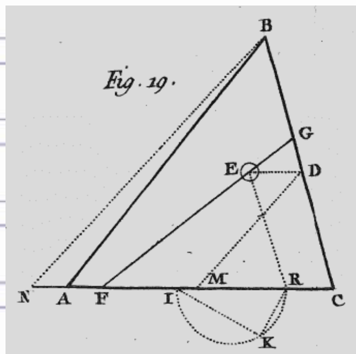
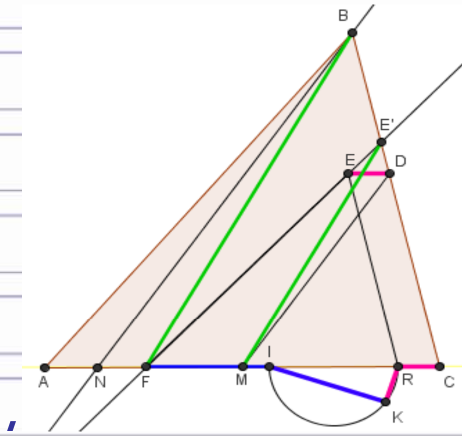
N° 112 – Juin 2009

# Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ Et puits alors, un problème de partage
- ✓ Point de Monge au lycée … plaisir et délectation géométrique
- ✓ Les hexagones magiques




Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

# Sommaire

# Éditorial

*Quand un point, une droite, prennent le nom d'un homme, qui en a le mérite ? L'homme qui a mis en lumière ce point, ou le point qui par ses propriétés remarquables sut se faire remarquer de l'homme ? Gloire à partager. Merci Tristan DERAY.*

*Mais sans nombre, partager n'est jamais si facile, surtout si l'on souhaite le partage équitable ; qui plus est s'il faut de l'eau tenir compte, ce qui, à ce que l'on me dit, est fort d'actualité et à défaut d'unanimité permet d'engranger voix et sièges pour faire la différence et pouvoir s'imposer. C'est du XVIII^e^ siècle, que Richard DALIN nous parle ici : d'un drame, d'un champ, d'un puits ou d'un puis sans fin puisque d'une question résolue, il nous renvoie à un nouveau problème. Quand l'équité conduit-elle à plusieurs solutions ? Mais alors moi-même, je vous demanderai comment choisir celle à mettre en œuvre ? Nouvelles rivalités annoncées ! C'est alors que le mathématicien se retire. Peut être pas. Au mathématicien appliqué, à l'optimisateur avec ses paramètres extérieurs, au probabiliste et à son atout le hasard d'intervenir s'ils le souhaitent car tout mieux que la guerre ! Questions ?*

*Les nombres et les questions, vous les retrouverez dans ce joyau qu'il ne veut pas s'attribuer mais que nous lui octroyons, monté en épingle par Michel LAFOND et qui comme une ruche nous délecte de ses cellules : hexagones magiques emplis de nombres nourriciers.*

*Bonne lecture et gavez-vous de ce miel délectable qui ravive et nourrit nos esprits.*

*Et bonnes vacances à tous, souvenez-vous que c'est sur le sable des grèves (lesquelles !) que les premiers mathématiciens inscrivirent leurs traces.*

*Donc tous à la plage, pas à la page !*

*Patrick GABRIEL,*
*ex-directeur de l'IREM,*

Au fait, le passé vous rattrape toujours...

### NOUVELLES ACQUISITIONS À LA BIBLIOTHÈQUE

*Les ouvrages de la bibliothèque sont à la disposition des enseignants de l'Académie*

ENGEL Arthur. Solutions d'expert. Vol. 1.2007
FAVENNEC Denis. Douce perspective. Une histoire de Sciences et d'Art. 2007
WARUSFEL André. Mathématiques. Cours et Exercices. Arithmétiques. 2002
DENIERE J. & L. – La géométrie ... pour le plaisir
Volumes 1, 2, 3, 4 et 5.
RITTAUD Benoît. Hasard et Probabilités; 2002
BUSSER Elisabeth & COHEN Gilles. Jeux mathématiques du "Monde". 500 énigmes et leurs solutions. 2007
JULIA Gilbert. Réussir l'épreuve sur dossier du Capes de Math. 2008
ESCOFFIER Jérôme. Probabilités et statistiques pour le Capes et l'Agreg. 2006
DUFETEL A. & LACROIX SONRIER M.Th. Analyse. Épreuve écrite du Capes. 2000
PICARD Philippe. Hasard et probabilités : Histoire, Théorie et application. 2007
DANTZER J. F. Math. pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités. 2007
HUBERT F. & HUBBARD J. Vol. 1. Calcul scientifique de la théorie à la pratique. Équations algébriques. 2006
GAULTIER Maurice. Statistique. 100 exercices corrigés avec résumés de cours. 2005
HUBERT F. & HUBBARD J. Vol. 2. Calcul scientifique de la thérie à la pratique. Équations différentielles et équations... 2006
ROMBALDI J. Etienne. Éléments d'analyse réelle. Capes et agrégation. 2004
ROMBALDI J. Etienne. Analyse matricielle. Cours et exercices résolus. 1999
ROMBALDI J. Etienne. Interpolation et approximation. Analyse pour l'agrégation. 2005
OUVRARD J. Y. Probabilités 1. Licence. Capes. 2007
JEANNERET A. & LINES D. Invitation à l'algèbre. Théorie des groupes... 2008
PROTASSON Konstantin. Analyse statistique des données expérimentales. 2002
BERTRANDIAS J.P. et F. Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé. 1997
ATTEIA Marc & GACHES Jean. Approximation hilbertyienne. Splines. Ondelettes. Fractales. 1999
HEBERT Élisabeth. Instruments scientifiques à travers l'Histoire. 2004
BALIVIERA M.J. Jeux 8. 2008
BUTLEN Denis. Le calcul mental entre sens et technique. 2007
THILL Vincent. Curiosités arithmétiques. 2008
Collectif CII Collège. Des nombres au collège. Parcours vers le réel... 2008
BOSNYAK Agnès. Acta didactica universitatis comenianae mathematics. 2008 n° 8
SMF. SMAI. L'explosion des mathématiques. 2002
Liber Amicorum Jean Dhombres. Edition Patricia Radelet. Brepols. 2008
ROUSSEAU C. SAINT AUBIN Y. Mathématiques et technologie. 2008
REINHARDT Fritz et HEINRICH Soeder. Atlas des mathématiques. 1997

