forme $a.\overrightarrow{DA} + b.\overrightarrow{DC}$, où a et b sont des nombres.	$\overrightarrow{AJ} =$	$\overrightarrow{CK} =$
4.2 Prouver que les résultats obtenus en 4.1 sont exacts. (Utiliser le verso de cette feuille en cas de besoin.)		

<table>
<tr><td colspan="2">4.3 Résolution de la conjecture (du problème), démonstration. (Utiliser le verso de cette feuille en cas de besoin.)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5. La droite (AJ) coupe la droite (DC) en X, et coupe la droite (BC) en Y.
Parmi les réponses présentées, quelle est celle correspondant à la valeur exacte de DX, dans l'unité donnée ?
Entourer la réponse choisie, et compléter éventuellement (aucune justification ne doit être fournie).</td><td>a. $\frac{10}{7}$ b. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$
c. 1,7 d. $\frac{7}{4}$
e. autre, à préciser ici
⇨</td></tr>
<tr><td>6. Ecrire une relation de colinéarité liant les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{YC}$ (aucune justification ne doit être fournie).</td><td></td></tr>
</table>

Les éléments de corrigé (de l'exemple 9)

Le quadrillage ci-dessous est un quadrillage carré : toutes ses ressources sont utilisables. L'unité de longueur est le côté des carrés de ce quadrillage. ABCD représente un parallélogramme, A, B, C et D sont aux intersections de droites du quadrillage, E et F sont à l'intersection de la droite (AC) et des droites du quadrillage.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Compléter les égalités suivantes :</td><td>$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{AC}$</td><td>$\overrightarrow{CF} = -\frac{3}{13}.\overrightarrow{AC}$</td></tr>
<tr><td>2. Compléter les égalités ci-contre :</td><td>$\overrightarrow{EF} = \frac{44}{91}.\overrightarrow{AC}$</td><td colspan="2">(valeur exacte dans l'unité donnée)
$EF = \frac{44\sqrt{218}}{91}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Quelle est la valeur exacte de EF, dans l'unité donnée ?
(aucune justification ne doit être fournie).</td><td>$\frac{44\sqrt{218}}{91}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Construire, sur ce dessin, les points J et K définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{DB} = 7.\overrightarrow{DJ}$ et $6.\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DK}$.</td></tr>
</table>



4. On s'intéresse à l'affirmation suivante : **<u>les droites (AJ) et (CK) sont parallèles</u>**. Pour résoudre cette conjecture, on propose d'utiliser une méthode vectorielle pour prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires ou non, puis de conclure.

4.1 Décomposition de chacun de ces vecteurs sous la forme a. $\overrightarrow{DA}$ + b. $\overrightarrow{DC}$, où a et b sont des nombres.	$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{CK} = \frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$

4.2 Preuve que les résultats obtenus en 4.1 sont exacts.

Par exemple : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ (th.1)

donc (th.2, th.3) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DB}$

donc (th.2, th.1)

$$\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)$$

donc (th.4, th.5)

$$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$$

Th.1 : relation de Chasles

Th.2 : pour tous A et B, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Th.3 : substitution

Th. 4 : pour tout réel α, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

Th. 4 : pour tous réels α et β, pour tout vecteur $\vec{u}$, $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

Et, par analogie : $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CD} + 6.\overrightarrow{DJ}$

donc $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{DC} + 6.\left(\frac{1}{7}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)\right)$

donc $\overrightarrow{CK} = \frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$

4.3 Résolution de la conjecture (du problème), démonstration.

Par exemple, les résultats de 4.2 permettent d'écrire :

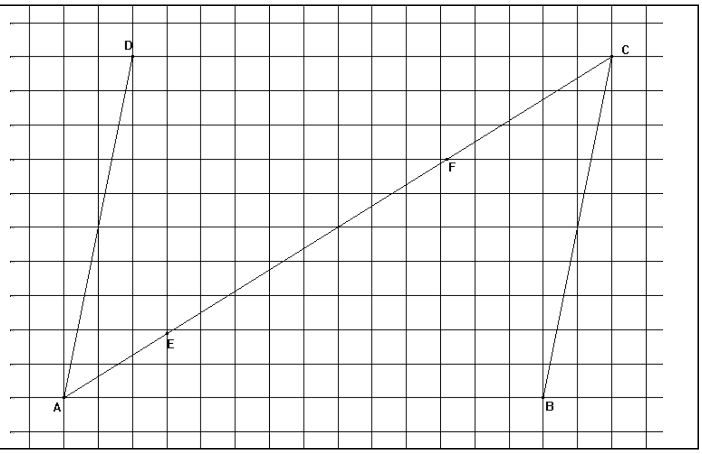
$$\overrightarrow{AJ} = -\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} + \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}$$

donc (th.4, th.6) $\overrightarrow{AJ} = -\left(\frac{6}{7}.\overrightarrow{DA} - \frac{1}{7}.\overrightarrow{DC}\right)$

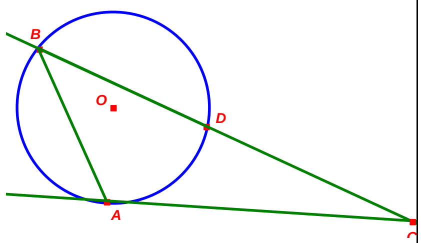
th. 6 : pour tout vecteur $\vec{u}$, $-1.\vec{u} = -\vec{u}$

donc (th.3) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{CK}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont opposés donc (déf.) colinéaires. De plus, A et J étant distincts, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas nuls donc (th. 7) les droites (AJ) et (CK) sont parallèles.	Déf. : vecteurs colinéaires Th.7 : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

