

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ *Courbes de poursuites avec Scilab*
- ✓ *Origami : construction de l'heptagone régulier*
- ✓ *Perspectives d'un cercle (partie 2)*



© *Trem de Dijon - 2011*

Sommaire

✓ Agenda	1
✓ Jeux et Problèmes	3

Articles

✓ Courbes de poursuites avec Scilab	<i>Fakhreddine GHOMMID</i>	5
✓ Origami : construction de l'heptagone régulier	<i>Michel LAFOND</i>	15
✓ Perspectives d'un cercle (partie 2)	<i>Marie-Noëlle RACINE</i> <i>Alain MASCRET</i>	29

Éditorial

Jeudi 2 février 2012, onze heures du soir. (Grognon, frustré de n'avoir eu droit à aucune crêpe partie, en ce jour de chandeleur, exclu des festivités pour ménager ma santé et m'éviter les désagréments d'un sucre « assassin »). En plus, je suis en retard, je dois rendre ma copie pour demain matin au plus tard, et je reste un peu sec, (sûr je vais y passer la nuit à me triturer l'esprit) pour essayer de trouver de quoi vous faire sourire tout en vous instruisant de ce que contient ce fameux document. C'est qu'on m'a demandé de faire l'édito de cette 122^e feuille de vigne. Il me semble avoir fait en un temps celui de la centième. (Dites donc, 22 éditos plus tard, c'est que l'éternel prétendu moribond a survécu ! Mais non je ne parle pas de votre serviteur, même si comme vous l'avez sans doute deviné un nouveau dosage sanguin vient de passer au rouge dans ma check liste de gros porteur, mais c'est de notre cher IREM et de sa feuille de route que je vous entretiens) Non, non, au contraire, celui-là, celui de la centième, l'édito de la centième feuille de vigne, je crois que j'avais réussi à le refiler à quelqu'un d'autre. (Mes souvenirs m'échappent et n'ayant plus madame Besse à ma disposition, pas moyen de vérifier, que voulez-vous Alzheimer nous guette. Je serais bien parti rapidement mais ils m'en ont collé pour deux ans de plus, que diantre, c'est de la retraite que je vous parle, celle à laquelle vous, tout comme moi, aspirez tant et qui telle un mirage s'éloigne d'autant dès qu'on s'en approche un tant soit peu). Oui, oui, c'est qu'il n'est pas si aisé de se plier à cet exercice, du moins pour moi, mais oui, bien sûr celui, l'exercice, de rédiger un éditto. (Je sens que vous décrochez déjà et j'entends des voix assurant que je déraile, que mon style est confus, ou que je vous mène en bateau. Non non, assurément, n'en croyez rien, j'applique la même stratégie que vous quand vous voulez tester si vos élèves restent attentifs, buvant vos dives paroles tout au long de vos cours.) Mais revenons à mes propos. Certains disais-je, ont la prose facile, le liant inné, mais que voulez-vous, quand on a mon gabarit, et mon âge avancé, se plier à quoi que ce soit est chose fort délicate. Se plier, plier, tiens, cela me donne

une idée. Voyons quels mots clés ai-je retenu de ma lecture des articles que je dois vous présenter (oui bien sûr que je les ai lus et relus, ..., non mais, vous en douteriez !)

Alors : Musée, Poursuites, Le pli d'Hatori, Courbes, Beaux-Arts, Perspectives, Forbans et Corsaires, Gabarit, Demi-part ou Demi-portion, je sais plus, Hyperboles, Origamis ou pliages en tout genres, non en fait de six ou sept types seulement, mais itérés 2,5,8,8 et jusqu'à plus de cent fois, Pizzas, Crêpes, Parts au nombre de sept à découper et à distribuer je crois, Cercles, Triangles, Losanges à faire disparaître pourquoi ceux-là je ne sais pas, Hexagones et même Heptagones certains réguliers, d'autres pas, Ellipses, Coniques, Racines cubiques et carrées, l'angle GDF et moi qui pensais que c'était GDF ou EDF, en fait pour tout vous dire je préfère SNCF , Tri section, Papy Russe, Rationnel (celui-là j'ai pas très bien compris pourquoi il était là), Rédhitoire (celui-là j'ai compris) tout un fatras dites moi, que voulez-vous que j'en fasse moi de ce matériel brut de décoffrage, d'autant qu'il y en a un en plus qui est un intrus, un qui vient de mes obsessions de mes frustrations du jour, et j'arrive pas à le retrouver pour le biffer. Quelqu'un pourrait-il m'aider, au moins ! Et puis il y a ces aphorismes d'un des auteurs criant de sagesse et de vérité :

« Si on réussit, l'affaire sera réglée et même pliée » « En fait si on croit tout ce qu'on lit »

« Il faut évidemment avoir lu ce qui précède (en fait ce qui suit) pour comprendre ce qui se passe »

Alors je vous invite à sauter cet éditto insipide et à vous régaler directement de la suite de cette feuille de vigne farcie à la grecque des mets les plus succulents.

Croyez-vous que j'ai réussi, que mon affaire est réglée et même pliée, que l'on ne sollicitera plus ma peine et ma plume pour rédiger un quelconque futur éditto ? Car que pourrais-je inventer de mieux. Faut savoir se retirer en pleine gloire ne croyez-vous pas ?

Patrick GABRIEL

Agenda

RALLYES

Pour connaître les énoncés et les solutions des **Rallyes collèges et lycées 2012** :

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM/Rallyes.html>

Création d'un Rallye Mathématique des écoles : présentation du projet

Objectifs du projet :

- Proposer aux classes volontaires CE2, CM1 et CM2 (30 cette année) d'aborder la résolution de problèmes ;
- Proposer ce travail sous forme coopérative ;
- Permettre aux élèves de clarifier leur démarche de résolution ;
- Faire en sorte de réaliser des travaux de recherche en groupe, argumenter par rapport à une solution proposée, valider une solution commune à la classe.

Modalités de travail :

- Le rallye comporte trois étapes, à chaque étape les classes reçoivent une série de 6 énoncés de problèmes à résoudre.
- Les énoncés couvriront tous les domaines d'apprentissage en Mathématiques et s'inscrivent dans les programmes 2008 de l'école primaire ; ces énoncés sont conçus par un groupe de travail composé de membres de l'OCCE de Côte d'Or, de l'APMEP Bourgogne (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), de l'IREM de Dijon (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et du groupe départemental de Mathématiques de l'Inspection Académique de Côte d'Or.
- Répartition des 10 problèmes : CE2 : problèmes de 1 à 6 ; CM1 : problèmes de 3 à 8 ; CM2 : problèmes de 5 à 10.
- Les six problèmes seront à résoudre en une heure ; le travail de groupe sera donc à privilégier (tous les élèves n'auront pas forcément à résoudre tous les problèmes).
- Pour chaque problème, la classe se mettra d'accord sur une seule solution qui sera renvoyée ; un travail de mise en commun puis de mise en forme (postérieur ou pas au temps de la résolution) sera nécessaire.

Calendrier :

Pour chaque étape, l'enseignant choisira une heure dans la semaine. Les réponses aux problèmes seront ensuite disponibles sur le site de l'IREM et de l'OCCE.

- Du 13 au 17 février 2012 : 1^o étape.
- Du 19 au 23 mars 2012 : 2^o étape.
- Du 10 au 17 avril 2012 : 3^o et dernière étape.

A la fin du rallye, un fascicule sera disponible en téléchargement sur les sites Internet avec l'analyse des problèmes et des différentes procédures produites par les classes.

ASTRONOMIE

Le Cosmodyssée III, le planétarium itinérant du CCSTI, fonctionne toujours. La coupole gonflable était un peu fatiguée mais elle a été en partie réparée. Si vous voulez l'utiliser, il suffit d'avoir quelques notions d'astronomie, de trouver une salle de 6 m de côté (ou 5,50 m sur un des côtés) et 2,50 m minimum sous plafond, si possible obscurcie, et d'avoir suivi une formation à son utilisation, j'en organise une mercredi 8 février après-midi à l'IUFM de Dijon. Si vous pensez venir, merci de me l'indiquer par mail (pierre.causeret@ac-dijon.fr).

Vous pouvez aussi télécharger le dossier pédagogique sur le site du Rectorat à l'adresse : <http://www.ac-dijon.fr/Ressources-pedagogiques/Arts-et-culture/ACTUALITE2/Astronomie> (cliquer sur planétarium itinérant)

Initiation au maniement du planétarium itinérant

Mercredi 8 février de 14 h 30 à 16 h 30 - IUFM, 51 rue Ch. Dumont 21000 Dijon.

L'APMEP propose à ses adhérents, gratuitement, (et à tout enseignant, pour 2 séances d'essai) de se former et d'approfondir certaines notions enseignées dans notre système éducatif.

Ce que ces cours ne sont pas :

- **Il n'est pas question de pallier les carences du ministère concernant la formation continue des enseignants.** L'APMEP demande toujours que l'Etat mette en place une formation continue qui, *pour être vraiment effective, doit être intégrée dans le « service » de chaque enseignant, tout au long de sa carrière*
Voir : Texte d'orientation 2010 de l'APMEP (Formation continue)
- **Il n'est pas question de concurrencer le travail fait par les IREMs.** Bien au contraire, l'APMEP, lors du dernier Comité Scientifique des IREMs, a demandé à l'ADIREM de proposer une liste de formateurs prêts à intervenir sur des sujets spécifiques intéressant les collègues.
- **Il n'est pas question de livrer des cours « clé en main ».** L'APMEP s'y est toujours refusée et pense que donner aux collègues des pistes de réflexions permettant de prendre de la hauteur et du recul est préférable au « copier – coller ».

Les séances d'une heure sont suivies d'une demi-heure de discussion.

Premiers sujets proposés : algorithmique (avec le logiciel LARP), **place de l'histoire et l'épistémologie dans l'enseignement** (premier et second degré), **probabilités** (nouveaux programmes de classes scientifiques).

Chaque cours est enregistré afin que ceux qui n'ont pu le suivre aux horaires proposés puissent y avoir accès.

Renseignements à l'adresse : www.apmep.asso.fr (La rubrique se trouve en haut à droite de la page d'accueil).

Les dates de la première conférence sont mercredi 18 janvier de 18h à 19h30 et jeudi 19 de 20h à 21h30.

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND
mlafond001@yahoo.fr

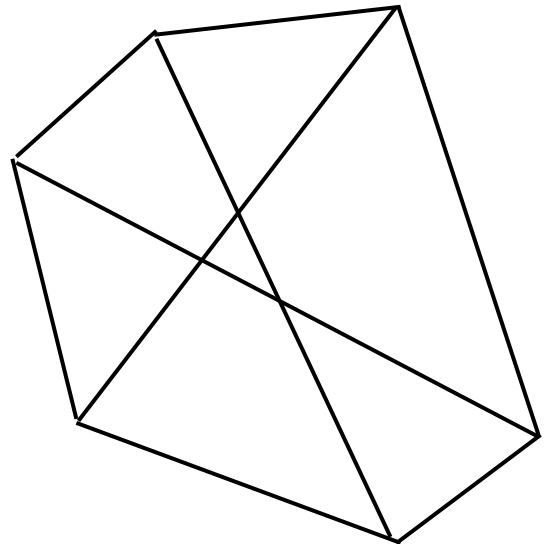
JEU – 72.

Dans l'hexagone quelconque H ci-contre,
3 diagonales sont tracées.

Elles partagent H en 7 parties (4 triangles et
3 quadrilatères).

Il s'agit de rajouter un nombre fini de sécantes
(segments joignant deux points du bord de H)
de telle sorte que toutes les parties soient des
triangles.

Autrement dit, il faut éliminer les
quadrilatères.



PROBLÈME – 72.

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ le système suivant : } \begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 40 \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 12 \end{cases}$$

On demande les solutions exactes.

Solutions

JEU – 71.

Trouver le nombre maximal d'entiers de l'ensemble $E = \{2, 3, 4, 5 \dots 100\}$ ayant
pour produit un carré parfait.

Solution : La réponse est 83, en effet :

Le produit de tous les éléments de E , c'est à dire $100!$ vaut :

$$2^{97} 3^{48} 5^{24} 7^{16} 11^9 13^7 17^5 19^5 23^4 29^3 31^3 37^2 41^2 43^2 47^2$$

53.59.61.67.71.73.79.83.89. 97.

Si on veut un carré parfait il faut ôter impérativement les 10 nombres premiers supérieurs à 50 (Ils ont 1 pour exposant dans $100!$!)

Les autres nombres premiers ayant un exposant impair dans $100!$ sont :

2, 11, 13, 17, 19, 29 et 31.

Prenons le cas de 11. Il faudra se passer de 11 ou d'un de ses multiples.

C'est la même chose pour 13, 17, 19, 29 et 31.

Comme 11, 13, 17, 19, 29 et 31 n'ont pas de multiples communs dans E , cela fait donc 6 nombres supplémentaires à ôter de E .

Le nombre maximal d'entiers ayant pour produit un carré parfait est donc

$$99 - (16) = 83.$$

On peut effectivement atteindre ce maximum en prenant dans E tous les éléments sauf

22, 13, 17, 19, 29, 31, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 ce qui résout aussi le problème de l'exposant 97 du facteur 2.