LAFONTAINE Jacques. Introduction aux variétés différentielles. 1996
DALMASSO Robert. WITOMSKI Patrick. Analyse de Fourier et applications. 1996.
GASQUET Claude. WITOMSKI Patrick. Analyse de Fourier et applications. Filtrage. Calcul numérique. Ondelettes.1990
DENOUVILLE Jean Baptiste. Le traité de navigation (traité et abrégé). 2008
BOSCHET Françoise. Séries de fonctions. Intégrale de Rieman. 1995
QUEFFELEC Hervé. Topologie. Cours et Exercices corrigés. 1998
LERUSTE Christian. Calcul différentiel. 1996
CHRISTOL Gilles. COT Anne. MARLE Charles Michel. Calcul différentiel. 1997
TAUVEL Patrice. Analyse complexe pour licence 3. 2006
TAUVEL Patrice. Géométrie. 2006
AYRES Franck. Matrices. Cours et pb. 1973
HAUCHECORNE Bertrand. Les mots et les maths. 2009
JUSTENS Denis. & GELUCK Philippe. La mathématique du Chat. 2009.
LEYS Jos, GHYS Etienne & ALVAREZ Aurélien. Dimensions ... une promenade mathématiques... 2008. 1 DVD
NEAGOY Monica. The Teaching company (2005). Algebra 1. Partie 1, 2, 3. (6 DVD)
NOGGLE James. Geometry. Part 1, 2, 3. 3 DVD
SIEGEL Murray H. Algebra ii. 3 DVD.
STARBIRD Mickael. Change and Motion. Calculus. 2 DVD
STARBIRD Mickael. What are the chance; Probability. 1 DVD
STARBIRD Mickael. Meanim from data. Statitics. 2 DVD

---

## Liste des périodiques auxquels l'IREM est abonné

Bulletin de l'APMEP et Plot
Diagonales
Mathematics Magazine
Petit $x$
Recherche et Formation
Repères
Tangente
The American Mathematical Montly
Cosinus
Grand N
Mathematics Teacher
Quadrature
Recherche en Didactique des Mathématiques
Revue de la filière Mathématiques
The mathematical gazette

# Jeux et Problèmes

*Michel Lafond*
*mlafond001@yahoo.fr*

**JEU - 62**

Si on lance un dé ordinaire non pipé, de manière "raisonnable", c'est à dire en le faisant pivoter un peu au hasard, puis en le faisant rouler ni trop lentement ni trop vite, on obtient l'un des 6 entiers 1,2,3,4,5,6 de manière équiprobable (à peu de choses près).
Indiquer comment construire un objet permettant en un seul jet "raisonnable" d'obtenir l'un des 7 entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 de manière équiprobable (aussi bien que pour le dé ordinaire).

**PROBLÈME - 62**.

Soient $x, y, z$ trois réels.
Démontrer que si $x + y + z = 0$, alors

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\times\frac{x^5+y^5+z^5}{5} = \frac{x^7+y^7+z^7}{7}$$

(La réciproque est inexacte).

---

***Solutions***

**JEU - 61**

Quel est le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de gauche à droite ?

*Solution :*

Soit $N = a***...*$ l'entier en question où $b = ***...*$ possède $n$ chiffres.
Autrement dit : $N = a\,10^n + b$
Après transfert du chiffre $a$ à droite, N devient $N' = ***...*a$ c'est à dire $N' = 10\,b + a$.
Par hypothèse : $N = \frac{3}{2}N'$ donc $10\,b + a = \frac{3}{2}(a\,10^n + b)$.
Cette équation se met sous la forme $17\,b = a\,(3\,10^n - 2)$ (1)

Il est donc nécessaire que $10^n$ soit congru à 2 modulo 17.
Un petit calcul montre que le plus petit $n$ qui convient est $n = 15$.

(1) donne $b = \dfrac{3 \quad 10^{15} - 2}{17} a = 176470588235294\, a$ d'où

$N = a\,(10^{15} + 176470588235294)$

N est minimal pour $a = 1$ et vaut $N = 10^{15} + 176470588235294$.

***La réponse est donc N = 1176470588235294***

Vérification : $1764705882352941 = \dfrac{3}{2}\ 1176470588235294$.

Daniel DUBUISSON et Lucien SAUTEREAU ont envoyé une solution à cet énoncé.

Robert FERACHOGLOU résout le problème "inverse" : le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de droite à gauche est 285714.

$428571 = \dfrac{3}{2} \times 285714$.

**PROBLÈME - 61**

Dans $\mathrm{R}^+$ démontrer que si $a \geq b \geq c$ avec $a + b + c = 1$,
alors $a^2 + 3\,b^2 + 5\,c^2 \leq 1$.

Si vous avez compris le truc, vous devriez démontrer sous les mêmes hypothèses que : $a^3 + 7\,b^3 + 19\,c^3 \leq 1$.

*Solution :*

Il faut faire intervenir $a + b + c$, on n'a guère le choix...

Pour la première inégalité :

$a^2 + 3\,b^2 + 5\,c^2 = (a + b + c)^2 + 2\,(\,b^2 + 2\,c^2 - ab - ac - bc)$

$= 1 + 2\,(\,b(b - a) + c(c - a) + c(c - b))$

Comme par hypothèse $b(b - a) \leq 0$ $\quad c(c - a) \leq 0$ $\quad c(c - b) \leq 0$

On a bien $a^2 + 3\,b^2 + 5\,c^2 \leq 1$.

Pour la seconde inégalité, c'est le même principe, mais les calculs sont plus longs :

$a^3 + 7\,b^3 + 19\,c^3 = (a + b + c)^3 + 3\,(2b^3 + 6c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2 - 2abc)$

$a^3 + 7\,b^3 + 19\,c^3 = 1 + 3\,[b^2(b - a) + c^2(c - a) + c^2(c - b) + b(b^2 - a^2) + c(c^2 - a^2) + c(c^2 - b^2) + 2c(c^2 - ab)]$

Comme par hypothèse les 7 termes du crochet ci-dessus sont négatifs ou nuls,
On a bien $a^3 + 7 b^3 + 19 c^3 \leq 1$.

Remarquons que les coefficients sont :
Dans la première inégalité $3 = 2^2 - 1^2$ et $5 = 3^2 - 2^2$
et dans la seconde inégalité $7 = 2^3 - 1^3$ et $19 = 3^3 - 2^3$

On peut essayer de généraliser…ce que fait Robert FERACHOGLOU :
On suppose d'abord que a, b, c sont positifs.
Puisque $c \leq b \leq a$, on a $2b^2 \leq 2ab$, $2c^2 \leq 2bc$ et $2c^2 \leq 2ac$.
Ainsi $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 = 1$.
Si $b$ ou $c$ sont négatifs ($a$ ne peut pas l'être), l'inégalité demeure car seuls les carrés interviennent.
On démontre de même que $a^3 + 7b^3 + 19c^3 \leq (a + b + c)^3 = 1$ avec des nombres positifs.
Si $b$ ou $c$ est négatif, l'inégalité demeure, encore plus forte puisqu'elle est vraie avec les opposés.
Plus généralement, $a^n + (2^n - 1)b^n + (3^n - 2^n)c^n \leq 1$

# Et puits alors, un problème de partage

*Richard DALIN, Lycée Janot à Sens*
richard.dalin@orange.fr

Résumé : *En partant d'un texte du mathématicien Ozanam de 1778 sur le partage en deux parties d'un champ possédant un puits, cet article contient :*

- *le texte original,*
- *les démonstrations en langage actuel et l'exploitation qui pourrait en être faite en classe de seconde,*
- *la démonstration dans le cas général, démonstration qui ne figure pas dans le texte d'origine,*
- *un questionnement sur le nombre de solutions au problème, suivant l'emplacement du puits.*