5. La droite (AJ) coupe la droite (DC) en X, et coupe la droite (BC) en Y. Parmi les réponses présentées, quelle est celle correspondant à la valeur exacte de DX, dans l'unité donnée ? Entourer la réponse choisie, et compléter éventuellement (aucune justification ne doit être fournie).	a. $\frac{10}{7}$ b. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ c. 1,7 d. $\frac{7}{4}$ e. autre, à préciser ici ⇨ $\frac{5}{3}$
6. Ecrire une relation de colinéarité liant les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{YC}$ (aucune justification ne doit être fournie).	$\overrightarrow{YC} = 5.\ \overrightarrow{CB}$

L'exemple 9 peut être repris avec le dessin ci-contre.	

Exemple 10

Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} > 90°$. Le cercle Γ, de centre O, passe par A et B, ne passe pas par C et il est tangent en A à la droite (AC). On admet que dans ce cas, la droite (BC) recoupe le cercle Γ en D et D est sur [BC]. Le but de cet exercice est de démontrer que $$AC^2 = CD \times CB.$$ Dans la suite on appelle K le milieu du segment [AD].	

1) Pour démontrer que $AC^2 = CD \times CB$, il suffit de prouver que deux triangles sont semblables. Lesquels ? ➔

2) Pour les deux triangles trouvés, compléter le tableau suivant, où les points homologues seront écrits l'un en dessous de l'autre.

Points du premier triangle			
Points du second triangle			

3) Avec les seuls points nommés, écrire le nom d'un angle complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$. ➔

4) Justifier la réponse au 3).

5) Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOK}$ ont même mesure. Citer (en les numérotant dans leur ordre d'utilisation) les théorèmes ou propriétés permettant de prouver cette affirmation.

6) Au dos de cette feuille, en utilisant les données précédentes (de l'énoncé ou prouvées) et les résultats de cours, prouver alors que $AC^2 = CD \times CB$.

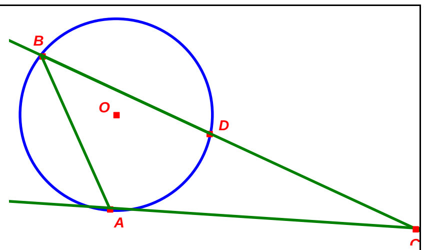
Les éléments de corrigé (de l'exemple 10)

Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} > 90°$. Le cercle Γ, de centre O, passe par A et B, ne passe pas par C et il est tangent en A à la droite (AC). On admet que dans ce cas, la droite (BC) recoupe le cercle Γ en D et D est sur [BC].

Le but de cet exercice est de démontrer que

$$AC^2 = CD \times CB.$$

Dans la suite on appelle K le milieu du segment [AD].



1) Pour démontrer que $AC^2 = CD \times CB$, il suffit de prouver que deux triangles sont semblables. Lesquels ? ➔	Par exemple ABC, ADC

2) Pour les deux triangles trouvés, compléter le tableau suivant, où les points homologues seront écrits l'un en dessous de l'autre.

Points du premier triangle	A	B	C
Points du second triangle	D	A	C

3) Avec les seuls points nommés, écrire le nom d'un angle complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$. ➔	Par exemple $\widehat{OAK}$ ou $\widehat{OAD}$

4) Justifier la réponse au 3).

(CA) étant tangente à Γ en A (hypothèse) alors (th.1) (OA)⊥(CA), et par suite (« évident ») $\widehat{OAD} + \widehat{DAC} = 90°$. K étant le milieu de [AD] (hypothèse) et AOD étant un triangle isocèle (évident), alors (KA)⊥(AD), et par suite $\widehat{AOK} + \widehat{OAK} = 90°$. Or $\widehat{OAK} = \widehat{OAD}$ (th.2) et $\widehat{DAC} = \widehat{CAD}$. On en déduit : $\widehat{OAK} + \widehat{CAD} = 90°$. et $\widehat{AOK} + \widehat{OAK} = 90°$, donc (déf.) $\widehat{OAK}$ est complémentaire à la fois à $\widehat{CAD}$ et à $\widehat{AOK}$.	Th.1 : Si d est une droite tangente en A à un cercle de centre O, alors (OA)⊥d. Th.2 : Si A, B et C sont non alignés et si D est sur [AC], alors $\widehat{BAD} = \widehat{BAC}$. Déf. : deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures en degré est égale à 90°.

5) Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOK}$ ont même mesure. Citer (en les numérotant dans leur ordre d'utilisation) les théorèmes ou propriétés permettant de prouver cette affirmation.

Th.2
Th.3 : Dans tout triangle isocèle, la hauteur relative à la base est aussi bissectrice de l'angle au sommet.
Th.4 : La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

6) En utilisant les données précédentes (de l'énoncé ou prouvées) et les résultats de cours, prouver alors que $AC^2 = CD \times CB$.