Le produit des 83 éléments qui restent vaut :

$$2^{96} 3^{48} 5^{24} 7^{16} 11^8 13^6 17^4 19^4 23^4 29^2 31^2 37^2 41^2 43^2 47^2.$$

C'est le carré de $2^{48} 3^{24} 5^{12} 7^8 11^4 13^3 17^2 19^2 23^2 29.31.37.41.43.47$.

PROBLÈME – 71.

Démontrer que pour tout entier n le nombre $n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n$ est multiple de $7!$ [factorielle 7].

Solution :

$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n$ a plusieurs racines évidentes : 0, 1, 2, 3 et leurs opposées.

On a donc

$$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n = n (n^2 - 1) (n^2 - 4) (n^2 - 9) \text{ ou encore :}$$

$$n^7 - 14 n^5 + 49 n^3 - 36 n = (n - 3) (n - 2) (n - 1) n (n + 1) (n + 2) (n + 3)$$

où l'on reconnaît le produit $C_{n+3}^7 \times 7!$ en tous cas lorsque n est au moins égal à 4.

Mais pour $n < 4$ le produit est nul donc encore multiple de $7!$

Courbes de poursuites avec Scilab

Fakhreddine GHOMMID, lycée Gustave Eiffel, Dijon

Résumé : Exemple d'utilisation du logiciel *Scilab* dans la résolution approchée d'un problème historique, en l'occurrence, le problème des courbes de poursuite.

Mots clés : Courbe de poursuite ; logiciel *Scilab* ; représentation des courbes en informatique ; motivation à la recherche.

Les activités d'algorithmique développées dans les classes de lycées, permettent de revisiter de beaux problèmes, désormais devenus des « classiques », en ajoutant un caractère parfois ludique facilitant l'exploration et la recherche.

Le logiciel de calcul scientifique *Scilab*, libre et gratuit, est ici mis en avant afin de montrer quelques-unes de ses possibilités ; l'activité choisie pour cela est celle de la construction d'une *courbe de poursuite*.

Mais avant d'aller plus loin, donnons la définition de ces courbes que proposa Bouguer, publiée dans les *Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences*, 1732 :

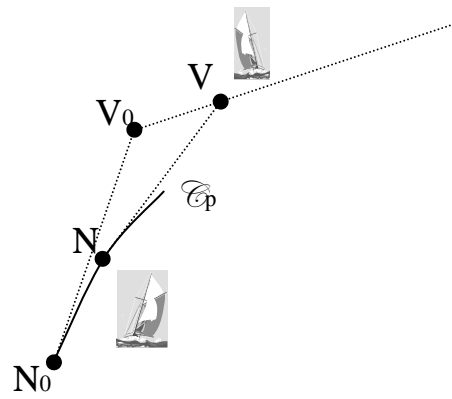
[...] *On peut donner à ces courbes le nom de lignes de poursuites, parce qu'elles sont décrites par le mouvement uniforme d'un point qui en poursuit un autre. Considérées sous cette idée, on voit qu'elles sont tracées presque tous les jours, et elles l'étaient le temps passé encore plus souvent, lorsqu'on commettait fréquemment cette faute dans la Marine, de diriger exactement la Proue vers les Vaisseaux auxquels on donnait chasse. Aussitôt que le Navire qui poursuivait l'autre, n'était pas situé sur la route que suivait ce dernier, il était obligé de se détourner dans celle de la ligne droite, et de décrire la courbe dont il est ici question.*



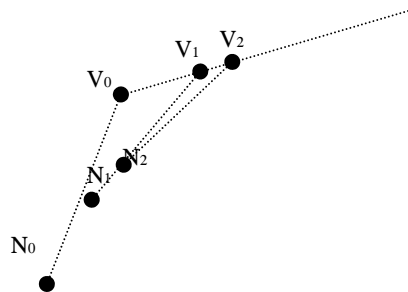
MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIREES DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
De l'Année M. DCCXXXII.
SUR DE NOUVELLES COURBES
ausquelles on peut donner le nom de LIGNES
DE POURSUITE.
Par M. BOUGUER.

Examinons à l'aide de schémas l'exemple proposé :

Dans le plan, le point V représente la position du vaisseau poursuivi (V_0 étant sa position initiale) et N représente la position du navire prenant le vaisseau en chasse (N_0 étant sa position initiale). V décrit une demi-droite et N la courbe de poursuite C_p , la droite (NV) étant supposée tangente à la courbe C_p .

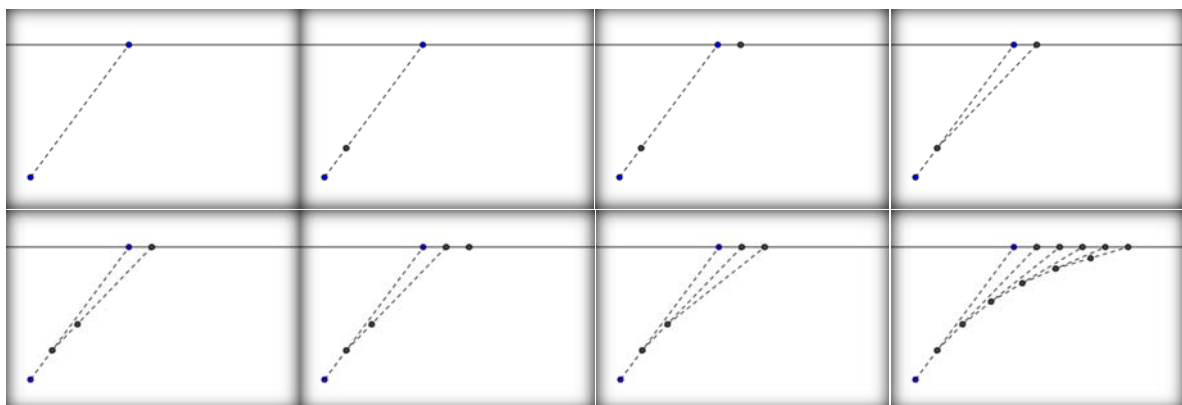


Afin de modéliser approximativement cette dynamique à l'aide d'un algorithme, donnons-nous une approche discrète, une construction « pas-à-pas » par intervalles de temps :



Suivant cette approximation, et étant données deux positions N_1 et V_1 , les nouvelles positions N_2 et V_2 seront, un laps de temps après, telles que $\overrightarrow{N_1 N_2} = k_1 \overrightarrow{N_1 V_2}$ et $\overrightarrow{V_1 V_2} = k_2 \vec{u}$ où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles à déterminer et \vec{u} un vecteur directeur de la trajectoire suivie par le vaisseau.

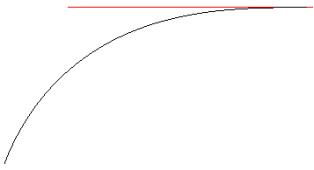
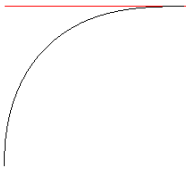
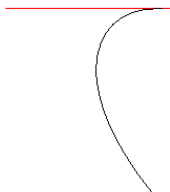
Mais essayons de construire point par point, « à la main » (en fait ici avec Geogebra), les positions successives de nos deux bateaux. Remarquons qu'entre les instants successifs $t=0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ les distances parcourues restent constantes :



Ces constructions successives esquissent notre premier algorithme dont le code *Scilab* est donné ci-après :

Code Scilab
<pre> function result=<u>distance</u>(A, B) result=sqrt((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2); endfunction function [coords]=<u>deplace</u>(A, u) coords(1)=A(1)+u(1) coords(2)=A(2)+u(2) endfunction function [coords]=<u>vecteur</u>(A, B) coords(1)=B(1)-A(1) coords(2)=B(2)-A(2) endfunction d1=1.5/10 //Déplacement du Navire par intervalle de temps d2=1/10 //Déplacement du Vaisseau par intervalle de temps N=[-5,-2] //Position initiale du Navire (coordonnées) V=[-4,0.5] //Position initiale du Vaisseau (coordonnées) <u>clf</u>() //Efface le contenu de la fenêtre graphique <u>orthonorme</u> //Rend le repère orthonormé compteur=1 while ((<u>distance</u>(N,V)>0.1)&(compteur<100)) compteur=compteur+1 A=N //Mémorise les anciennes positions de N et V B=V //pour le tracé des segments avec plot2d k1=d1/<u>distance</u>(N,V) N=<u>deplace</u>(N,<u>vecteur</u>(N,V).*k1) //Nouvelles coordonnées du Navire V=<u>deplace</u>(V,[d2,0]) //Nouvelles coordonnées du Vaisseau plot2d([A(1),N(1)],[A(2),N(2)],[1],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) plot2d([B(1),V(1)],[B(2),V(2)],[5],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) end </pre>


Exemples de sorties
pour différentes valeurs de d_1 , d_2 , N et V .
(précisées et modifiables dans l'algorithme)

 <p>$d_1=1.5/10$ $d_2=1/10$ $N=[-5,-2]$ $V=[-4,0.5]$</p>	 <p>$d_1=1.4/10$ $d_2=0.9/10$ $N=[-4,-2]$ $V=[-4,0.5]$</p>	 <p>$d_1=1.2/10$ $d_2=1/10$ $N=[0,-3]$ $V=[-4,0.5]$</p>
---	---	--

Ce type de programme peut être introduit très tôt au lycée, dès les développements des premiers algorithmes relatifs à la géométrie repérée. On pourrait bien sûr utiliser le très ludique logiciel *Scratch*, mais le contenu mathématique, déjà présenté *a minima*, serait vidé de toute substance :

Code Lutin 2


```

quand  pressé
effacer tout
abaisser le stylo
répéter indéfiniment si  non  bord touché?
  avancer de  pas

```

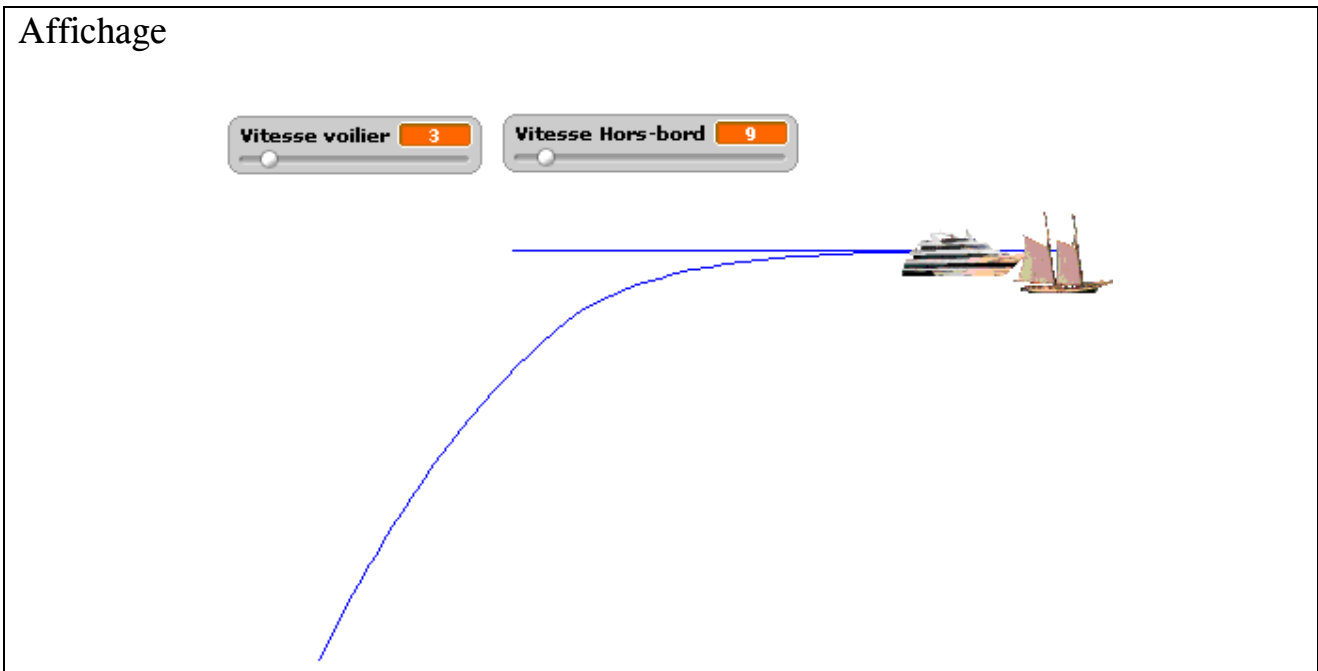
Code Lutin

```

quand  pressé
abaisser le stylo
répéter indéfiniment si  non  Lutin2 touché?
  pointer vers 
  avancer de  pas

```

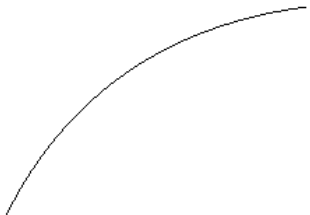
Affichage



Une autre façon de traduire cette situation de poursuite est d'introduire les suites de coordonnées dans un repère orthonormé du plan d'origine V_0 , l'axe des abscisses étant dirigé et orienté par le parcours du vaisseau. En notant $N_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ et $V_k \begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel k , les positions successives de N et V , la relation vectorielle $\overrightarrow{N_k N_{k+1}} = \frac{d_1}{N_k V_k} \overrightarrow{N_k V_k}$ avec $\overrightarrow{V_k V_{k+1}} = \begin{pmatrix} d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (où d_1 et d_2 sont toujours les distances parcourues par intervalle de temps donné), conduit à :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{d_1}{\sqrt{(d_2 k - x_k)^2 + y_k^2}} (d_2 k - x_k) + x_k \\ y_{k+1} = y_k \left(1 - \frac{d_1}{\sqrt{(d_2 k - x_k)^2 + y_k^2}} \right) \end{cases}$$

La représentation des suites avec *Scilab* étant faite sous la forme d'un tableau, l'indice initial ne peut être 0, mais 1 ; d'où une nécessaire adaptation que voici (calcul de 100 points pour l'exemple) :

Code Scilab
<pre> d1=1.5/10 //Déplacement du Navire par intervalle de temps d2=1/10 //Déplacement du Vaisseau par intervalle de temps clf() x(1)=-1 //Position initiale du Navire y(1)=-2 for n=1:100 c=d1/sqrt((d2*(n-1)-x(n))^2+y(n)^2) x(n+1)=c*(d2*(n-1)-x(n))+x(n) y(n+1)=y(n)*(1-c) end plot2d(x,y,[1],axesflag=0,rect=[-5,-2,2,1]) </pre>
<p>Graphique obtenu</p> 

Enfin, les possibilités de résolution numériques d'équations différentielles par *Scilab* peuvent être exploitées.