Mots clés : *Ozanam, partage, aire de triangles, Thalès, puits, texte historique.*

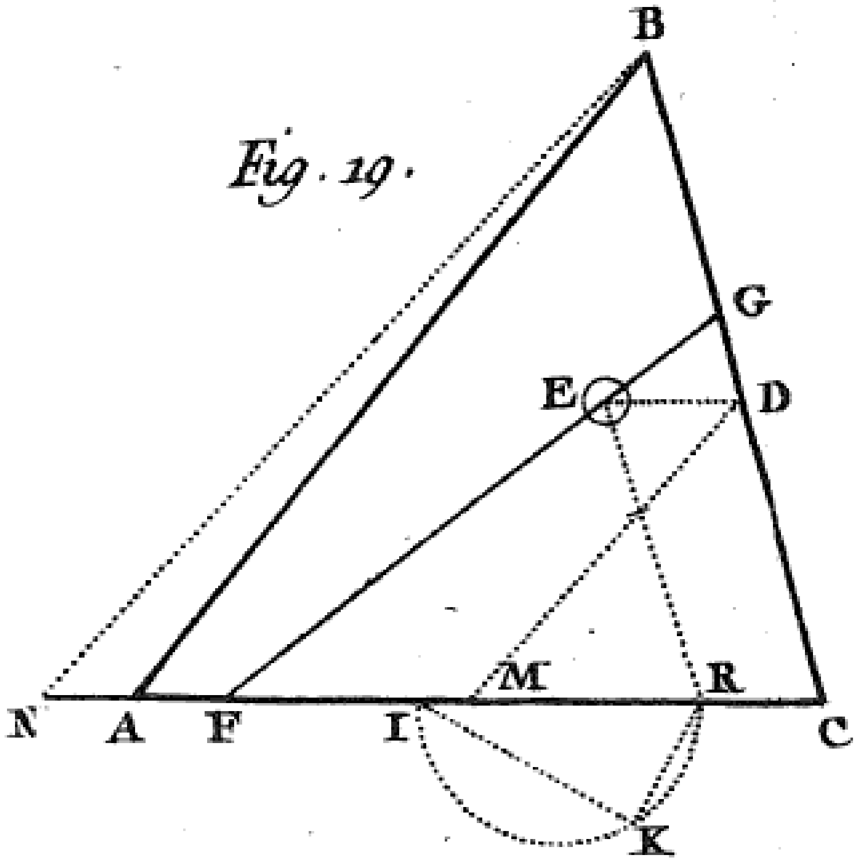
Lors du stage sur l'histoire des nombres et de la géométrie animé par Frédéric Métin et Patrick Guyot, Patrick nous a proposé un travail sur un texte des *Récréations mathématiques et physiques* de 1778, tome premier de M. Ozanam, de l'Académie royale des Sciences.
Voici le texte proposé ainsi que les planches correspondantes (on peut les retrouver sur Gallica) :

Problème XIII.

*Un pere de famille laisse en mourant, à deux enfants, un champ triangulaire, & ordonne qu'il leur sera partagé également. Il y a un puits dans ce champ, qui sert à l'arroser ; il faut conséquemment que la ligne de division passe par son centre, afin qu'il soit commun aux deux héritiers.*
*On demande la maniere de mener par ce point la ligne qui partage ce champ en deux également.*

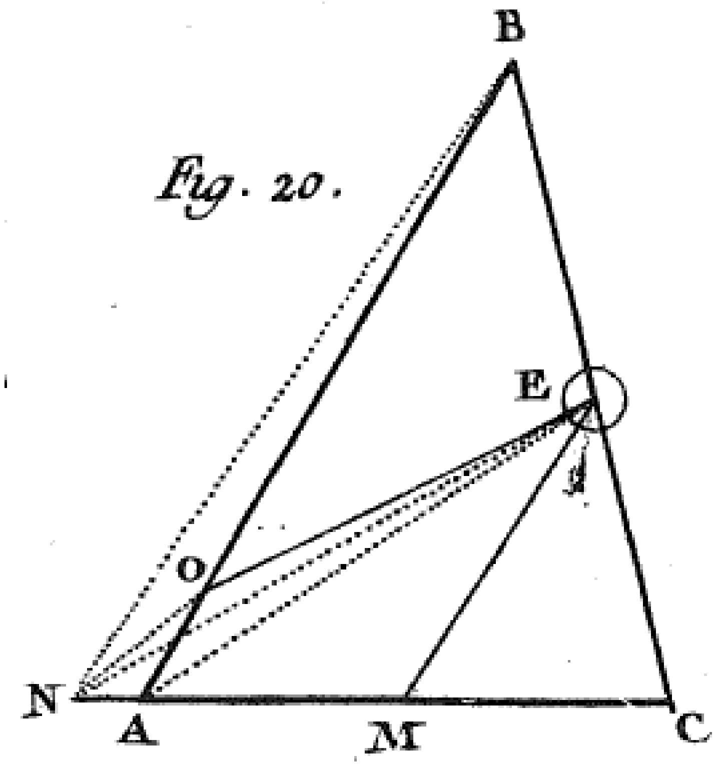
Solution.

*Soit le triangle proposé CAB, & E le point donné. (fig 19). Tirez du point E les lignes ED, ER, parallèles à la base AC & au côté CB respectivement, jusqu'à leur rencontre en R et D ; que la base CA soit divisée en deux également en M ; &, ayant du point D tiré la ligne DM, que BN soit menée parallèlement, & la ligne CN divisée également en I ; sur IR soit décrit le demi-cercle IKR, dans lequel appliquer RK=RC, & tirez IK, à laquelle vous ferez IF égale : ce point F & le point E détermineront la ligne FEG.*
*Il est évident qu'il faut que CI soit au moins double de CR ; car autrement, CR ne pourroit être adaptée dans le demi-cercle décrit fur RI : ce qui rendroit dans ce cas le problème impossible.*




Cet énoncé est à mon avis, après l'avoir lu en le commentant à l'ensemble de la classe, accessible aux élèves de seconde ; on peut leur demander de reproduire cette construction sur un logiciel de géométrie dynamique, et de comprendre ainsi "l'évidence" énoncée par l'auteur à la fin de son énoncé. J'ai l'intention de le donner à mes élèves de seconde l'année prochaine.
La démonstration donnée dans un cas particulier est en revanche plus difficile à comprendre pour des élèves, la voici :

*La démonstration de cette construction est trop prolixe pour trouver place ici : il y a même une multitude de cas qu'il seroit trop long de développer. En voici seulement un des plus simples ; savoir, celui où le point E est sur un des côtés (fig 20).*




*La construction et dans ce cas très simple ; car ayant divisé AC en deux également en M, tiré EM, puis sa parallele BN, si le point N tombe au dedans du triangle, en tirant la ligne EN le problême sera résolu : mais si le point N tombe en dehors, il faudra tirer la ligne AE, & ensuite par le point N sa parallele NO ; enfin par le point O la ligne OE : cette ligne résoudra le problême.*
*Car, à cause des paralleles EM, BN, le triangle MBE=MNE (1); donc, ajoutant à chacun le triangle CME, on aura les triangles CBM, CEN égaux. De plus, à cause des paralleles EA & NO, on a les triangles ANE, AOE égaux : conséquemment, ôtant de part & d'autre le triangle commun AGE, le triangle ANG=GOE (2) : d'où il suit qu'ajoutant à l'espace CAGE ce triangle GOE,on aura l'espace CAOE=au triangle CEN, qu'on a déjà vu être égal à la moitié de CBA.*

(1) L'égalité des triangles signifie à cette époque que les triangles ont la même aire, et non qu'ils sont isométriques.