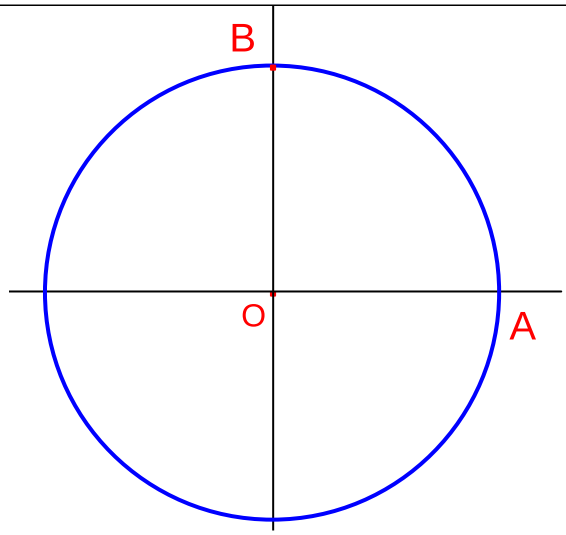
Par exemple. De 4) et 5), on déduit que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAD}$ ont même complément $\widehat{OAK}$, donc (th.5) ils ont même mesure. Les triangles ABC et CAD ont un angle commun en C, et $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$, donc (th.6) les triangles ABC et CAD sont semblables. Par suite (th.7), à l'aide de 2), on obtient $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, soit (th.8) $AC^2 = CD \times CB$.	Th.5 : deux angles ayant même complément ont même mesure. Th.6 : Deux triangles ayant deux angles deux à deux de mêmes mesures sont semblables. Th.7 : Si deux triangles sont semblables, alors les rapports des côtés homologues sont égaux. Th.8 : th. dit du produit en croix.

Exemple 11

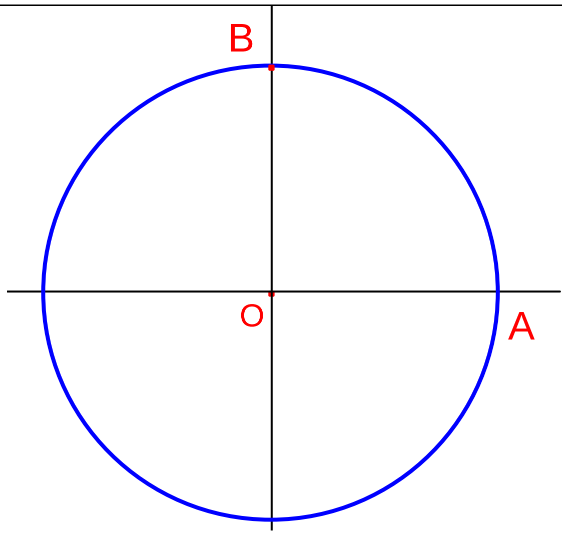
Question 1

Les nombres suivants sont représentés par des points notés U, V, etc. sur le cercle trigonométrique. Regrouper les nombres représentés par le même point : $\frac{-533\pi}{8}$; $\frac{32905}{8}\pi$; $\frac{25707\pi}{8}$; $\frac{27\pi}{8}$; $-\frac{4313\pi}{8}$

Question 2 Le point C est le symétrique de A par rapport à O. On sait qu'un point R est situé sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités non comprises) ne contenant pas A et qu'il représente un nombre α négatif compris -4π et -2π.

<table>
<tr><td colspan="2">a) Placer un point R sur le cercle trigonométrique respectant les contraintes.</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Dans ce cas, dessiner le point P représentant le nombre $\pi - \alpha$, en laissant apparents les traits de construction et en portant les codages utiles à une bonne compréhension de la construction.</td></tr>
<tr><td>c) Ecrire le plus petit encadrement de α respectant l'énoncé.</td><td></td></tr>
<tr><td>d) Ecrire le plus petit encadrement de $\pi - \alpha$, respectant l'énoncé.</td><td></td></tr>
</table>

Question 3 Le point S est associé au nombre $\frac{11}{4}\pi$ et le point T est associé au nombre $-\frac{5\pi}{12}$. On s'intéresse à l'ensemble E de tous les nombres compris entre 0 et 2π et représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A.

<table>
<tr><td colspan="2">1) Dessiner E sur le cercle trigonométrique.</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2) Ecrire trois nombres représentés sur l’arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A, mais ne se trouvant pas dans E.</td><td></td></tr>
<tr><td>3) Ecrire l’ensemble E sous la forme d’un intervalle.</td><td></td></tr>
</table>

Question 4 Quelles sont les valeurs exactes de :

<table>
<tr><td>$\sin \frac{28072\pi}{3}$</td><td>$\cos \frac{-3199\pi}{6}$</td><td>Citer les résultats du cours utilisés pour trouver les réponses.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Question 5

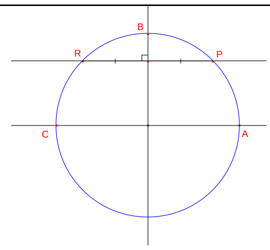
Ecrire toutes les solutions de l’équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	

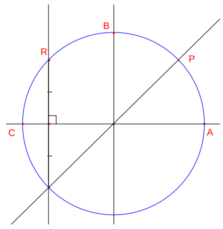
Les éléments de corrigé (de l’exemple 11)