En considérant le repère précédent avec $N \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $V \begin{pmatrix} v_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux fonctions supposées dérivables de la variable réelle t , v_1 et v_2 les vitesses respectives du Vaisseau et du Navire, nous avons la relation $\frac{d\overrightarrow{ON}}{dt} = \frac{v_2}{NV} \overrightarrow{NV}$ qui se traduit par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{v_2}{\sqrt{(v_1 t - x(t))^2 + y(t)^2}} (v_1 t - x(t)) \\ y'(t) = -\frac{v_2}{\sqrt{(v_1 t - x(t))^2 + y(t)^2}} y(t) \end{cases}$$

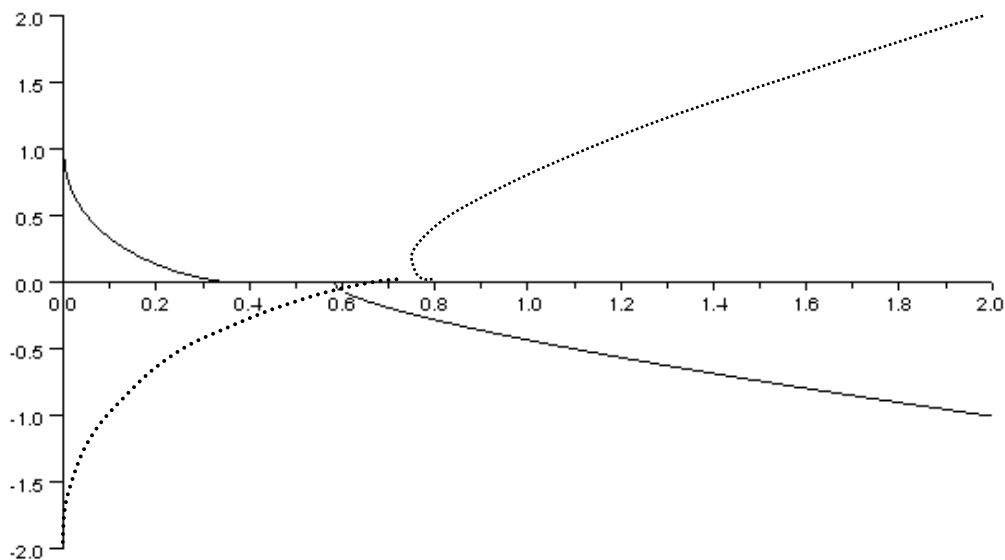
Qui peut être résolu de façon approchée par *Scilab* comme suit :

Code Scilab

```
//Définition du système différentiel :
function [f]=equadiff(t, N)
    // Ici, f(1)=x'(t), f(2)=y'(t) et N=[x(t),y(t)]
    f(1)=v2/sqrt((v1*t-N(1))^2+N(2)^2)*(v1*t-N(1))
    f(2)=-v2/sqrt((v1*t-N(1))^2+N(2)^2)*N(2)
endfunction

//Valeurs des vitesses respectives :
v1=1
v2=2
clf()
// les valeurs des instants pour lesquels on récupère la solution (tmin=0,
tmax=500)
t = linspace(0,1,500)
N0 = [1 ; -1]; // la condition initiale
// La résolution approchée de notre équation différentielle :
[N] = ode(N0, 0, t, equadiff)
// Le tracé de la solution (sous réserve d'unicité):
plot2d(N(1,:),'N(2,:)')
```

Exemples de courbes obtenues



Les différentes approches présentées ne doivent pas faire oublier qu'aucune technique mobilisée ici ne valide les résultats obtenus (erreur liée à la méthode et stabilité des solutions, erreur numérique, etc.). Pour comparer les constructions approchées à la trajectoire exacte, laissons à M. de Maupertuis le soin de nous exposer sa solution (voir l'encadré ci-contre, extrait du même *Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences* de 1732).

**S U R L E S C O U R B E S
D E P O U R S U I T E .**

Par M. DE MAUVERTUIS.

LE Memoire que M. Bouguer lût, il y a quelques jours, m'a fait penser à une Solution affés courte du même Probleme:

PROBLEME I. *Trouver la courbe de poursuite, c'est-à-dire, la courbe par laquelle un Vaisseau doit en poursuivre un autre qui s'enfuit par une ligne droite, en supposant que les vitesses des deux Vaisseaux soient toujours dans le même rapport.*

SOLUTION. Ce Probleme se réduit à trouver la courbe où la resecte est proportionnelle à l'arc (j'appelle *Resecte*, la partie de l'abscisse prise depuis l'origine jusqu'à la rencontre de la tangente). Prenant donc x pour l'abscisse; y pour l'ordonnée, & s pour l'arc, on a $\frac{y dx}{dy} - x = ms$, ou $\frac{dy^2 dx + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2} - dx = m ds$. Cette équation, si l'on fait dy constant, se réduit à $\frac{ddx}{V(dy^2 + dx^2)} = \frac{m dy}{y}$, ou (intégrant par logarith.) $l(dx + \sqrt{dy^2 + dx^2}) - l dy = mly - mlA$, ou, passant aux nombres, $dx + \sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy$, ou $\sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx$, ou $dy^2 + dx^2 = y^{2m} A^{-2m} dy^2 - 2y^m A^{-m} dy dx + dx^2$, ou $dy = A^{-2m} y^{2m} dy - 2A^{-m} y^m dx$, ou $dx = \frac{1}{2} A^{-m} y^m dy - \frac{1}{2} A^m y^{-m} dy$, ou enfin $x = \frac{1}{2m+1} A^{-m} y^{m+1} + \frac{1}{2m-1} A^m y^{-m+1} + B$.

Ou dans le cas $m=1$, $x = \frac{1}{4} A^{-1} yy - \frac{1}{2} A ly + C$.

« **PROBLÈME 1.** *Trouver la courbe de poursuite, c'est-à-dire, la courbe par laquelle un Vaisseau doit en poursuivre un autre qui s'enfuit par une ligne droite, en supposant que les vitesses des deux Vaisseaux soient toujours dans le même rapport.*

SOLUTION. *Ce Problème se réduit à trouver la courbe où la resecte est proportionnelle à l'arc (j'appelle Resecte, la partie de l'abscisse prise depuis l'origine jusqu'à la rencontre de la tangente). Prenant donc x pour l'abscisse, y pour l'ordonnée, & s pour l'arc, on a $\frac{y dx}{dy} - x = ms$, ou*

$$\frac{dy^2 dx + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2} - dx = m ds. \text{ Cette équation, si l'on fait } dy \text{ constant, se}$$

réduit à $\frac{ddx}{V(dy^2 + dx^2)} = \frac{m dy}{y}$, ou (intégrant par logarith.)

$$l(dx + \sqrt{dy^2 + dx^2}) - l dy = mly - mlA, \text{ ou, passant aux nombres,}$$

$$dx + \sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy, \text{ ou } \sqrt{dy^2 + dx^2} = y^m A^{-m} dy - dx, \text{ ou}$$

$$dy^2 + dx^2 = y^{2m} A^{-2m} dy^2 - 2y^m A^{-m} dy dx + dx^2, \text{ ou } dy = A^{-2m} y^{2m} dy - 2A^{-m} y^m dx, \text{ ou}$$

$$dx = \frac{1}{2} A^{-m} y^m dy - \frac{1}{2} A^m y^{-m} dy, \text{ ou enfin } x = \frac{1}{2m+1} A^{-m} y^{m+1} + \frac{1}{2m-1} A^m y^{-m+1} + B.$$

Ou dans le cas $m=1$, $x = \frac{1}{4} A^{-1} yy - \frac{1}{2} A ly + C$. »

Il aboutit à démontrer que la courbe de poursuite admet, dans le cas $m = \frac{v_2}{v_1} > 1$, une équation de la forme :

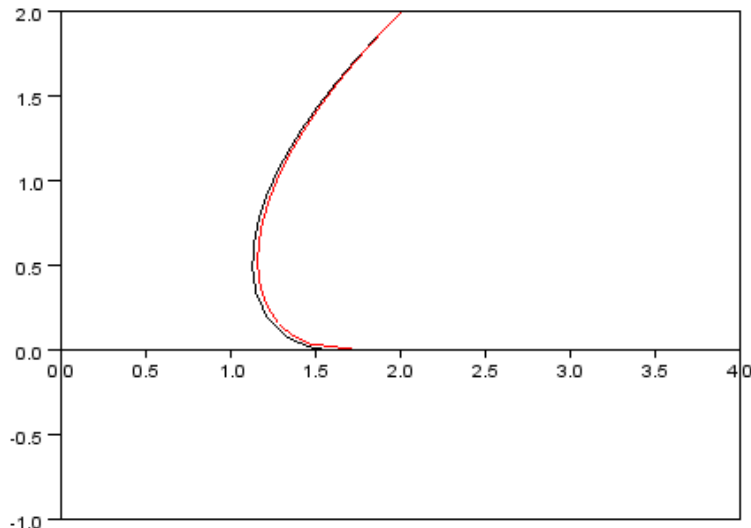
$$x = \frac{1}{2(m+1)} y^{m+1} + \frac{1}{2(m-1)} y^{-m+1} + B$$

où α et B sont deux constantes réelles à déterminer ($\alpha = A^m = A^m$ dans le texte en vis-à-vis).

En ajoutant, par exemple, les lignes suivantes (dans le cas : $N_0(2,2)$, $V_0(2,2)$, et $m=2/3$) aux codes précédents :

Code Scilab
<pre> function x=f(y) m=2/3 a=.6575230441 b=1.794112548 x=1/(2*(m+1)*a)*y^(m+1)+a/(2*(m-1))*y^(-m+1)+b endfunction y=linspace(0,2,50) x=f(y) plot2d(x,y,[5],axesflag=0,rect=[0,-1,4,2]) </pre>

Nous obtenons en sortie graphique :

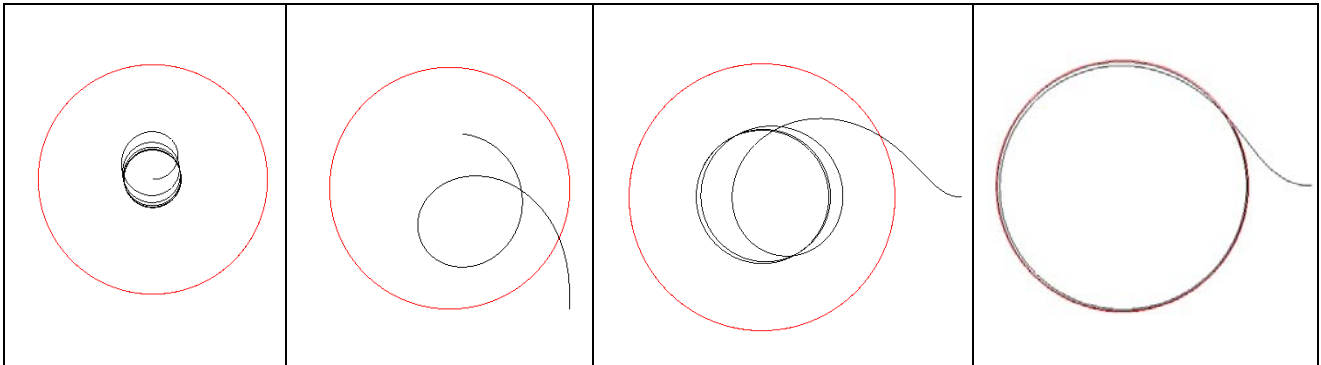


Graphique qui nous permet d’apprécier visuellement la qualité des approximations.

Bien d’autres exemples d’utilisation de fonctionnalités avancées, telles que des animations, auraient pu être présentées ici. Mais celles présentées couvrent déjà une part importante des programmes de lycée, à l’exception des probabilités et statistiques qui feront l’objet d’un prochain article.