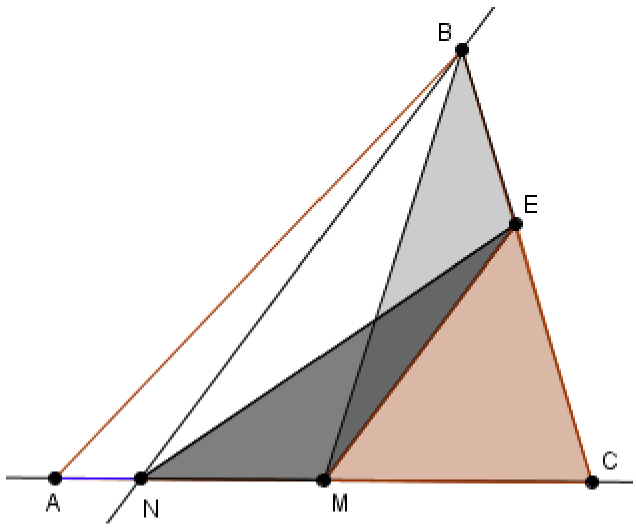
(2) Il est à noter que dans la planche initiale le point G ne figure pas : c'est l'intersection de (AB) et (NE).

Cette démonstration est difficile à aborder directement avec des élèves. Elle présuppose que ceux-ci connaissent deux propriétés évidentes pour l'auteur :

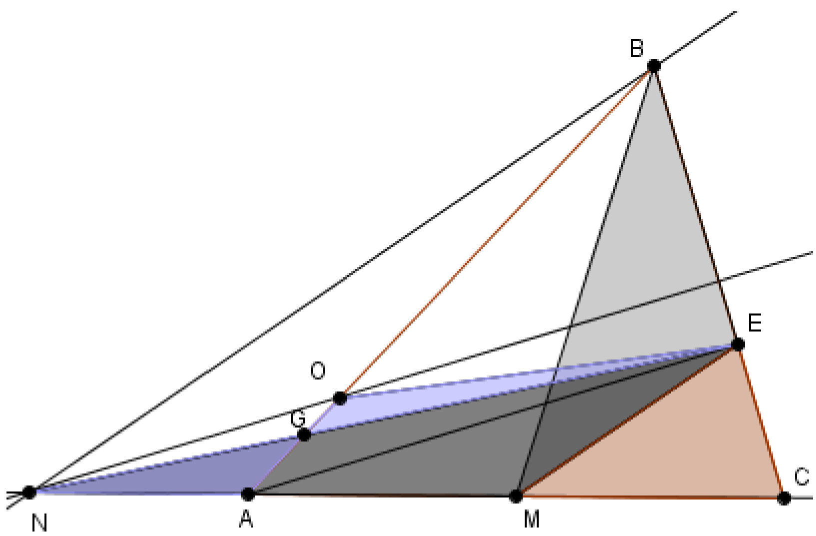
**Propriété 1** : Une médiane découpe un triangle en deux triangles de même aire.

**Propriété 2** : Si (AB) // (D) alors pour tous points M et N de (D) les aires de ABM et de ABN sont égales.
La démonstration est alors simple et je la reprends ci-dessous :

**Si N est entre A et C** :
D'après la propriété 2, les aires de MBE et MNE sont égale puisque (BN) // ME.
En ajoutant aux deux triangles précédents CME on obtient que les aires de CBM et de CEN sont égales.
Comme d'après la propriété 1 l'aire de CBM est la moitié de celle de ABC, l'aire de CEN est bien la moitié de celle de ABC.



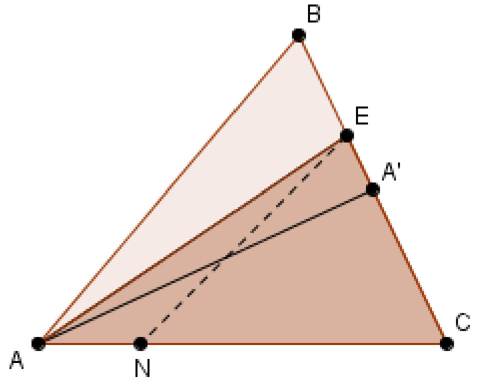

**Maintenant si N est à l'extérieur de [AC]** (figure ci-dessous) alors comme précédemment l'aire de CEN reste égale à celle de CBM donc à la moitié de celle de ABC.
Or comme (NO) // (AE) par construction, d'après la propriété 2, les aires de ANE et AOE sont égales, donc en retirant à ces deux triangles l'aire de AGE, les aires de NAG et GOE sont égales, donc en ajoutant à ces deux triangle le quadrilatère CAGE l'aire du quadrilatère CAOE est égale à celle de CEN, donc à la moitié de celle de ABC.



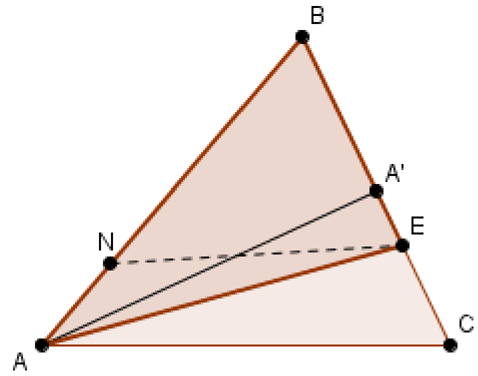
**Remarque :** j'ai l'impression que l'auteur s'est fait plaisir en donnant la deuxième construction lorsque N est à l'extérieur du segment [AN], car il est facile de voir si l'on trace les trois médianes du triangle sur quelle base il faut faire la première construction :

Soit A' le milieu de [BC].

Si E est entre B et A' alors comme l'aire de AA'C est la moitié de celle de ABC donc l'aire AEC est trop grande donc le point N doit être entre A et C.




Si E est entre A' et C, alors l'aire de AEB est plus grande que celle de AA'B, et il faut donc faire la construction en prenant comme base le côté [AB] et donc N sur [AB].