Question 1

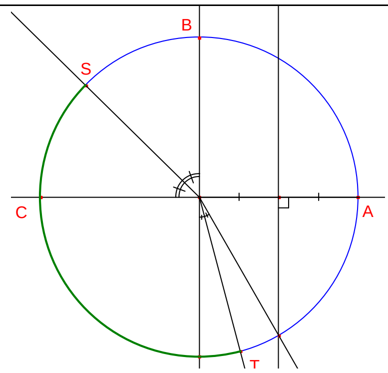
Les nombres suivants sont représentés par des points notés U, V, etc. sur le cercle trigonométrique. Regrouper les nombres représentés par le même point : $\frac{-533\pi}{8}$; $\frac{32905}{8}\pi$; $\frac{25707\pi}{8}$; $\frac{27\pi}{8}$; $-\frac{4313\pi}{8}$
$\frac{-533\pi}{8}$, $\frac{25707\pi}{8}$ et $\frac{27\pi}{8}$ sont représentés par un point U ; $\frac{32905}{8}\pi$ est représenté par V et V ≠ U ; $-\frac{4313\pi}{8}$ est représenté par un point W et W ≠ U et W ≠ V.

Question 2 Le point C est le symétrique de A par rapport à O. On sait qu'un point R est situé sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ (extrémités non comprises) ne contenant pas A et qu'il représente un nombre α négatif compris -4π et -2π.

<table>
<tr><td colspan="2">a) Placer un point R sur le cercle trigonométrique respectant les contraintes.</td><td rowspan="4">

ou

</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Dans ce cas, dessiner le point P représentant le nombre $\pi - \alpha$, en laissant apparents les traits de construction et en portant les codages utiles à une bonne compréhension de la construction.</td></tr>
<tr><td>c) Ecrire le plus petit encadrement de α respectant l'énoncé.</td><td>$-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -3\pi$</td></tr>
<tr><td>d) Ecrire le plus petit encadrement de $\pi - \alpha$, respectant l'énoncé.</td><td>$\frac{9\pi}{2} > \pi - \alpha > 4\pi$</td></tr>
</table>

Question 3 Le point S est associé au nombre $\frac{11}{4}\pi$ et le point T est associé au nombre $-\frac{5\pi}{12}$. On s'intéresse à l'ensemble E de tous les nombres compris entre 0 et 2π et représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A.

<table>
<tr><td colspan="2">1) Dessiner E sur le cercle trigonométrique.
En vert, extrémités comprises</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>2) Ecrire trois nombres représentés sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{ST}$ (extrémités comprises) ne contenant pas le point A, mais ne se trouvant pas dans E.</td><td>Par exemple : -5π ;
$-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5}{6}\pi + 2\pi$</td></tr>
<tr><td>3) Ecrire l'ensemble E sous la forme d'un intervalle.</td><td>$E = \left[\frac{3\pi}{4};\frac{19\pi}{12}\right]$</td></tr>
</table>

Question 4 Quelles sont les valeurs exactes de :

$\sin \frac{28072\pi}{3}$	$\cos \frac{-3199\pi}{6}$	Citer les résultats du cours utilisés pour trouver les réponses.
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	Th. : pour tout réel x, sin $(x + k\times 2\pi)$ = sin x et cos $(x + k\times 2\pi)$ = cos x (k étant un entier relatif) Th. : pour tout réel x, sin $(x + \pi)$ = - sin x et cos $(x + \pi)$ = - cos x Th. : $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 5

Ecrire toutes les solutions de l'équation sin x $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

Placement d'argent

Michel Lafond
mlafond001@yahoo.fr

Mots clés : mathématiques financières – taux – intérêt – rente.
Résumé : Deux problèmes de mathématiques financières aux conclusions surprenantes.

1. Commençons par un problème simple

Si on place une somme constante a (euros) chaque fin de période à intérêt composé au taux périodique de 4 %, est-il possible de pouvoir retirer : 1 euro à la fin de la première période, 2 euros à la fin de la deuxième période, 3 euros à la fin de la troisième période, …, n euros à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement ? Et si oui, quelle est la valeur minimale de a ?

•*Bref rappel*

Les unités (de temps et d'argent) étant arbitraires, un capital C placé au taux périodique t pendant n périodes, acquiert à la fin de ces n périodes la somme de $C(1+t)^n$.
La démonstration est évidente, puisque par définition du système des intérêts composés, à chaque période écoulée, le capital courant est multiplié par $1+t$.
Dans toute la suite, comme c'est l'usage chez nous, les versements ou retraits se feront systématiquement en fin de périodes. Ce ne sera plus précisé.

- *Notre problème se représente donc par le diagramme ci-dessous*

Fins de périodes	0	1	2	3	---	---	**n**	---	---
Capitaux versés		a	a	a	---	---	a	a	a
Capitaux retirés		1	2	3	---	---	n	---	---

Numériquement cela donne :

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	a	1	$a - 1$
2	$[a - 1] \times 1{,}04$	a	2	$1{,}04a - 3{,}04$
3	$[1{,}04a - 3{,}04] \times 1{,}04$	a	3	$3{,}1216a - 6{,}1616$
	etc.			

- Regardons ce qui se passe dans le cas particulier où le versement périodique est $a = 8$.

L'arrondi est au centième inférieur.