Pour conclure, et pour le plaisir, un bon moyen de savoir si on a bien compris un algorithme ou assimilé un langage informatique est de le modifier : dès lors, quelle

serait l'allure d'une courbe de poursuite si le vaisseau poursuivi admet une trajectoire circulaire ?



Dans chacun de ces quatre cas, les courbes de poursuites ont été tracées pour différentes positions de départ du poursuivant et différents rapports de vitesses.

Bibliographie et sitographie :

- Mémoires de mathématiques et de physique de l'Académie Royale des Sciences, 1732 (disponible sur le site Gallica de la B.N.F.).
- A curve of pursuit, The American Mathematical Monthly, Vol. 28, N°2 (1921)
- The curve of pursuit, The Mathematical Gazette, Vol. 37 N°322 (décembre 1953)
- www.mathcurve.com.

Origami : construction d'un l'heptagone régulier

Michel LAFOND,
mlafond001@yahoo.fr

Résumé : Une approche mathématique de l'origami. De nombreuses applications en géométrie (classique ou analytique) en découlent. Elles sont de tout niveau : depuis les constructions de base jusqu'à la trisection de l'angle ou la résolution des équations de degré 4.

Mots clés : origami, heptagone, construction, bissectrice, médiatrice, trisectrice, Gauss, Fermat, Huzita.

La géométrie euclidienne est la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être "construit" à l'aide de ces deux instruments. Mais à l'époque la notion de nombre était floue. Avec la notion moderne de nombres réels, on s'aperçoit qu'Euclide avait largement tort, car les grandeurs que l'on sait construire à la règle et au compas à partir d'une grandeur unité donnée forment un ensemble dénombrable, soit une goutte d'eau dans l'océan des nombres réels.

1. Rappel

Rappelons un résultat bien connu dû à Gauss :

Théorème de Gauss-Wantzel. Un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Un nombre premier est dit de Fermat s'il est de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$ pour un certain entier naturel k .

Georg Mohr (1672) et Lorenzo Mascheroni (1797) prouveront que toute construction à la règle et au compas peut se réaliser au compas seul.

Les nombres premiers de Fermat sont : 3, 5, 17, 257, 65537, --- ?

On ne connaît aujourd'hui que les cinq nombres de Fermat ci-dessus, obtenus pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

On sait qu'il n'en existe pas pour $5 \leq k \leq 32$ (F_k a été prouvé composé). On ignore le statut de F_{33} .

Ainsi, les polygones constructibles à la règle et au compas sont ceux ayant n côtés pour $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 16, 17, 20 \dots\}$.

Le cas $n = 7$ est donc le plus petit obstacle à la construction d'un polygone régulier, basée uniquement sur la règle et le compas.

2. L'origami en renfort

Mais il n'y a pas que la règle et le compas, il y a aussi l'origami ! Ce n'est pas un instrument, seulement une technique de pliages. Technique très puissante, car elle permet, à partir d'une grandeur unité donnée, de construire tout ce qu'on sait faire avec une règle et un compas et bien d'autres choses dont la construction de l'heptagone régulier ou, si l'on préfère, le partage d'un disque en 7 parts égales, ce qui, au passage, résout le délicat problème du partage en 7 de la pizza si on ne chipote pas trop sur l'équité répartition des olives.

Notre but est donc d'obtenir à partir d'une feuille de papier uni sans aucun tracé initial, un heptagone régulier convexe.

Il faut évidemment préciser ce qui est autorisé comme pliages. Nous ferons référence au formalisme de Huzita qui accepte 6 sortes de plis.

Une feuille de papier, vierge de tout tracé, étant donnée, on n'acceptera que les six pliages ci-dessous où le pli sera toujours un double trait p .

Quand on dit qu'une droite l est donnée, on entend par-là qu'un pliage antérieur a été fait selon le pli l .

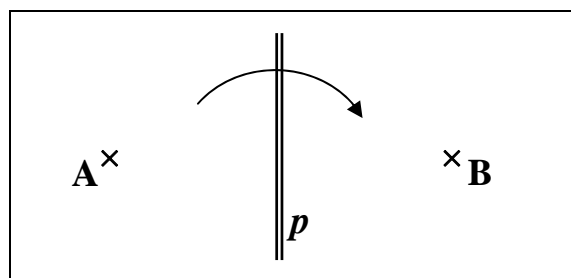
De même, quand on dit qu'un point A est donné, on entend par-là que A est l'intersection de deux plis antérieurs.

Pour les constructions, c'est la même chose : on ne peut construire une droite que par pliage et un point par intersection de deux pliages.

Voici les six sortes de pliages autorisés :

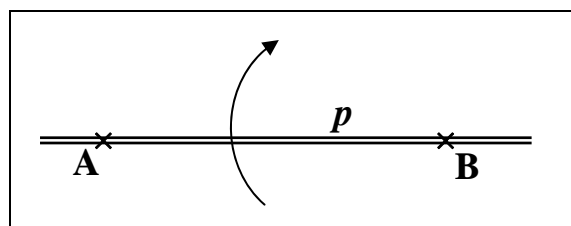
P1 : Amener un point A donné sur un point B donné.

C'est la construction de la **médiatrice** du segment [AB] donné.



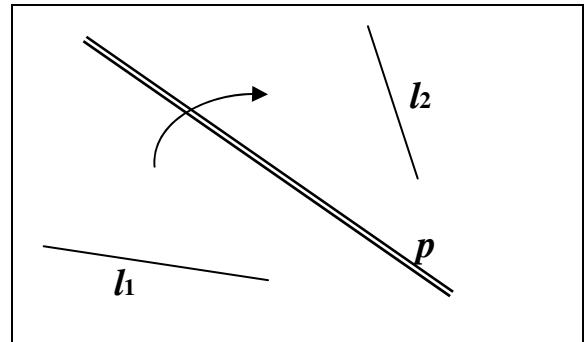
P2 : Plier selon deux points A, B donnés.

C'est la construction de la **droite** (AB).



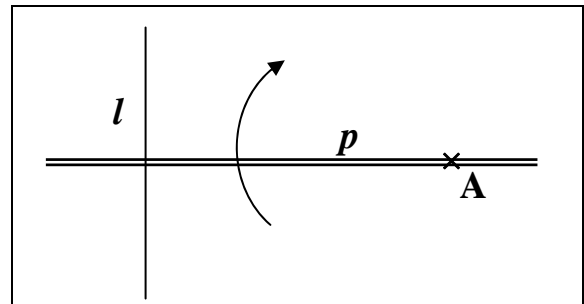
P3 : Amener une droite l_1 donnée sur une autre droite l_2 donnée.

C'est la construction de l'axe de symétrie de deux droites, donc de la **bissectrice** de deux droites.



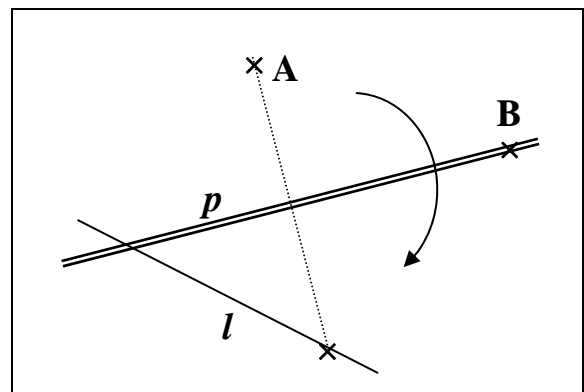
P4 : Plier une droite l sur elle-même par un pli passant par un point A donné.

C'est la construction de la **projection orthogonale** d'un point sur une droite. On dispose donc d'une **équerre virtuelle**.



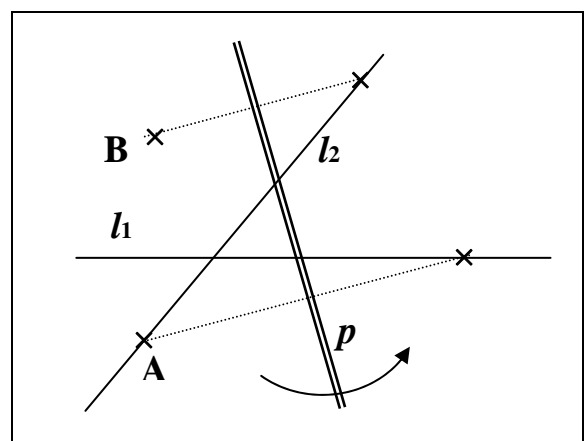
P5 : Amener un point A donné sur une droite l donnée par un pli qui passe par un autre point B donné.

P5 permettra la "construction" de la racine carrée.



P6 : Amener simultanément un point A et un autre point B donnés respectivement sur une droite l_1 et une autre droite l_2 données.

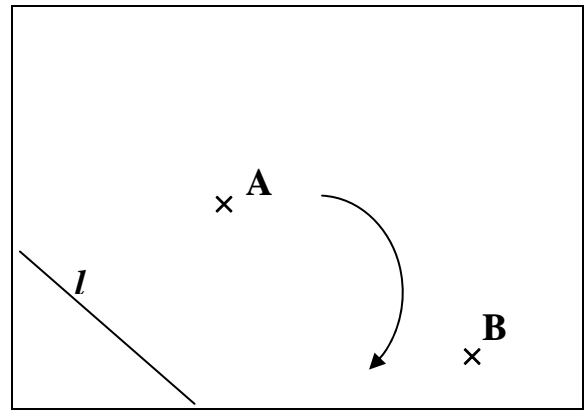
C'est une construction très puissante qui est la clé pour la construction de l'heptagone.



Remarque :

Si, P1, P2, P3, P4 sont toujours réalisables, ce n'est pas le cas de P5 comme on le voit ci-contre, car le symétrique de A par rapport au pli supposé n'est pas sur la feuille. C'est vrai aussi pour P6.

Ceci n'est pas gênant puisqu'on va voir que les déplacements (translations, rotations) de segments sont réalisables par pliages.



3. Opérations géométriques réalisables par origami.

3.1 Le déplacement

Il est essentiel de pouvoir reporter une longueur donnée (par un segment $[AB]$) n'importe où sur la feuille, disons en $A'B'$ où A' est donné ainsi que la direction (orientée) $\Delta = A'B'$.

On suppose évidemment que l'extrémité B' est sur la feuille.

On a besoin pour cela de quelques opérations élémentaires :

D'abord, P1 et P2 permettent en deux pliages d'obtenir le milieu d'un segment $[AB]$ quelconque.

Ensuite, on peut obtenir en cinq pliages le symétrique d'un point par rapport à un autre point. Mais attention, ce n'est pas si simple. Voir la figure 1 ci-dessous.

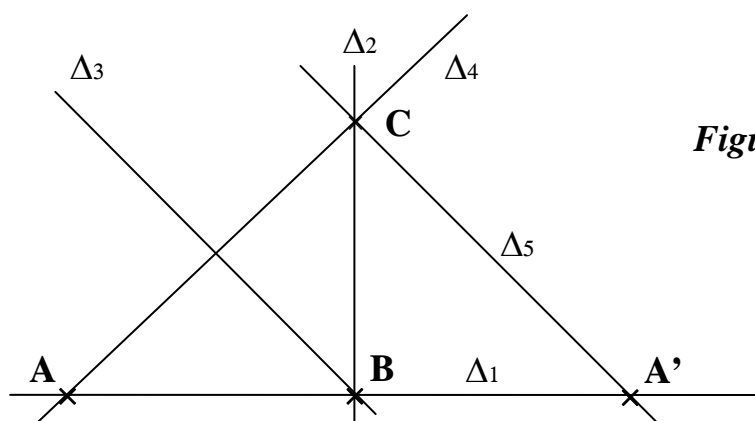


Figure 1

A et B étant donnés distincts, On commence par construire la droite $\Delta_1 = (AB)$ et la perpendiculaire Δ_2 à (AB) passant par B. Mais ce dernier pliage ne construit pas le symétrique A' de A par rapport à B car il n'est pas permis de "décalquer" un point ou une droite. [Essayez pour voir]. Rappelons qu'un point n'est dit construit que s'il est obtenu par l'intersection de deux pliages.

On continue ainsi : on construit la bissectrice Δ_3 de (Δ_1, Δ_2) puis la perpendiculaire Δ_4 à Δ_3 passant par A. On obtient le point $C = \Delta_2 \cap \Delta_4$.

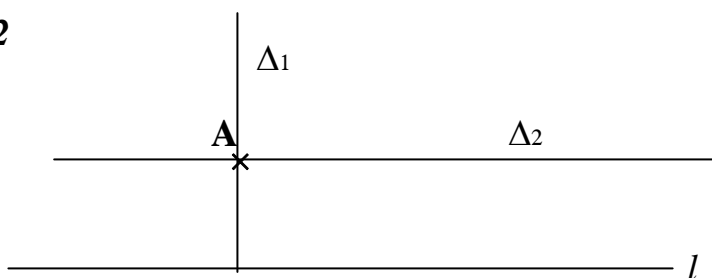
Enfin, la perpendiculaire Δ_5 à Δ_4 passant par C donne $A' = \Delta_1 \cap \Delta_5$ qui est le symétrique de A par rapport à B.

On peut construire en deux pliages la parallèle à une droite donnée l passant un point donné A (extérieur à l) [Figure 2] :

Pour cela, on construit simplement la perpendiculaire Δ_1 à l passant par A puis la perpendiculaire Δ_2 à Δ_1 passant par A.