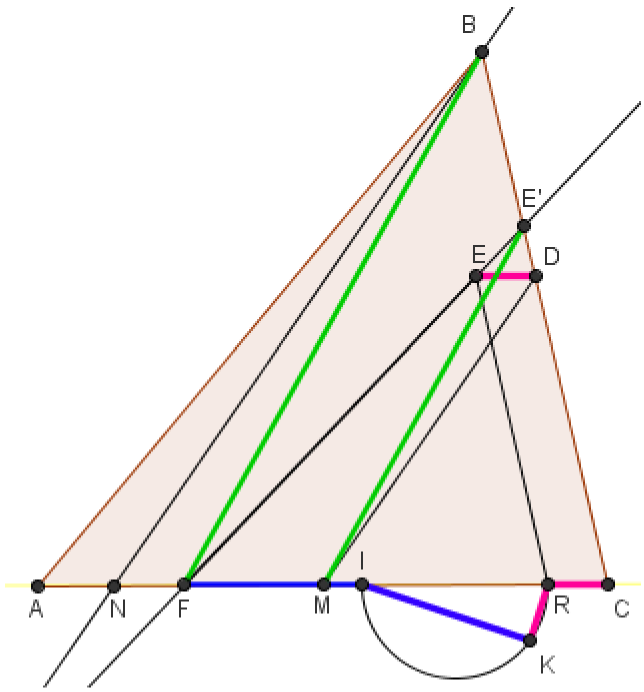

On peut donc, si l'on veut présenter ce problème à des élèves, se contenter de le faire avec le cas le plus simple de la première construction.

En ce qui concerne la démonstration dans le cas général où l'auteur écrit :
"la démonstration de cette construction est trop prolixe pour trouver place ici "
Je propose la suivante :
Tout d'abord avec les mêmes considérations que précédemment concernant les trois médianes, on peut choisir la base et le côté où l'on projette et donc se trouver dans le cas de figure suivant :

**Hypothèses :**

- (ER) // (BC)
- (ED) // (AC)
- M milieu de [AC]
- (BN) // (MD)
- I milieu de [NC]
- K sur le demi-cercle de diamètre IR tel que RC = RK
- IF = IK
- (FE) et (BC) se coupent en E'.

**Conclusion** :
L'aire du triangle CFE' est la moitié de celle de ABC.




**Démonstration :**
Il faut démontrer que le point E' se retrouve dans le cas de la première construction donc que (E'M) // (BF).
$IF^2 = IK^2 = IR^2 - RK^2 = IR^2 - RC^2 = (IR + RC)(IR - RC) = IC\,(IC - 2RC) = \frac{NC}{2}\left(\frac{NC}{2} - 2ED\right)$.

Donc $IF^2 = \frac{NC^2}{4} - NC\times ED$ (1).

$IF^2 = (FC - IC)^2 = \left(FC - \frac{NC}{2}\right)^2 = FC^2 + \frac{NC^2}{4} - FC\times NC$ (2).

(1) et (2) $\Rightarrow - NC\times ED = FC^2 - FC\times NC \Leftrightarrow FC^2 = NC(FC - ED) = NC\times FR \Leftrightarrow \frac{FC}{FR} = \frac{NC}{FC}$.(3).

D'après le théorème de Thalès comme (ER) // (E'C) : $\frac{FC}{FR} = \frac{E'C}{ER} = \frac{E'C}{DC}$

et comme (BN) // (MD) : $\frac{NC}{CM} = \frac{CB}{CD}$ donc $\frac{NC}{FC} = \frac{NC}{CM}\times\frac{CM}{CF} = \frac{CB}{CD}\times\frac{CM}{CF}$.

Donc d'après (3) : $\frac{E'C}{DC} = \frac{CB}{CD}\times\frac{CM}{CF}$ donc $\frac{E'C}{CB} = \frac{CM}{CF}$ ce qui prouve à en appliquant la réciproque du théorème de Thalès que (E'M) // (BF) ce que l'on voulait prouver.

## Pour creuser encore.

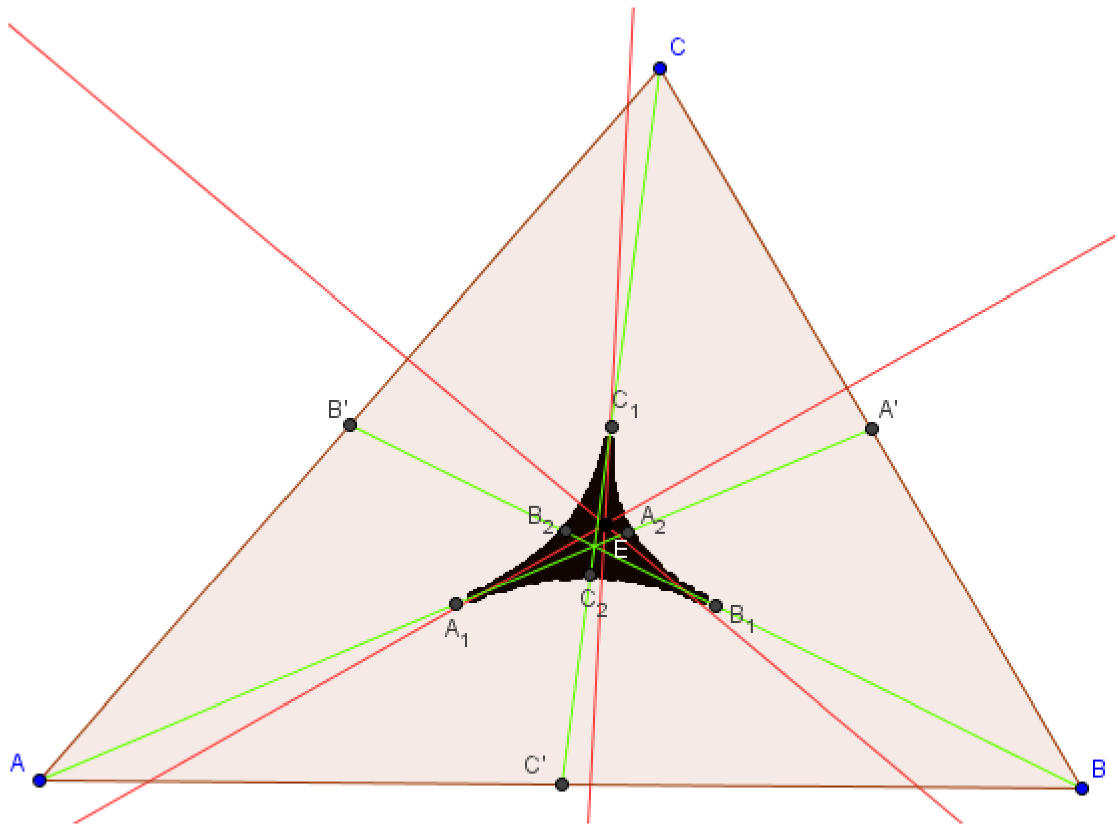
Constatant que si le puits est au centre de gravité, il y a alors trois solutions de partage qui correspondent aux trois médianes, je me suis alors posé la question de l'ensemble des positions du puits qui correspondent à deux ou trois solutions.
A l'aide du logiciel Geogebra, j'ai gardé la trace des différentes intersections lorsqu'il y a plusieurs solutions pour partager le champ.
Voici la zone en noir où il y a :

- sur les bords deux solutions pour couper le champ sauf en $A_1$ ou $B_1$ ou $C_1$ où il n'y a qu'une solution.
- à l'intérieur trois solutions.