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	8	1	07,00
2	07,00 × 1,04	8	2	13,28
3	13,28 × 1,04	8	3	18,81
4	18,81 × 1,04	8	4	23,56
5	23,56 × 1,04	8	5	27,50
6	27,50 × 1,04	8	6	30,60
7	30,60 × 1,04	8	7	32,82
8	32,82 × 1,04	8	8	34,13
9	34,13 × 1,04	8	9	34,49
10	34,49 × 1,04	8	10	33,86
11	33,86 × 1,04	8	11	32,21
12	32,21 × 1,04	8	12	29,49
13	29,49 × 1,04	8	13	25,66
14	25,66 × 1,04	8	14	20,68
15	20,68 × 1,04	8	15	14,50
16	14,50 × 1,04	8	16	07,08
17	07,08 × 1,04	8		

On constate qu'au bout de 17 périodes, après avoir versé les 8 euros, on ne dispose que de $07{,}08 \times 1{,}04 + 8 = 15{,}36$ euros et qu'il est par conséquent impossible de retirer les 17 euros souhaités.

Conclusion : $a = 8$ ne suffit pas comme montant du versement périodique.

Une solution peut être trouvée, dans le cas particulier où le capital C_n disponible à l'époque n évolue linéairement en fonction de n à savoir : $C_n = \lambda n$.

Pour avoir cela, il faut qu'à l'époque suivante ($n + 1$) on ait :

$$\lambda\, n \times 1{,}04 + a - (n + 1) = \lambda\,(n + 1) \quad \text{et ceci pour tout entier } n.$$

En groupant les n on doit donc avoir $(0{,}04\,\lambda - 1)\,n = \lambda - a + 1$ pour tout entier n.
Cela entraîne $\lambda = 1 / 0{,}04 = 25$ et par suite $\lambda - a + 1 = 0$ d'où $a = 26$.
Effectivement l'évolution est alors la suivante :

fins de périodes	Valeur acquise	versement	retrait	capital restant
1	0	26	1	25
2	$25 \times 1{,}04$	26	2	50
3	$50 \times 1{,}04$	26	3	75
	etc.			

Conclusion : 8 € ne suffisent pas et 26 € suffisent pour les retraits souhaités.
Mais le problème n'est pas résolu tant qu'on n'a pas trouvé le montant minimal a des versements.
Il est temps de mettre le problème en équation.

2. Généralisation à un taux quelconque

Si on place une somme constante a chaque fin de période à intérêt composé au taux périodique t, est-il possible de pouvoir retirer : 1 à la fin de la première période, 2 à la fin de la deuxième période, 3 à la fin de la troisième période, …, n à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement ?
Et si oui, quelle est la valeur minimale de a ?

Soient t le taux périodique et a le versement périodique.
Reportons-nous au diagramme du haut. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'à chaque fin de période, la somme des versements effectués soit au moins égale à celle des retraits. Comme à cause de la capitalisation des intérêts, un capital C acquiert une valeur différente à chaque époque, on ne peut comparer deux capitaux qu'à la même époque. Cette époque sera par commodité la fin de la $n^{\text{ième}}$ période.

- *Minoration de a.*

La somme "actualisée" V des valeurs versées est [formule issue d'une somme géométrique] :

$$V = a\left[(1+t)^{n-1}+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-3}+\ldots+(1+t)+1\right] = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t} \quad (1)$$

La somme "actualisée" R des valeurs retirées est :

$$R = (1+t)^{n-1}+2(1+t)^{n-2}+\ 3\ (1+t)^{n-3}+\ldots+(n-1)(1+t)+n \quad (2)$$

Cette somme est plus compliquée à évaluer, aussi posons pour simplifier

$$u = (1+t)^{-1} \qquad (3)$$

R s'écrit : $$R = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k\ (1+t)^{-k} = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k\ u^k \qquad (4)$$

Des techniques classiques très instructives permettent d'évaluer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k\ x^k \quad (5) :$$

Posons ($x \neq 1$) $$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (6)$$

Dans la suite, nous allons dériver f par rapport à x, puis remplacer x par $u=(1+t)^{-1}$ qui est dans l'intervalle I $=$]0 ; 1[que nous choisissons comme domaine pour x.

Dans (6), la seconde fraction $-\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ est de la forme $x^n\ \varphi(x)$ où est $\varphi(x) = -\dfrac{x}{1-x}$ est fonction de x seul (pas de n).

Lorsque plus tard, x sera fixé [égal à u], x^n tendra vers 0 lorsque n tendra vers l'infini. En effet $x \in$]0 ; 1[.

Donc, $x^n\ \varphi(x)$ tendra vers 0 lorsque n tendra vers l'infini et on écrira selon l'usage $x^n\ \varphi(x) = \varepsilon(n)$.

La dérivée de $x^n\ \varphi(x)$ par rapport à x est $n\,x^{n-1}\ \varphi(x) + x^n\ \varphi'(x)$. Pour x fixé, c'est encore un infiniment petit par rapport à n, puisque, comme on dit dans les petites classes, l'exponentielle x^n l'emporte sur la puissance n^1

[Pour éviter de dire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x^n = 0$].

Nous désignerons désormais par $\varepsilon(n)$ tout infiniment petit par rapport à n qui se présentera.