La construction origamique de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné aurait ravi Euclide, mais les papyrus de l'époque ne devaient pas être commodes pour l'origami.

Figure 2



Pour effectuer un déplacement de segment, huit pliages suffisent. Examinons la figure 3 ci-dessous dans laquelle il s'agit de reporter AB sur la droite Δ donnée avec A' pour origine et A'B' dans la direction indiquée.

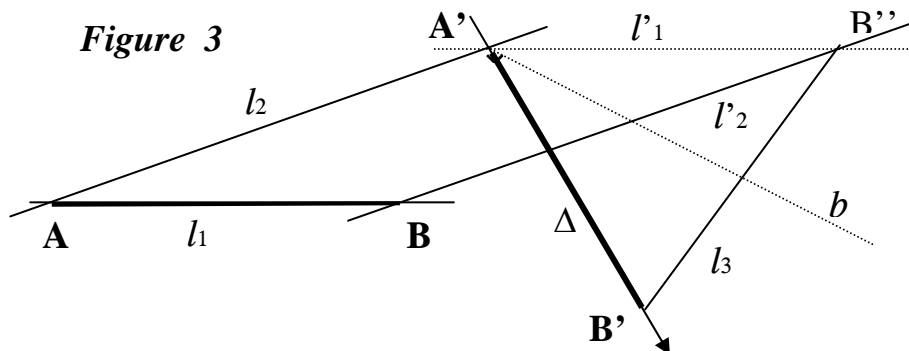
On construit la droite $l_1 = (AB)$ et la droite $l_2 = (AA')$.

Ensuite on construit la parallèle l'_1 à l_1 passant par A' et la parallèle l'_2 à l_2 passant par B. Le point $B'' = l'_1 \cap l'_2$ est maintenant connu.

On construit la bissectrice b de (Δ, l'_1) [celle des deux bissectrices qui nous intéresse en fonction de la direction imposée] et la perpendiculaire l_3 à b passant par B''.

$B' = \Delta \cap l_3$ est l'extrémité cherchée puisque $AB = A'B'' = A'B'$.

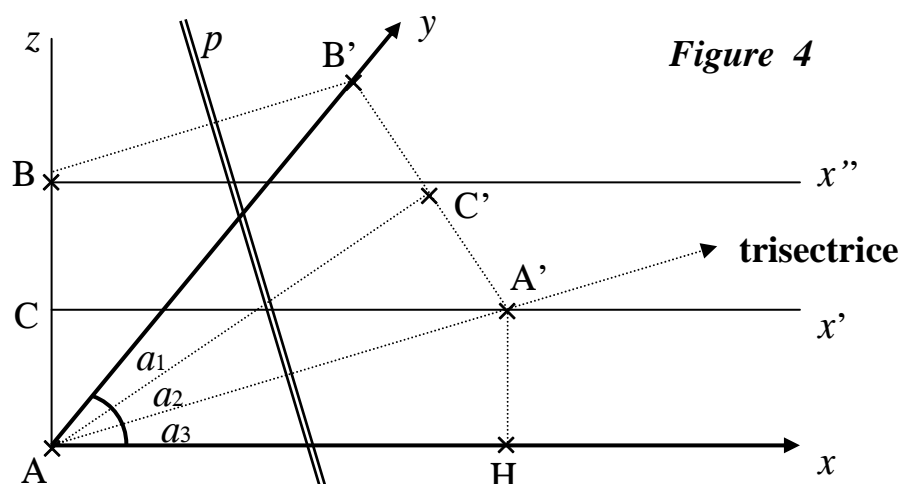
Figure 3



3.2 La trisection.

Une dernière opération géométrique nous sera nécessaire pour la suite, c'est la trisection de l'angle (célèbre problème qui a fait transpirer des générations de mathématiciens !).

Soit à trisecter l'angle aigu $(Ax ; Ay)$ de la figure 4 ci-dessous.



On construit la perpendiculaire (Az) à (Ax) et deux parallèles (Cx') et (Bx'') à (Ax) telles que $AC = CB$.

P6 permet d'obtenir par le pli p , l'envoi simultané du point A sur A' de la droite (Cx') et du point B sur B' de la droite (Ay) . H est la projection de A' sur (Ax) .

C , milieu de $[AB]$, est envoyé par symétrie sur C' , milieu de $[A'B']$.

Les triangles $(AA'C')$ et $(AC'B')$ sont égaux ce qui implique $a_1 = a_2$ et les égalités des triangles (CAA') et (HAA') d'une part et (CAA') et $(AA'C')$ d'autre part impliquent celle des triangles (HAA') et $(AA'C')$ d'où $a_2 = a_3$.

Huit plis ont suffi (5 pour obtenir B , 1 pour Bx'' et 2 pour p et AA').

L'affaire est réglée pour les angles aigus α , et pour trisecter un angle obtus

$\beta = \alpha + \pi / 2$, il suffit de remarquer que $\frac{\beta}{3} = \frac{\alpha + \pi/2}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}$ ramène le problème au cas de l'angle aigu.

[L'angle $\pi / 6$ se construit à partir du triangle rectangle $(1, \sqrt{3}, 2)$ où $\sqrt{3}$ s'obtient par la construction de la figure 5 expliquée dans le paragraphe 4].

4. Opérations numériques réalisables par origami

On dit que l'opération $x \mapsto f(x)$ est réalisable si, un segment de longueur x étant donné, on peut obtenir par origami un autre segment de longueur $f(x)$.

Sont réalisables les opérations αx où α est un rationnel positif quelconque, $1/x$, \sqrt{x} , $\sqrt[3]{x}$.

Sont également réalisables à partir de deux grandeurs x et y données, les opérations :

$x + y$; $x - y$; $x \times y$; x / y ; $\sqrt{x \cdot y}$ dans le cas où un segment de longueur x et un segment de longueur y sont donnés. Voyons comment :

Si n est un entier naturel positif, $n x$ s'obtient naturellement en reportant n fois le segment de longueur x sur une droite, et si $\alpha = p / q$ est un rationnel $\alpha x = p x / q$ s'obtient par division (Voir plus loin).

Les figures 5 ci-dessous montrent comment obtenir \sqrt{x} si $x \geq 2$.

Figure 5

Construction de \sqrt{x}

si $2 < x < 4$

Dans les deux figures :

$AB = BC = x / 2$

$CD = x / 2 - 1$

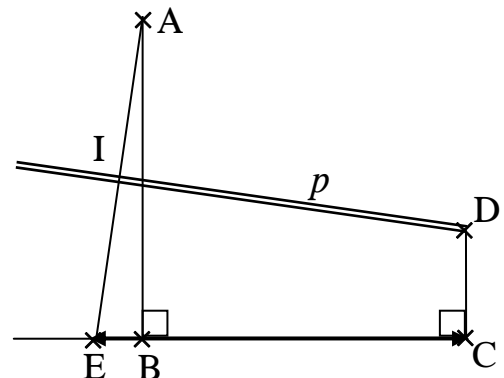
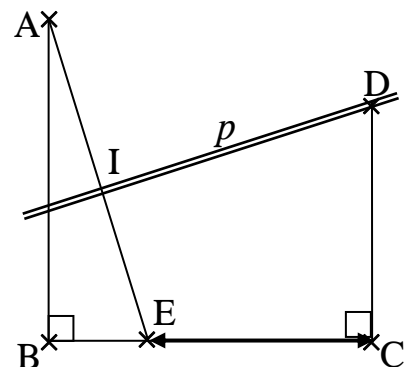


Figure 5 bis

Construction de \sqrt{x}

si $x > 4$



On part du repère (B, BC, BA) avec $BC = BA = x / 2$ et on construit CD , parallèle à BA et de même sens avec $CD = x / 2 - 1$ (positif car $x > 2$).

Le pli de type P5 suivi du pli perpendiculaire (AI) permettent d'obtenir le symétrique E de A par rapport à p . E est sur la droite (BC).

E a donc les coordonnées E ($t, 0$) avec $t < 0$ si $x < 4$ et $t > 0$ si $x > 4$.

En effet, le cas $t = 0$ correspond au cas $x = 4$ pour lequel p est parallèle à BC.

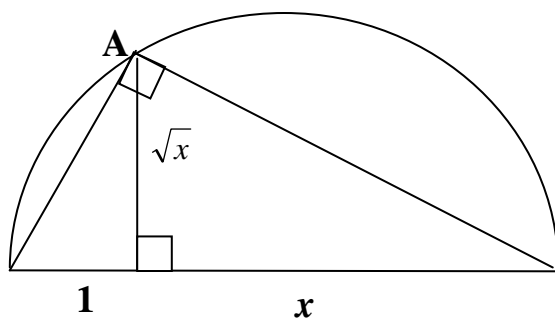
En écrivant que ID est perpendiculaire à IE, on obtient l'équation :

$$4t^2 - 4tx + x^2 - 4x = 0 \text{ qui a deux solutions } t = x/2 \pm \sqrt{x}.$$

Seule $t = x/2 - \sqrt{x}$ convient (car $t < 0$ si $x < 4$ et $t > 0$ si $x > 4$), ce qui entraîne dans les deux cas : $EC = x/2 - t = \sqrt{x}$.

Obtenir \sqrt{x} si $x = 2$ ou si $0 < x < 2$, est un bon exercice.

Attention ! La figure ci-dessous qui donne bien \sqrt{x} n'est pas réalisable par pliage [Comment est obtenu le point A ?] à moins de disposer d'un cercle tracé sur la feuille de travail, ce qui n'est pas le cas.

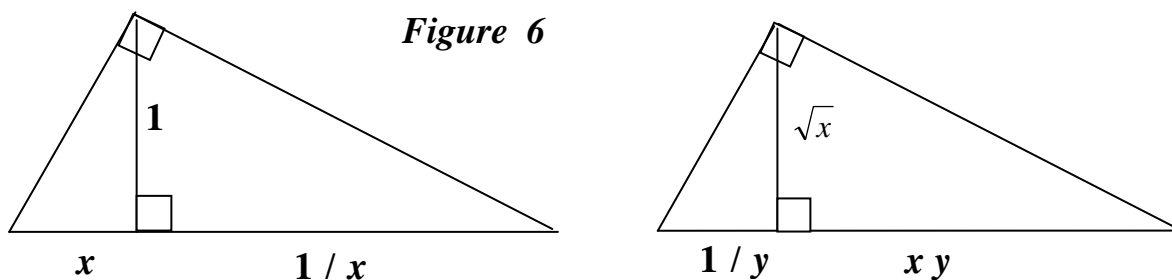


$x + y$; $|x - y|$ s'obtiennent par déplacement de segments sur une même droite.

La construction de $\sqrt[3]{x}$ n'est pas nécessaire à la construction de l'heptagone.

C'est aussi un bon exercice, mais moins facile. (Il faut utiliser P6).

Le produit et l'inverse (donc le quotient) s'obtiennent facilement à partir des propriétés du triangle rectangle (Figure 6 ci-dessous dans laquelle aucun cercle n'est nécessaire).



On peut enfin aborder :

5. La construction de l'heptagone

Ce n'est plus qu'une question de calcul.

Si on réussit à calculer à partir d'un segment quelconque (dont la longueur est prise pour unité) la quantité disons $s = \sin(\pi/7)$, l'affaire sera réglée et même pliée.

En effet : la connaissance de s donc de $c = \sqrt{1-s^2}$ permet l'obtention d'un angle de mesure $\pi/7$ qui donnera par duplication l'heptagone régulier.

Pour cela il suffit de trouver une expression de s ne faisant intervenir que les opérations ordinaires, racine carrée comprise.

Partons de la relation $\sin(3\pi/7) = \sin(4\pi/7)$ qui entraîne

$3s - 4s^3 = 4sc - 8s^3c$ ou encore $3 - 4s^2 = 4c - 8s^2c = 4c(1 - 2s^2)$ qui, après élévation au carré donne :

$$(3 - 4s^2)^2 = 16c^2(1 - 2s^2)^2 \text{ c'est-à-dire } (3 - 4s^2)^2 = 16(1 - s^2)^2(1 - 2s^2)^2$$

$$\text{soit en développant : } 64s^6 - 112s^4 + 56s^2 - 7 = 0 \quad (1)$$

On pose $x = s^2$ pour avoir

$$64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 = 0 \quad (2)$$

On élimine traditionnellement le terme en x^2 en posant $y = x - 7/12$ ce qui mène après division des deux membres par 64 à la forme standard

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

où $p = -252/1728$ et $q = 7/1728$.