On peut vérifier que $A_1$ est le milieu de la médiane et que $A_2$ est situé à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la longueur de la médiane.

En revanche, je n'ai rien trouvé géométriquement sur la nature de la forme que j'ai obtenue.

Et puits encore, je veux bien creuser vos idées, à vos crayons ou logiciels !




Fait à Die le 24 avril 2009.

# Point de Monge au lycée ...

# plaisir et délectation géométrique...

*Tristan DERAY, Lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône*

Résumé : *Si un tétraèdre ne possède en général pas d'orthocentre, il existe toutefois un point (dit de Monge) qui permet de définir une « droite d'Euler » du tétraèdre ...*

Mots clés : *Point de Monge d'un tétraèdre, droite d'Euler d'un tétraèdre, tétraèdre orthocentrique, Monge, points caractéristiques d'un tétraèdre.*

Si le facétieux Piron "qui ne fut pas même académicien" cueillait aux alentours de la cité des Hospices, des chardons pour les offrir "aux ânes de Biaune", il se serait sans doute ravisé si quelques années plus tard, il avait eu la possibilité de revenir sur les lieux et mesurer le talent d'un jeune géomètre que les orateurs du collège de Beaune qualifiaient de "puer auerus".
Le jeune Monge ne devait pas rester à Beaune. Le commandant en second de l'Ecole du génie de Mézières vit par chance le plan que Monge avait établi de sa ville natale et lui offrit de venir travailler à l'École de Mézières. Il y entra comme dessinateur en 1764, à l'âge de 18 ans. Peu après il fallut admettre que le jeune dessinateur recruté n'était rien moins qu'un prodigieux mathématicien. "On lui avait donné à résoudre un cas particulier de « défilement ». Il s'agissait comme dans toute opération semblable qui constitue une des œuvres principales du génie, de combiner économiquement un tracé de fortifications mettant le défenseur à l'abri des coups. Monge au lieu d'employer les méthodes de tâtonnement utilisées jusqu'alors, imagina à ce propos le principe de sa géométrie descriptive et résolut le problème si vite qu'on lui reprocha d'avoir bâclé le travail. Il insista, on vérifia les calculs, on les reconnut justes."[1]
A dater de ce jour, Monge devint professeur de mathématiques et ce problème de "défilement" fut à l'origine d'une carrière scientifique et politique exceptionnelle.

La géométrie descriptive a quitté depuis longtemps les programmes de mathématiques et le nom de Monge a disparu des manuels scolaires, celui de géométrie serait, dit-on, lui-même condamné à disparaître.

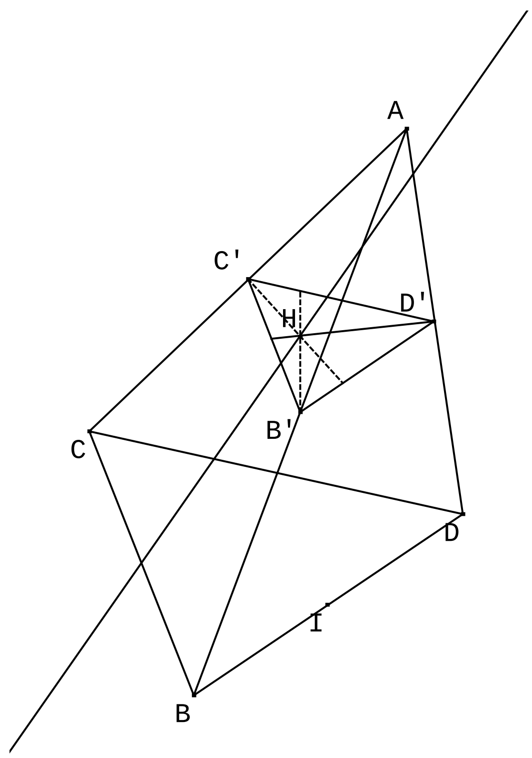
[1] L. De Launay « Monge »

Il existe un théorème peu connu, semble-t-il, qui mériterait quelque attention dans les classes et perpétuerait ce nom.

Il est assez courant de voir figurer dans les travaux géométriques proposés en classe de seconde la découverte de la droite d'Euler d'un triangle. A la question "que se passe-t-il dans l'espace ?", l'élève doit souvent attendre la classe de Terminale pour apprendre que cette droite n'existe plus de manière générale puisque les hauteurs d'un tétraèdre ne sont en général pas concourantes. L'occasion est donnée alors de découvrir le tétraèdre orthocentrique, ses caractérisations et propriétés.
Faudrait-il dire adieu à ces propriétés géométriques qui se correspondent parfois si bien lorsque l'on passe d'une dimension à une autre, et se fichent en définitive éperdument des notions de dimensions ? Au centre de gravité du triangle correspond celui du tétraèdre. Au centre du cercle circonscrit du triangle, celui de la sphère circonscrite au tétraèdre, mais au point d'intersection des hauteurs nulle correspondance et donc nulle droite d'Euler.

## *Le point de Monge du tétraèdre*

Pourrait-on trouver un "analogue" de l'orthocentre défini comme point de concours des hauteurs associées à un couple caractéristique (sommet, droite perpendiculaire au côté opposé) ?
La réponse est affirmative si l'on accepte de remplacer chaque couple par un nouveau, à savoir (« côté », plan perpendiculaire au côté opposé) ; à ceci près que la donnée d'un côté autorise la construction d'une infinité de plans perpendiculaires au côté opposé. Convenons de n'en prendre qu'un évidemment, celui qui passe par le milieu du côté considéré.
Si dans un triangle, il est possible d'envisager trois couples (sommets, perpendiculaires au côté opposé) (c'est-à-dire trois hauteurs), dans le tétraèdre, il faudra considérer six plans définis par les couples (milieu d'un côté, plan perpendiculaire au côté opposé) ; convenons d'appeler un tel plan un plan "médial"




Quel rapport avec Monge, demandera le lecteur ? La réponse est donnée par le théorème suivant établi par le géomètre.

***Théorème*** *: les six plans médiaux d'un tétraèdre concourent en un point appelé point de Monge du tétraèdre.*

La démonstration qui suit, reprend celle de Monge, est présentée par R A Crabbs dans le "Mathematics Magazine", vol. 73, n°3 – juin 2003.

Soient $B', C'$ et $D'$ les milieux des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.
Chaque plan médial relatif à un côté de $BCD$ coupe $B'C'D'$ suivant l'une de ses hauteurs (puisqu'il passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé) et donc l'intersection des trois plans médiaux relatifs aux côtés de $BCD$ est la perpendiculaire à l'orthocentre $H_A$ de $B'C'D'$. Soit $\delta_A$ cette droite (appelons-la « normale de Monge » relative à $A$).