En dérivant (6) par rapport à x, on obtient :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}+\varepsilon(n) \quad (7)$$

On multiplie (7) par x pour obtenir ce qu'on voulait :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} + \varepsilon(n) \quad (8)$$

La condition sur a, à savoir : $V \geq R$ pour tout n s'écrit d'après (1) (4) (5) :

$$a \, \frac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times S\,(u) \text{ pour tout } n. \qquad (9)$$

D'après (8) et $u = (1+t)^{-1}$: $S\,(u) = \dfrac{u}{(1-u)^2} + \varepsilon \;\; (n) = \dfrac{1+t}{t^2} + \varepsilon \;\; (n)$

La condition (9) devient : $a \, \dfrac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times \left[\dfrac{1+t}{t^2} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

Ou encore $\qquad a \geq \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \times \left[\dfrac{1+t}{t} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

t ne dépend pas de n et $1+t > 1$ donc, en passant à la limite [n tend vers l'infini] on constate que :

- nécessairement $\qquad a \geq \dfrac{1+t}{t}$.
- avec $t = 0{,}04$ on obtient $a \geq 26$ ce qui résout le problème du paragraphe I. La réponse est $a = 26$ euros.

- *Calcul de a.*

On vient de voir que la somme à verser doit être au moins $\dfrac{1+t}{t}$, vérifions que cette valeur convient effectivement :

Avec $a = \dfrac{1+t}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}$, à la fin de la période 1, on dispose de $1 + \dfrac{1}{t} - 1 = \dfrac{1}{t}$; à la fin de la période 2, on dispose de $\dfrac{1}{t}\,(1+t) + 1 + \dfrac{1}{t} - 2 = \dfrac{2}{t}$ et une récurrence immédiate montre qu'à la fin de la période n, on dispose de $\dfrac{n}{t} > n$.

Conclusion :

Si on verse la somme constante $a = \dfrac{1+t}{t}$ chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, on peut retirer : 1 à la fin de la première période, 2 à la fin de la deuxième période, 3 à la fin de la troisième période, …, n à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement.
La valeur donnée de a est minimale.

3. Terminons par un problème à peine plus compliqué qui a été posé à une olympiade. [La compétition américaine PUTNAM il y a une quarantaine d'années] :

Quelle est la valeur minimale a qu'on doit verser chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, afin de pouvoir retirer : 1^2 à la fin de la première période, 2^2 à la fin de la deuxième période, 3^2 à la fin de la troisième période, ..., n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci <u>perpétuellement</u> ?

Cela paraît étonnant à première vue, mais c'est sans compter avec l'exponentielle ici $(1+t)^n$ qui ne va faire qu'une bouchée de la puissance ici n^2.

La somme "actualisée" V des valeurs versées est la même que dans le problème précédent :

$$V_2 = a\left[(1+t)^{n-1}+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-3}+...+(1+t)+1\right] = a\ \frac{(1+t)^n-1}{t} \qquad (10)$$

Mais la somme "actualisée" R des valeurs retirées est cette fois :

$$R_2 = (1+t)^{n-1}+\ 2^2(1+t)^{n-2}+3^2(1+t)^{n-3}+...+(n-1)^2(1+t)+n^2 \qquad (11)$$

On pose toujours $u = (1+t)^{-1}$.

R_2 s'écrit :

$$R_2 = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2\ \ (1+t)^{-k} = (1+t)^n\times\sum_{k=1}^{k=n} k^2\ \ u^k \qquad (12)$$

Les techniques vues plus haut permettent d'évaluer

$$S_2(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2x^k \quad (13) :$$

On dérive deux fois $f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} x^k = \frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$ dans l'intervalle $\mathrm{I} =]0\ ;\ 1[$

On a vu que la dérivée première était

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}+\varepsilon(n) \qquad (14)$$

La dérivée seconde est $f''(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}+\varepsilon(n)$ (15)

[Vérifier qu'on a bien un $\varepsilon(n)$ dans (15)]

Or $S_2(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2\ \ x^k = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)\ \ x^k + \sum_{k=1}^{k=n} k\ \ x^k = x^2f''(x)+xf'(x)$

Donc, d'après (14) et (15) :

$$S_2(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}+\varepsilon(n) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}+\varepsilon(n)$$

Avec $u = (1+t)^{-1}$ cela donne $S_2\,(x) = \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^3} + \varepsilon(n)$ (16)

D'après (10) (12) (13) la condition sur a est $a\ \dfrac{(1+t)^n - 1}{t} \geq (1+t)^n \times S_2(u)$

Ou encore d'après (16) $a \geq \dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \times \left[\dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2} + \varepsilon(n)\right]$ pour tout n.

En passant à la limite, on constate que nécessairement $a \geq \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2}$.

Ici aussi, il faut s'assurer qu'en prenant $a = \dfrac{(1+t)(2+t)}{t^2} = 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$ on pourra bien effectuer tous les retraits voulus.

A la fin de la période 1, on dispose de $1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2} - 1^2 = \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$

A la fin de la période 2, on dispose de $\left[\dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}\right](1+t) + 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2} - 2^2 = \dfrac{8}{t} + \dfrac{4}{t^2}$

La récurrence fonctionne :

Supposons qu'à la fin de la période n, on dispose de $\dfrac{n\ (n+2)}{t} + \dfrac{2n}{t^2}$

[C'est vrai pour $n = 1$ ou 2].

Cette quantité est bien supérieure à n^2.

A l'époque suivante, on disposera de :

$$\left[\frac{n\ (n+2)}{t} + \frac{2n}{t^2}\right](1+t) + 1 + \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} - (n+1)^2 = \frac{(n+1)\ (n+3)}{t} + \frac{2\ (n+1)}{t^2} \quad \text{CQFD.}$$

Conclusion :

Si on verse la somme constante $a = 1 + \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2}$ chaque fin de période, à intérêt composé au taux périodique t, on peut retirer :
1^2 à la fin de la première période, 2^2 à la fin de la deuxième période, 3^2 à la fin de la troisième période,…, n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, et ceci perpétuellement.
La valeur donnée de a est minimale.