Le discriminant $27q^2 + 4p^3$ étant négatif, on utilise la méthode trigonométrique en posant :

$$y = \lambda \cos(t) \text{ avec } \lambda = \sqrt{-\frac{4p}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{6} \quad (4)$$

(3) et (4) donnent alors $y^3 + py + q = \lambda^3 \cos^3(3t) + \lambda p \cos(t) + q = 0 \quad (5)$

La linéarisation $4 \cos^3(3t) = \cos(3t) + 3 \cos(t)$ transforme (5) en

$$\cos(3t) = -\frac{4q}{\lambda^3} = -\frac{\sqrt{7}}{14} \quad (6)$$

Les solutions à 2π près de (6) sont

$$t = \frac{\theta + 2k\pi}{3} \text{ où } \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right) \text{ et } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ici, $\theta \approx 1,761$ donc les solutions de (6) sont

pour $k = 0$ $t \approx 0,587$ donc $y = \lambda \cos(t) \approx 0,367$

pour $k = 1$ $t \approx 2,681$ donc $y = \lambda \cos(t) \approx -0,395$

pour $k = 2$ $t \approx 4,776$ donc $y = \lambda \cos(t) \approx 0,028$

Puisque $y = x - 7/12 = s^2 - 7/12 = \sin^2(\pi/7) - 7/12 \approx -0,395$ il n'y a aucun doute, c'est la deuxième solution ($k = 1$) qui convient c'est-à-dire

$$y = \lambda \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right).$$

Résumons :

$$s = \sin (\pi / 7) = \sqrt{\frac{\sqrt{7}}{6} \cos \left(\frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{7}}{14} \right) + 2\pi \right] \right) + \frac{7}{12}} \quad (7)$$

Mais est-ce que tout ceci est constructible ?

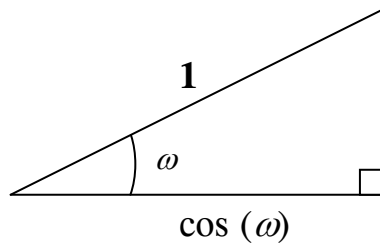
La présence de π semble rédhibitoire, mais le calcul de

$$\omega = \frac{1}{3} \left[\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{7}}{14} \right) + 2\pi \right] = \frac{\theta + 2\pi}{3}$$

ne représente en fait que la trisection de l'angle $\theta + 2\pi$ donc la trisection de l'angle obtus θ .

On a vu dans 3-2 que c'était réalisable.

Quant au terme $\gamma = \cos \omega$, il s'obtient par projection d'un segment unité dans un triangle approprié :



Les autres opérations de l'expression (7) sont banales.

6. La construction dans le détail.

Prenons la formule (7) sous la forme :

$$6s = 6 \sin (\pi / 7) = \sqrt{6\sqrt{7} \gamma + 21} \quad \text{où} \quad \gamma = \cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{7}}{14} \right) \quad (8)$$

Les figures de 7 à 13 ci-dessous montrent comment obtenir dans l'ordre :

$-\cos (\theta)$; $\sin (\theta)$; θ ; $(\pi - \theta) / 3$; $|\gamma|$; $3|\gamma|\sqrt{7}$; $3\gamma\sqrt{7} + 21$;
 $6s$; $(6s)^2$; $(2s)^2$; $2 \cos (\pi / 7)$; $2 \sin (\pi / 7)$ et enfin $\pi / 7$.

Il faut évidemment avoir lu ce qui précède pour comprendre ce qui se passe.

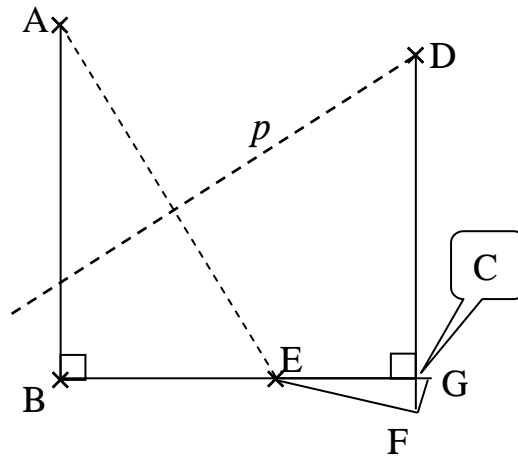
Dans la figure 7 ci-contre :
 $AB = BC = 14$ $CD = 13$

Les plis p (de type P5) et
 AE (de type P4) donnent E
 Sur $[BC]$ avec $EC = 2\sqrt{7}$

$CF = 1$ et $EF \perp FG$

$$CG = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} = -\cos(\theta) \approx 0,189$$

Figure 7



Dans la figure 8 ci-contre :
 $AB = BC = 42$ $CD = 41$

$AB \perp BC$ $BC \perp CD$
 Les plis p (de type P5) et
 AE (de type P4) donnent E
 Sur $[BC]$ avec $EC = 2\sqrt{21}$

$CF = 3$ et $EF \perp FG$

$$CG = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{27}{28}} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin(\theta) \approx 0,982$$

Figure 8

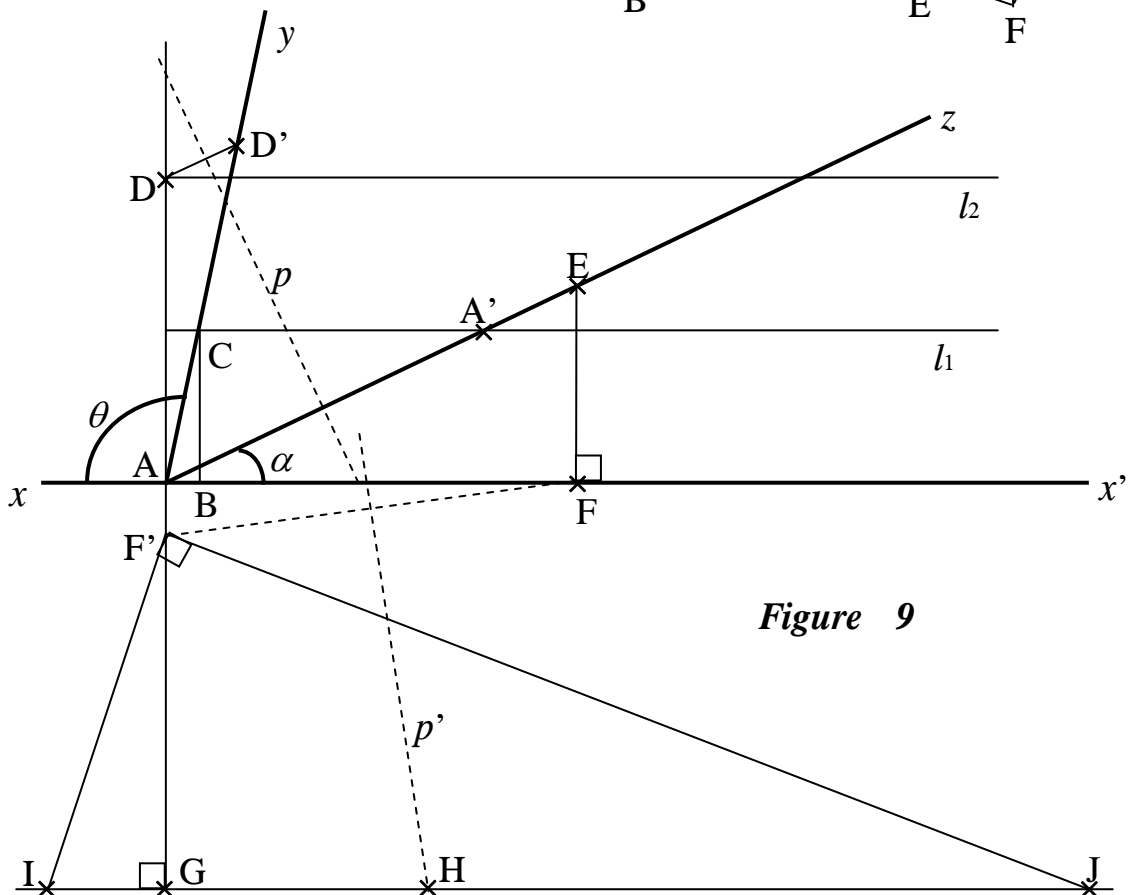
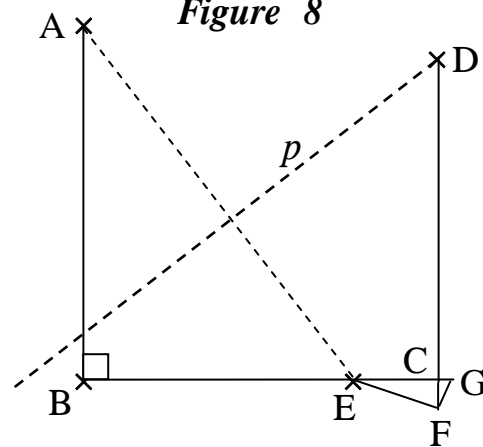


Figure 9

Les explications concernant la figure 9 ci-dessus sont les suivantes :

$$AB = -2 \cos (\theta) \quad (\text{quantité positive})$$

$$BC = 2 \sin (\theta) \quad AB \perp BC \quad \text{donc } (Bx, By) = \theta$$

$$AD \perp (xx') \quad AD = 2 BC$$

l_1 est la parallèle à (xx') passant par C, l_2 est la parallèle à (xx') passant par D.

Le pli p (de type P6) qui envoie A sur $A' \in l_1$ et D sur $D' \in (Ay)$ donne la trisectrice Az du supplémentaire de θ .

$$\text{Donc } \gamma = \cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} - \pi \right) = -\cos \left(\frac{\pi - \theta}{3} \right) = -\cos (\alpha) \quad \text{où}$$

$$\alpha = (Bx', Bz).$$

$$AE = 3 \quad EF \perp (xx') \quad \text{donc} \quad AF = 3 \cos (\alpha) = 3 |\gamma|$$

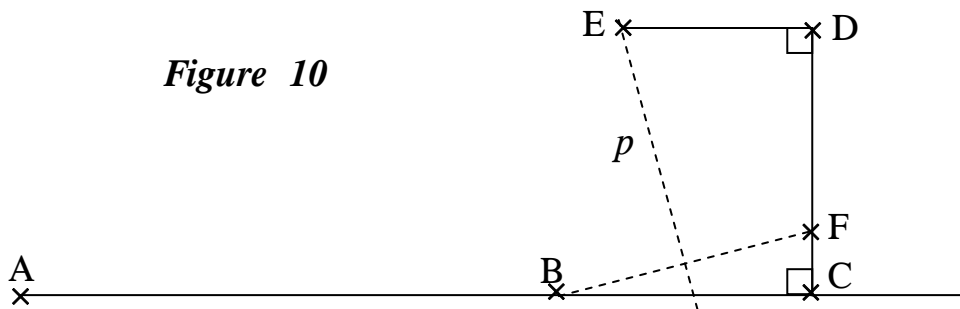
$$AG = AF \quad GH = AF - 1 = 3 |\gamma| - 1.$$

Le pli p' (de type P5) suivi de la perpendiculaire à p' passant par F donne F' sur (AG) tel que $F'G = \sqrt{6} |\gamma|$.

$$GI = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad [\text{C'est 4 fois la valeur CG de la figure 7}]$$

$$F'J \perp F'I \quad \text{donc} \quad GJ = 3 |\gamma| \sqrt{7}.$$

Figure 10



Dans la figure 10 ci-dessus, $AB = 3 |\gamma| \sqrt{7}$ (Le GI de la figure 9) $AC = 21 / 2$

$$\text{Donc } BC = 3 \gamma \sqrt{7} + \frac{21}{2} \quad (\text{en effet } \gamma < 0)$$

$$CD = CB \quad \text{et} \quad DE = BC - 1.$$

Le pli p (de type P5) suivi de la perpendiculaire à p passant par B donne F sur (CD)

$$\text{tel que } FD = \sqrt{6\sqrt{7} \gamma + 21} = 6 s = 6 \sin (\pi / 7).$$

Dans la figure 11 ci-contre :

$AB = BC = 3s$
 (La moitié de la quantité précédente).

$CD = 3s - 1$

Le pli p (de type P5) et la
 perpendiculaire à p passant par A

donne E tel que $CE = \sqrt{6} s$

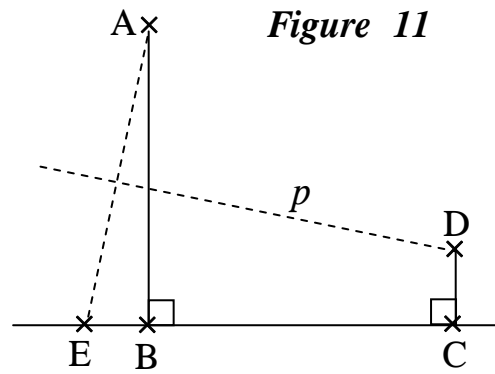


Figure 11

Dans la figure 12 ci-contre :

$AB = 1$ $AC = 6s$
 Donc $AD = 1 / 6s$.

$AE = \sqrt{6} s$ [obtenu dans la figure 11]

Donc $AF = (6s)^2$.