Soit $\Delta_B$ le triangle obtenu de manière analogue en prenant les milieux des arêtes issues de $B$, $H_B$ son orthocentre et $\delta_B$ la perpendiculaire à $\Delta_B$ passant par $H_B$ comme précédemment $\delta_B$ est l'intersection des plans médiaux aux côtés du triangle $ACD$.
Comme $\delta_B$ et $\delta_A$ sont toutes deux dans le plan médial relatif au côté $[CD]$ et qu'elles ne se sont pas parallèles dans ce plan, elles sont donc sécantes en un point $M$ (qui appartient donc à 5 plans médiaux).
Montrons enfin que M est un point du plan médial relatif à $[AB]$.
$M$ est un point des plans médiaux relatifs à $[DB]$ et $[DA]$, il appartient à leur intersection. Comme leur droite d'intersection est la normale de Monge de la face $ABD$ qui est dans un plan perpendiculaire à $[AB]$, alors $M$ appartient à ce plan médial et donc à tous les plans médiaux.

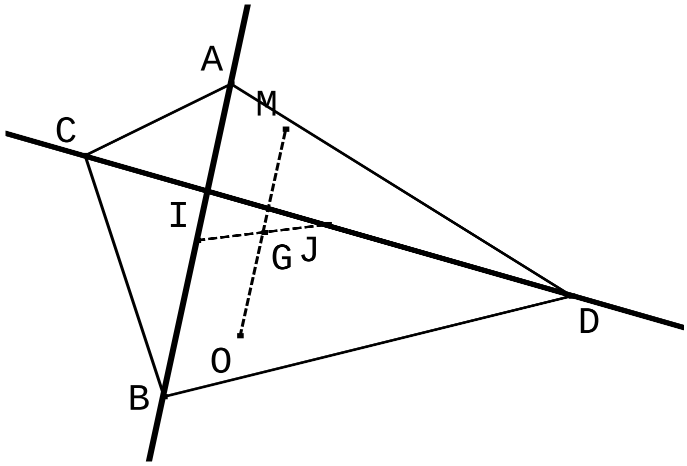
## *La droite d'Euler du tétraèdre*

Tout comme le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre le point de Monge possède, cette étonnante propriété d'être le point d'intersection de six plans. Il possède une propriété bien plus étonnante encore découverte par Monge.

***Théorème de Monge*** *: le point de Monge d'un tétraèdre est le symétrique du centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre par rapport à son centre de gravité.*

Ainsi donc réapparaît dans le tétraèdre une droite qui est analogue de la droite d'Euler du triangle. La démonstration qui suit est celle donnée par Nathan Altshiller-Court (cf article "Mathematics Magazine", vol. 73, n°3 – juin 2003)

Le plan $\mathcal{P}$ médiateur de l'arête $[AB]$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ médial relatif à cette même arête. Soient $I$, $J$ les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.




Comme $G$, centre de gravité du tétraèdre, est le milieu de $[IJ]$ (propriété des bimédianes[2]), ces deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont symétriques (par rapport à G) et le symétrique de $O$, centre de la sphère circonscrite, qui appartient au plan médiateur de $[AB]$, est donc un point du plan médial relatif à $[AB]$.
Ce raisonnement s'appliquant à toutes les arêtes du tétraèdre, le symétrique de $O$ par rapport à $G$ appartient à tous les plans médiaux c'est bien le point de Monge du tétraèdre.

## *Le tétraèdre orthocentrique*

Intéressons-nous au cas où le tétraèdre possède un orthocentre.

Dans ce cas, les côtés opposés sont deux à deux orthogonaux. Le plan médial relatif à un côté d'une face contient par conséquent le côté opposé et donc le sommet opposé à la face, et il en est de même pour les deux autres plans médiaux des côtés de la face considérée. Par conséquent, la normale de Monge relative à cette face passe par le sommet opposé et est une hauteur. Il s'ensuit alors que les quatre hauteurs confondues avec les normales de Monge relatives aux quatre faces sont concourantes au point de Monge.

***<u>Théorème</u> :*** *dans un tétraèdre orthocentrique, l'orthocentre est confondu avec le point de Monge du tétraèdre.*
La droite d'Euler du tétraèdre correspond ici « point pour point » à la notion rencontrée dans le plan à ceci près que les positions relatives des points entre eux ne sont plus données par les mêmes égalités vetorielles ; dans le plan, nous avons

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}\,.$$

Quand dans l'espace l'égalité est

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG}\,.$$

[2] (bimédiane : droite joignant les milieux de deux côtés opposés d'un tétraèdre )

## *Le point de Monge et le calcul vectoriel*

Il est possible de présenter le point de Monge en partant de cette égalité vectorielle et de retrouver la définition donnée précédemment comme propriété.

En effet, si $M$ est le point de Monge, alors :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}=4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OG}\right)=4\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{MO}=2\overrightarrow{MO}$$

Par ailleurs de la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$, il vient, en appelant $I$ le milieu de $[AB]$

$$2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{MO}$$

$$\text{et donc } 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$$

Montrons que $M$ est un point du plan passant par $I$ et orthogonal à $[CD]$. Il suffit pour cela d'écrire :

$$\left(2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=O$$

$$\text{D'où } 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\ .\ \left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}\right)=O$$

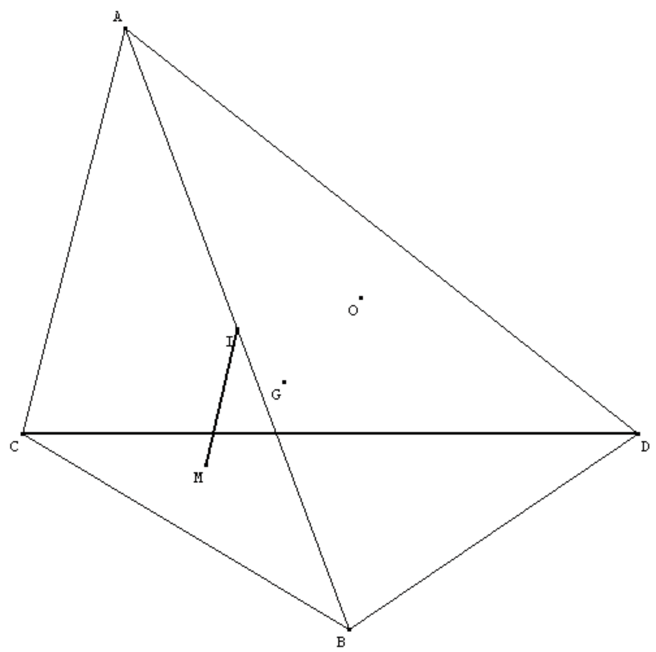
$$2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OD}^2-\overrightarrow{OC}^2=O$$

et comme O est le centre de la sphère circonscrite, alors

$$2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CD}=O$$

Ce qui établit l'appartenance de M au plan médial relatif à $[CD]$.

Le résultat précédent reste vrai si l'on remplace $I$ et $[CD]$ par n'importe quel couple « milieu d'un côté et côté opposé ». Le point de Monge appartient donc bien aux six plans médiaux.




Si l'on suppose maintenant que le tétraèdre est orthocentrique (ie hauteurs concourantes) montrons que le point de Monge appartient à chacune des hauteurs.

Dans un tétraèdre orthocentrique, les arêtes opposées sont orthogonales, donc le plan médial relatif au côté $[CD]$ contient le côté $[AB]$ et donc $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

Comme $A$ est un point du plan médial relatif au côté $[BC]$, alors $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AM}$ est par conséquent orthogonal au plan $(BCD)$ et donc $M$ est un point de la hauteur issue de $A$.