Si on reprend le cas particulier $t = 0{,}04$: en versant périodiquement 1326 euros [et pas un centime de moins], au taux périodique de 4 %, on est en mesure de retirer perpétuellement : $1^2 = 1$ euro à la fin de la première période, $2^2 = 4$ euros à la fin de la deuxième période, $3^2 = 9$ euros à la fin de la troisième période, …, n^2 à la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, etc.

Encore une fois, une rente "quadratique " face à une inflation "exponentielle" du genre + 2% par an soit une base 1,02 pour l'exponentielle, est illusoire si on compte vivre de cette rente. Et ce ne serait pas mieux avec une rente perpétuelle en n^3.

Writing and spelling numbers in English

David Magnien, Lycée Hilaire de Chardonnet, Chalon-sur-Saône
dmagnien@yahoo.com

Réponses (soulignées) de mon article de Feuille de Vigne n°104

A number is composed of ***digits*** that are 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. The place of these digits set the value of the number: our system is a ***positional system*** or *place value notation*.

Write these numbers with words :
1 : one 10: Ten 100 : one hundred 1 000 : one thousand

When a number has more than 3 digits, you can use a ***comma*** to split the number into groups of 3 digits: 10,000 ; 7,546,931; 145,000,121, ... This is a widespread convention in English-speaking countries (except South Africa).

Write these numbers with words:
10,000 : ten thousand 100,000 : one hundred thousand
1,000,000 : one million

To name numbers, English-speaking countries use the *short scale system*, based upon a one thousand unit. To put it briefly, **the number 1,000,000,000 is read *one billion*, the number 1,000,000,000,000 is read *one trillion, and so on*** (you multiply by one thousand each time you move up one unit in the scale of numbers).

The system in use in France is called the *long scale system*, and is based upon a one million unit.

Write these numbers with words :

546,121: five hundred and forty-six thousand one hundred and twenty-one

27,889,126 : twenty-seven million eight hundred and eighty-nine thousand one hundred and twenty-six

1,002,430,291 : one billion two million four hundred and thirty thousand two hundred and ninety-one

2,000,000,000,030: two trillion and thirty
Note : these names are mostly used in a scientific context; in everyday life, and in economics in particular, 1,000,000,000,000 is read *one thousand billion*, as we often do in France.

A number has an integer part and a decimal part: to separate the two, most English-speaking countries use a ***dot or period***. Thus, a price of two and a half euros will be written 2.50 €.

Names of digit places :

6,047,891.325

Five thousandth
Two hundredth
Three tenth

Drawing a curve – functions

Below is a *table* with the average temperatures of three cities: Moscow, Bangkok and Buenos Aires.

	Average Temperature	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	Jun.
Moscow	5.3	-7.5	-6.7	-1.4	6.4	12.8	17.1
Bangkok	28.5	26.7	28.2	29.5	30.5	30.0	29.5
Buenos Aires	17.7	24.6	23.3	21.7	17.7	14.6	11.5

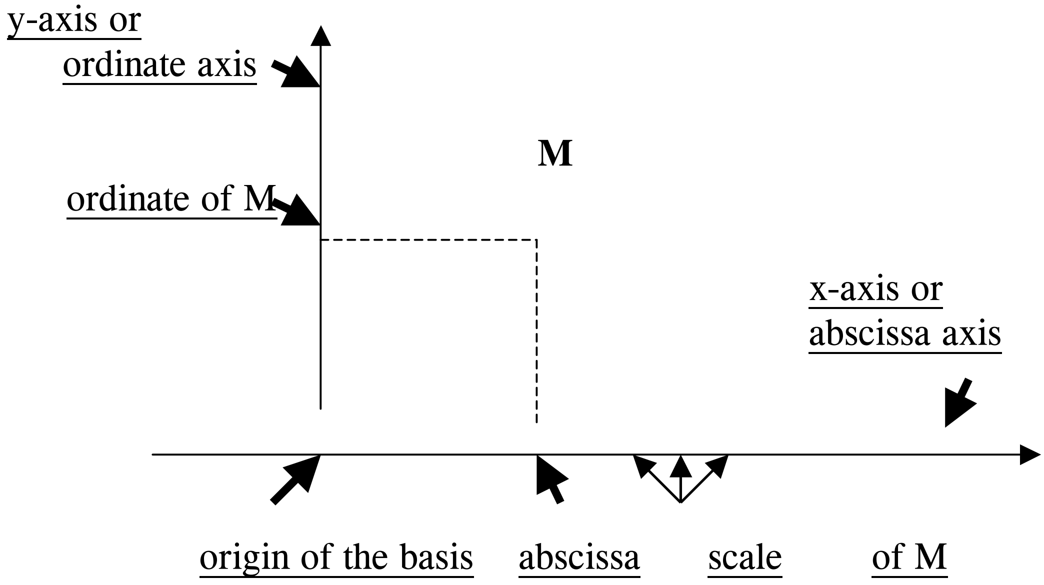
	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Moscow	18.4	16.5	10.8	5.0	-1.6	-5.5
Bangkok	29.1	28.8	28.5	28.2	27.4	26.2
Buenos Aires	11.1	12.6	14.5	17.5	20.2	23.4

(source : Rika Nempyo - Chronological Scientific Tables – from http://web-japan.org/stat/stats/01CEN15.html)

We will draw a *curve* of temperatures for each city.