Figure 12

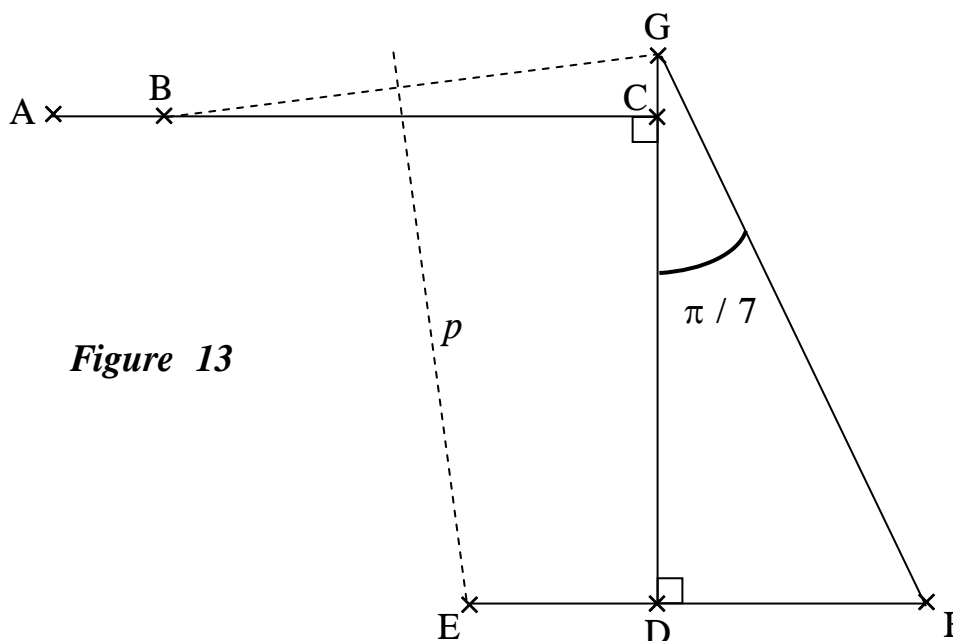
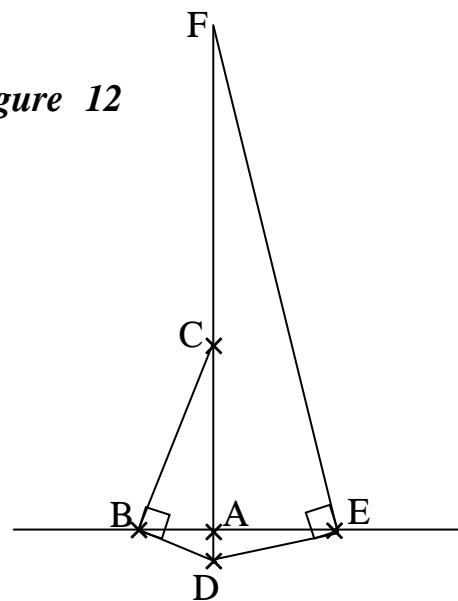


Figure 13

Dans la figure 13 ci-dessus :

$AB = 2s^2$ (Le 18^{ème} de la grandeur AF obtenue dans la figure 12)

$AC = 2$ donc $BC = 2 - 2s^2$

$CD = CB$ $DE = BC - 1 = 1 - 2s^2$.

Donc le pli p (de type P5) suivi de la perpendiculaire à p passant par B donne G tel que $DG = \sqrt{4 - 4s^2} = 2\sqrt{1 - s^2} = 2 \cos(\pi/7)$

$DF = 2 \sin(\pi/7)$ [le tiers de $6 \sin(\pi/7)$ qui a été obtenu dans la figure 10]

$DF = 2 \sin(\pi/7)$, $DG = 2 \cos(\pi/7)$ donc DGF a bien pour mesure $\pi/7$.

Un conseil : si vous utilisez ce qui précède pour diviser votre pizza en 7, n'utilisez pas la pizza comme espace de travail, surtout si elle est encore chaude. Prenez une feuille de papier, effectuez la centaine de pliages indiqués, et l'angle DGF de mesure $\pi/7$ vous fournira un gabarit incontestable pour une demi-part.

Sitographie :

C'est en lisant [Novembre 2011] l'article de WIKIPEDIA Mathématiques des origamis affirmant sans démonstration que l'origami permettait entre autres la construction de l'heptagone, que j'ai eu envie de creuser le problème. Parce que si on croit tout ce qu'on lit sur Internet...

En tapant ORIGAMI HEPTAGONE dans les moteurs de recherche, on tombe sur des tas de sites intéressants. On y trouvera la mention d'une septième sorte de plis proposée par Koshire Hatori.

Perspectives d'un cercle (partie 2)

Marie-Noëlle Racine mnracine@orange.fr
Alain Mascret, collègue, Gevrey-Chambertin,
mascret@ac-dijon.fr
Groupe Math et Arts de l'IREM de Dijon

Résumé : Comment représenter un cercle en perspective centrale (linéaire) ou en perspective cavalière. Quelques exemples au musée des Beaux-Arts de Dijon.

Cet article est publié en deux parties, perspective cavalière (partie 1) dans le numéro 121 de la *Feuille de Vigne* ; perspective centrale, ou linéaire (partie 2) dans ce numéro 122 de la *Feuille de Vigne*.

Mots clés : Perspective cavalière, perspective centrale, GeoGebra, geowiki, art et maths, perspective linéaire, cercle, perspective, sphère.

Chaque année, le groupe « math et arts » organise une journée musée. Le thème de la dernière, en mai 2011, était la perspective des corps ronds. Cet article reprend la méthode de représentation d'un cercle, présentée par Marie-Noëlle Racine le matin. Nous l'illustrerons par quelques tableaux du musée des Beaux-Arts de Dijon, présentés par Liliane Boccacio-Lecler lors de la visite commentée l'après-midi au musée.

Vous retrouverez la plupart des figures de cet article sur geowiki, le site du groupe « géométrie dynamique », plus précisément à la page :

http://geowiki.u-bourgogne.fr/doku.php?id=activites:perspective_d_un_cercle

Vous pourrez y refaire les constructions pas à pas. Chaque instruction du logiciel GeoGebra est commentée.

Les photos de tous les tableaux, insérées dans cet article, ont été faites sans flash et sans pied-photo au musée des Beaux Arts de Dijon (MBAD) par Marie-Noëlle Racine. Elles sont publiées au titre de la formation d'enseignants, sans but lucratif ou commercial et ne peuvent en aucun cas être copiées ou reproduites, par quelque moyen que ce soit, à titre commercial, sans autorisation préalable de leur auteure et du musée des Beaux Arts de Dijon.

2. Perspective centrale (ou linéaire) : (figure 14)

2.1 Sur chaque face visible d'un cube, nous allons dessiner un cercle tangent aux quatre arêtes.

Méthode de construction :

Sur la face ABCT, située dans un plan frontal, le cercle \mathcal{C} de centre N est en vraie grandeur, sans déformations.

Les représentations des cercles sur les autres faces du cube sont des transformations géométriques de ce cercle \mathcal{C} de centre N. Il s'agit d'homographies (voir des précisions en fin d'article).

Appelons \mathbf{T} la transformation qui fait passer de \mathcal{C} à son image \mathcal{C}' sur la face ATKI.

Construisons \mathcal{C}' point par point.

Pour tout point P du cercle \mathcal{C} , traçons la droite (PQ) parallèle à (AB) passant par P, avec Q sur [AT].

Pour obtenir le point E (image de P par \mathbf{T}), construisons les images des droites (NP) et (PQ) par la transformation \mathbf{T} .

(QP) étant parallèle à (AB), son image (d) dans la face ATKI passe par le point Q et par le point de fuite principal F.

(NP) coupe (AT) en R. L'image de (NP) est (RO) où O est le point d'intersection des diagonales de ATKI.

E est l'intersection de (RO) et (d).

À tout point P du cercle \mathcal{C} de centre N correspond bien un point E sur la face ATKI (et de la même manière, un point E' sur la face ABJI).

La représentation du cercle \mathcal{C}' tracé sur la face ATKI est le lieu des points E quand P décrit le cercle \mathcal{C} .

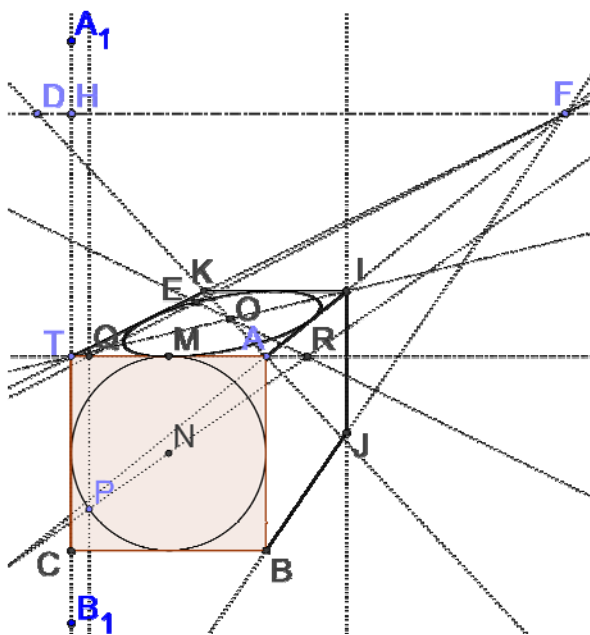


Figure 14

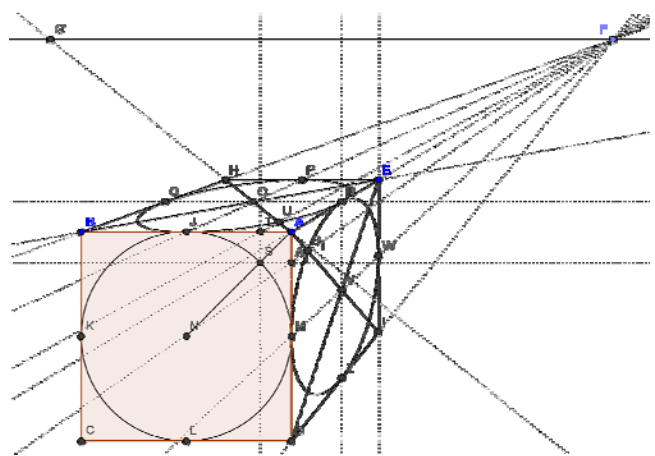


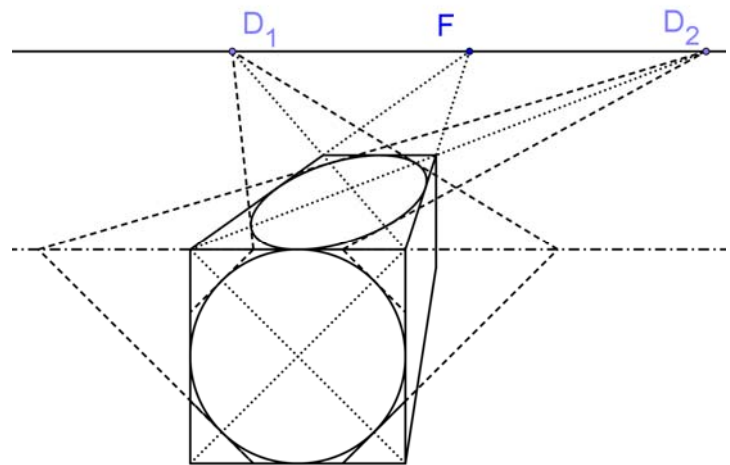
Figure 14 bis

Notons :

1)

aux points d'intersection de C avec les diagonales $[AC]$ et $[BT]$ de $ABCT$, les tangentes à C sont parallèles, respectivement aux diagonales $[BT]$ et $[AC]$. Ainsi, les tangentes à la représentation de C' aux points d'intersection avec les diagonales $[AT]$ et $[TI]$ passent, respectivement, par les points de distances D et D' (voir figure 15).

Figure 15



2) la représentation de C' est une conique qui peut être ellipse, parabole, hyperbole selon les positions relatives de l'observateur, du cercle à représenter et du plan du tableau (voir figure 16).

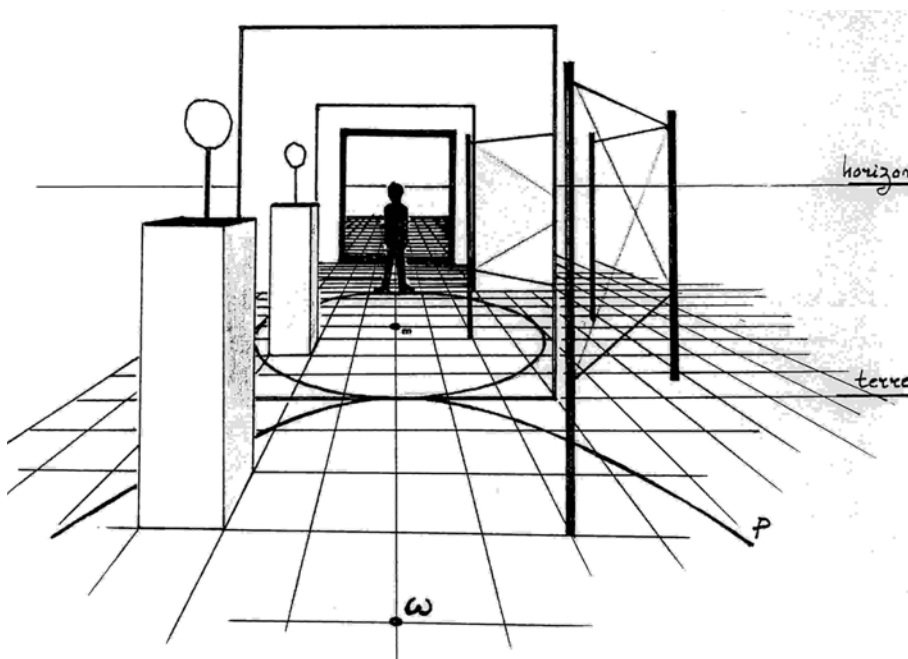


Figure 16

réalisée par Dominique Estève, *Perspectives*, IREM Dijon, 1998

On a installé une glace sur le tableau.

L'observateur se voit dans la glace. On constate qu'il est debout sur le bord d'un disque.

Le dessin du cercle est donc ici une parabole \mathcal{P} .

Avec un observateur à l'intérieur du cercle, la conique \mathcal{P} serait une hyperbole.

Les axes de cette conique ne sont généralement pas parallèles aux arêtes de la face ATKI (voir *figure 17*) et le centre C' de la conique, n'est pas le point O , centre de la face supérieure, image de N .

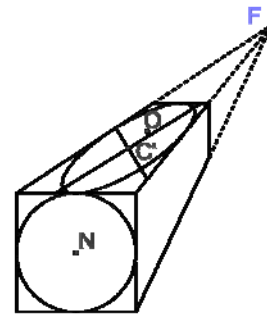


Figure 17

3) certains logiciels comme GeoGebra peuvent tracer la conique représentant C' à partir de 5 points. Cette possibilité sera notamment utilisée pour tracer les contours de représentations d'objets ronds sur des photos d'œuvres d'art (voir *Figures 19 et 20*)

Figures 18 et 19

Zabobi di Machiavelli, *Le couronnement de la Vierge*, 1473
 MBAD, © Photo MN. Racine, tracés A. Mascret.



Figure 18 :
 recherche du point de fuite principal et des points de distance.



Figure 19 :
les auréoles des anges sont de parfaites ellipses



Figure 20
Le Maître des Ronds de Cobourg, (actif à Strasbourg, fin XV^e),
Retable de sainte Marguerite, MBAD
© Photo MN.
Racine, tracés A.
Mascret

ici, on aurait du mal à faire correspondre le tracé de l'ouverture du baquet avec celui d'une ellipse.

2.2 Représenter une sphère devient réalisable (*figure 20*). Il est important de remarquer qu'en général, on ne « voit » pas en même temps le pôle nord et le pôle sud d'une sphère lorsqu'elle est représentée en perspective linéaire.

Figure 21

Sphère inscrite dans un cube quand la face supérieure du cube est visible.

Le contour apparent de la sphère, tracé ici en trait plein, est tangent aux cercles tracés sur la sphère. C'est encore une ellipse qui, sauf exception, n'est pas un cercle.

Les 3 « cercles » en traits fins passent chacun par les centres de quatre faces du cube. Celui qui est dans un plan frontal n'est pas déformé. Les deux autres sont ses transformés par une homographie.

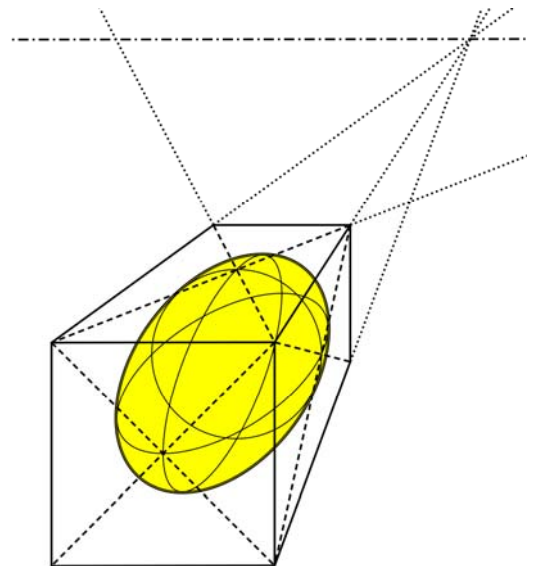
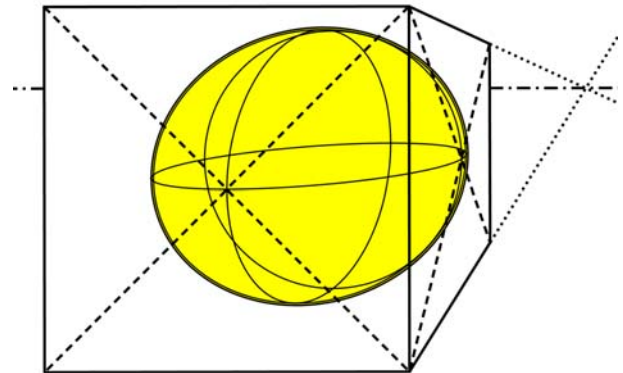


Figure 22

Sphère inscrite dans un cube quand la face supérieure du cube n'est pas visible



2.3 Précisons ce que nous entendons par homographie.

Reprenons pour cela la construction de la perspective cavalière d'un cercle : nous avons vu (cf n° 121 de la *Feuille de Vigne*) que la transformation géométrique qui transforme un cercle frontal en sa représentation sur une autre face du cube était une affinité dont l'axe est l'arête commune aux deux faces et dont la direction est la droite qui passe par les centres des deux faces.

Cette fois, la notion de direction perd son sens puisque les « parallèles » se coupent. En particulier les horizontales qui ne sont pas dans un plan frontal se rencontrent sur la ligne d'horizon.

Prenons l'exemple de la face supérieure : l'axe de l'homographie est la ligne de terre (AT). Tous les points de cette droite sont invariants.

Choisissons deux points dont nous connaissons les images, par exemple le centre N du cercle frontal dont l'image est l'intersection O des diagonales [AK] et [TI] de la face supérieure du cube et le milieu de l'arête [CB] dont l'image est le milieu F' de [KI].

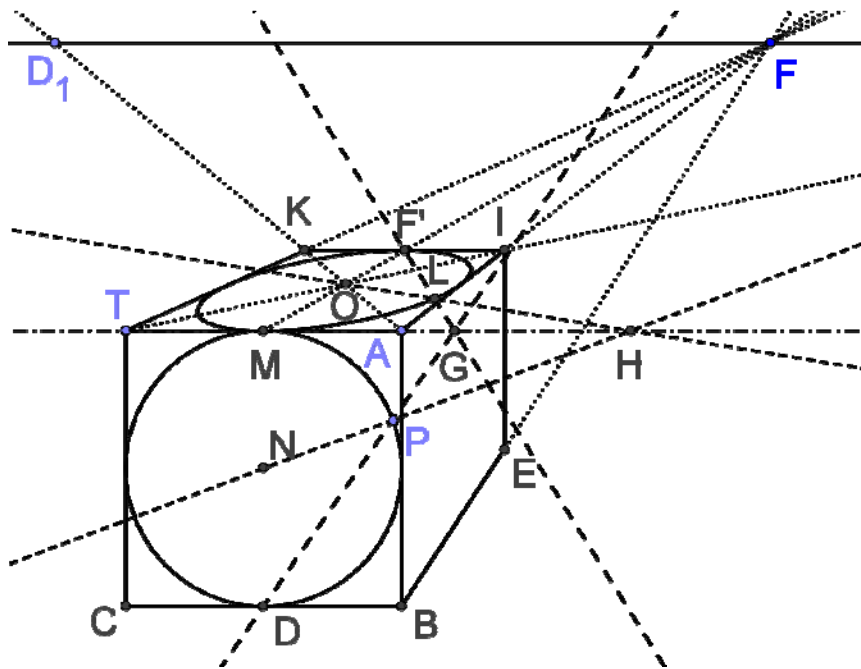


Figure 22

Le point P décrit le cercle C .

(DP) coupe l'arête (AT) en G. L'image de (DP) est (GF')

(NP) coupe l'arête (AT) en H. l'image de (NP) est (HO).

L'image L de P est à l'intersection de (F'G) et (OH).

Lorsque P décrit le cercle C , L décrit l'image du cercle C' .

La transformation géométrique qui associe L à P s'appelle une homographie. C'est une « bijection projective » comme l'affinité était une « bijection affine ».

Voici, à titre d'exemples, d'autres représentations de cercles inscrits sur les faces d'un cube construit dans diverses perspectives linéaires ou, figure 26, représentation d'une sphère en perspective linéaire.

Figure 23

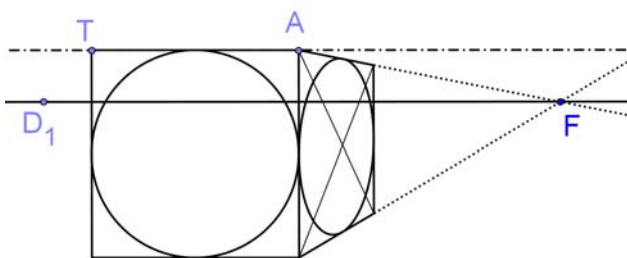


Figure 24

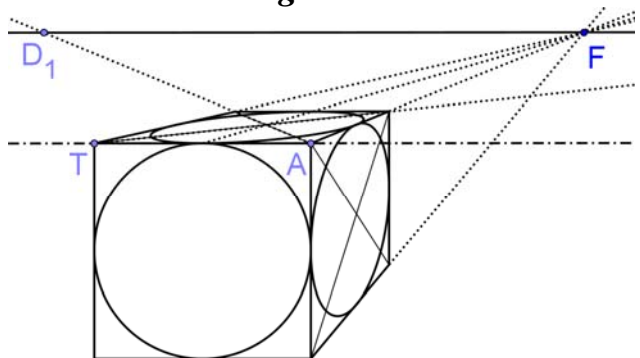


Figure 25

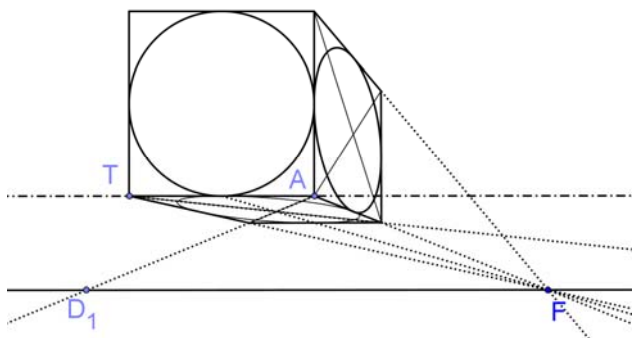
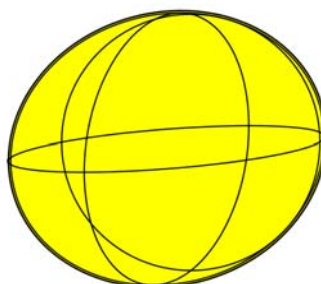


Figure 26



Saint Christophe
MBAD, © Photo MN. Racine

Figures 27 et 28





Figure 29

Portugal, *Le Christ bénissant*, début XVI^e siècle,
MBAD, © Photo MN. Racine



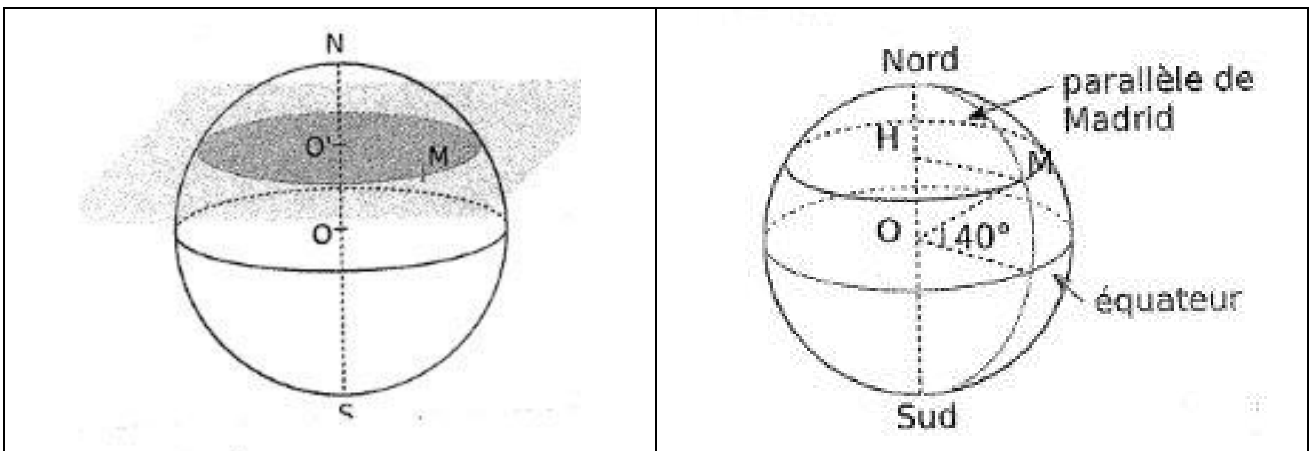
Figure 30

Maître de la Passion de Darmstadt, *sainte Dorothee et sainte Catherine*, (MBAD).
©Photo MN Racine, tracés A. Mascaret.



Figures 31 et 32

Photos MN Racine



Figures 33 et 34

Images tirées d'un ouvrage scolaire.
 Lecteur, toi qui es devenu spécialiste es perspectives,
 sauras-tu dire si ces figures sont exécutées correctement ?

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Patrick GABRIEL
Catherine LABRUIERE CHAZAL
Alain MASCRET
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUIERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUIERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 200 - 2^e semestre 2011

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE

Université de Bourgogne - UFR Sciences et Techniques

IREM

9 Avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 Dijon cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Fax 03 80 39 52 39

@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.

<http://math.u-bourgogne.fr/IREM>