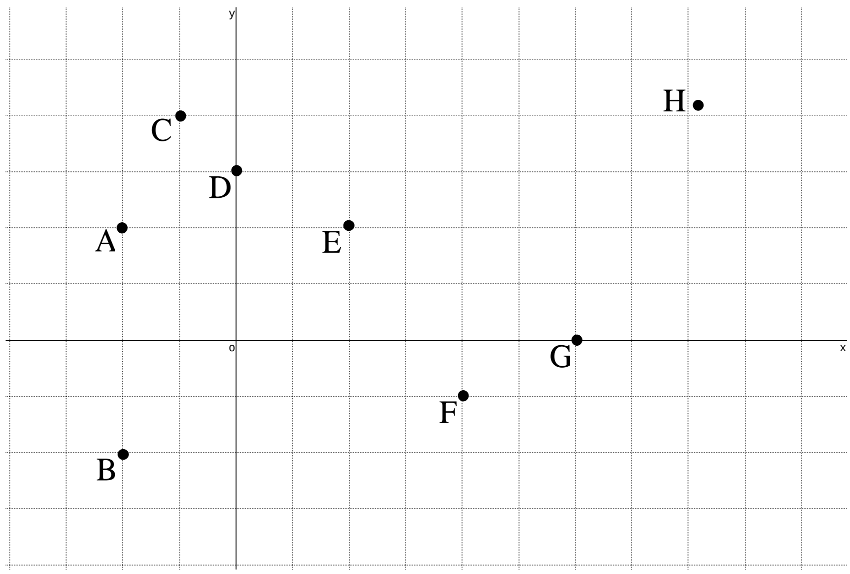
I. Coordinates

In an *orthonormal basis,* a *point* can be located by its coordinates. These are two numbers which control its horizontal position (the abscissa) and its vertical position (the ordinate). We can read them on the *x-axis* and the *y-axis*.



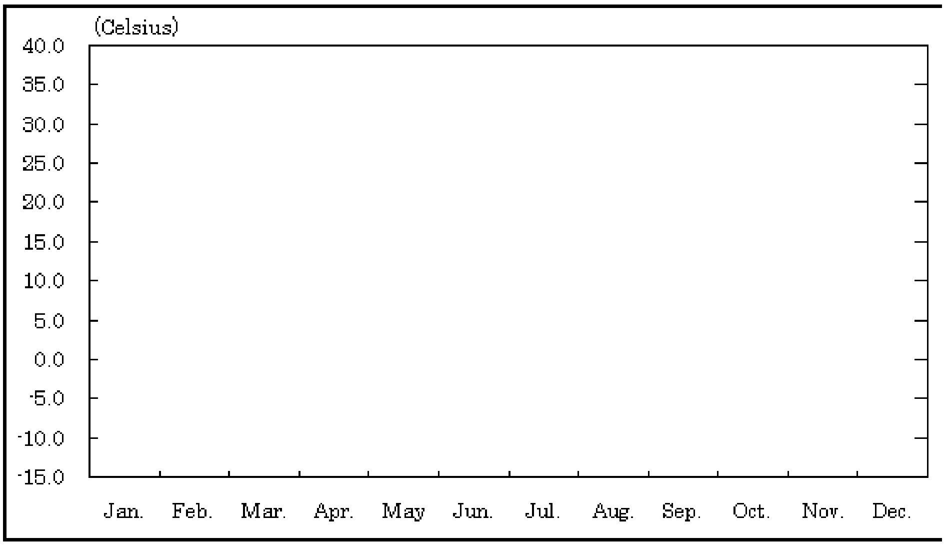
Exercise : find the coordinates of the following points :

A(-1;1)
B(-1;-1)
C(2;-0.5)
D(0;1.5)
E(1;1)
F(2;-0.5)
G(3;0)
H(4.1; 2.1)



II. Curves

Use the table to draw the temperature curves for each city below : plot 12 points for each, and link them with a curved line. Use a different colour for each city.



1) Which city has the highest temperatures ? Which city has the lowest temperatures ?

Bangkok has the highest temperatures, and Moscow has the lowest

2) Find the highest and lowest temperatures for each city.

Moscow : 18.4 and -7.5. Bangkok : 30.5 and 26.2 Buenos Aires : 24.6 and 11.1

3) What can you say about Bangkok's curve ? Is it the same for Moscow ?

We can say that Bangkok's curve doesn't have a wide amplitude: the difference between its maximum and minimum is small. On the contrary, Moscow's has a wider amplitude : it raises high and goes down quite low.

4) What can you say about the temperatures of Buenos Aires ?

We can say two things. First, the evolution is in opposition with those of Bangkok and Moscow : when they increase, Buenos Aires' curve decreases, and conversely, they decrease while the last curve increases. Second, the amplitude of Buenos Aires' curve is between Moscow's and Babgkok's.

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITE DE REDACTION ET DE LECTURE :
Fakredine GHOMMID
Patrick GABRIEL
Michel LAFOND
Marie-Noëlle RACINE

REDACTEUR EN CHEF :
Patrick GABRIEL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Patrick GABRIEL, Directeur de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 184 – 1er semestre 2008

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://www.u-bourgogne.fr/irem