Le même raisonnement vaut pour les trois autres hauteurs et donc $M$ est confondu avec l'orthocentre.

Terminons par un appel à quelque habile géomètre :
Cette notion de droite d'Euler s'étend-elle de façon plus générale ? Le symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport au centre de gravité d'un triangle possède-t-il quelque propriété géométrique intéressante ?

La géométrie est un foisonnement de questions sans fin adressées depuis Euclide aux générations qui se succèdent. Nous sommes, arrières-petits-neveux de Descartes, comme de Fermat, Pascal, Monge … dépositaires d'un héritage précieux qu'il nous appartient de transmettre au mieux aux générations qui viendront. Refuser cette responsabilité au prétexte que les mathématiques d'Euclide seraient « vieillottes », « démodées », serait tout simplement céder au chant des sirènes et prendre le risque de voir les générations à venir s'échouer sur les écueils de la géométrie, se noyer dans les brisants de la Mathématique, les « *abandonner à la merci du vent et des courants au milieu d'un champ d'écueils* ». (P. Valéry)

On aimerait imposer l'esprit d'une « mathématique ludique » (tapez 1) et/ou d'une « mathématique sexy » (tapez 2) en un mot une « mathématique bien vulgaire » quand l'exigence voudrait que fussent éveillés, animés « esprit de géométrie » comme « esprit de finesse » qui ne cèdent rien aux plaisirs brefs et faciles mais sont la quête difficile et longue d'une joie comme d'une jouissance sans fin.

Autres temps, autres mœurs ?

# Les hexagones magiques

*Michel LAFOND,*

Mots clés *: carrés magiques, hexagone.*

Résumé *: Une présentation des hexagones magiques, récréation mathématique apparentée aux carrés magiques.*

**1).** Avant d'aborder le rôle des hexagones dans la joaillerie mathématique, disons un petit mot concernant une espèce de joyaux mathématiques très recherchés : Les figures magiques.
Les FIGURES MAGIQUES sont constituées d'un certain nombre de cases disposées selon un motif agréable à l'œil. Ces cases présentent des alignements divers, et on cherche à remplir ces cases par des nombres (en principe des entiers consécutifs) de manière que tous les alignements aient la même somme.
Bien sûr il y a de nombreuses variantes. Ainsi, on exige parfois que ce soient les produits qui soient constants.

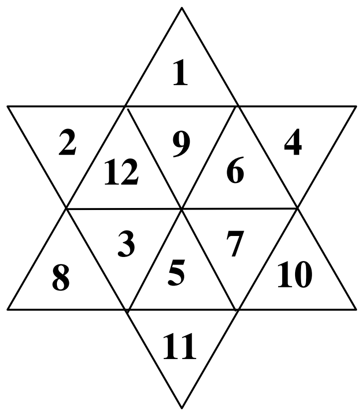
Voici des exemples variés :

| | | |
|---|---|---|
| **4** | **9** | **2** |
| **3** | **5** | **7** |
| **8** | **1** | **6** |

L'incontournable.
Constante : 15

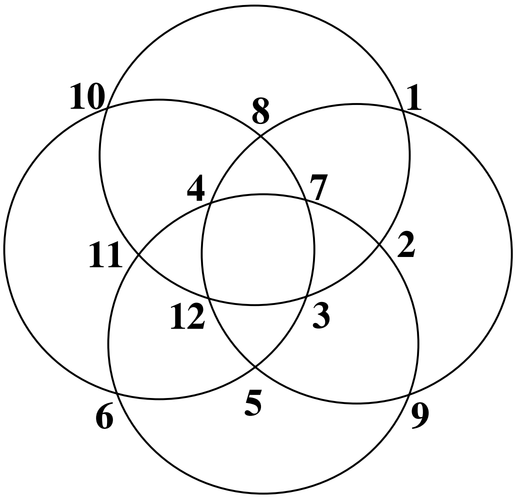
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **2** | **9** | **4** | **12** | **13** |
| **7** | **10** | **14** | **1** | **8** |
| **15** | **5** | **6** | **11** | **3** |

Un rectangle magique.
Les constantes valent
40 (lignes) et
24 (colonnes)




Un hexagramme magique avec la constante 33 pour les 6 alignements de 5 triangles.

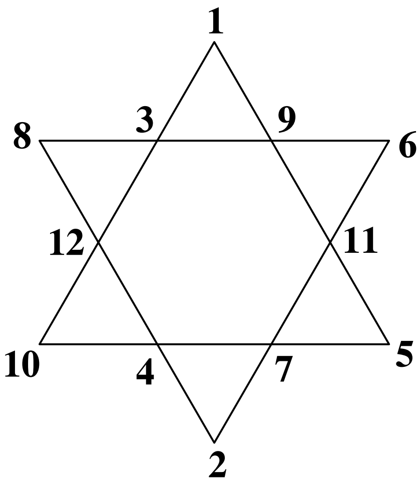
Curieusement, en modifiant le place des nombres dans l'hexagramme précédent, on peut obtenir la constante 32 au lieu de 33. [exercice laissé au lecteur].

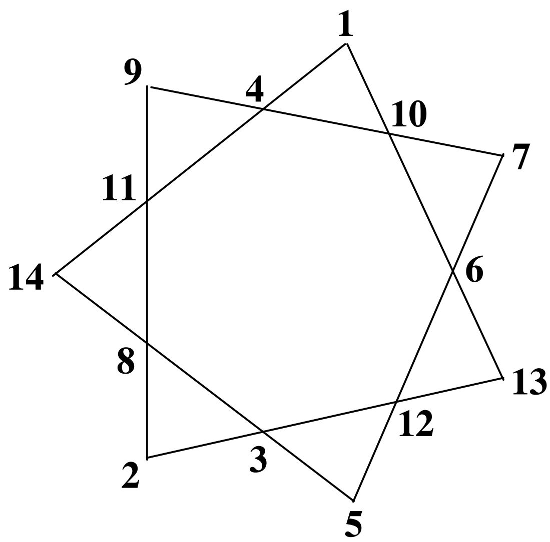



Un bel ensemble de cercles avec la constante magique 39 sur la frontière de chacun d'eux.

Et pour terminer ces exemples, voici ci-dessous :

À gauche : un hexagone magique (en fait deux triangles) avec la constante 26 pour les 6 alignements. (À ne pas confondre avec l'hexagramme vu précédemment).
À droite : un heptagone magique avec la constante 30 pour les 7 alignements.




Par rapport à d'autres êtres mathématiques comme les fractales, les nombres premiers gigantesques ou certains pavages miraculeux, ces objets magiques sont en fait assez faciles à obtenir, et ce d'autant plus que leur taille (mesurée en nombre de cases à remplir) est grande !
En effet, le nombre de contraintes égal au nombre d'alignements croit beaucoup moins vite avec la taille que le nombre de libertés à savoir le nombre d'entiers mis dans les cases.
Avec l'exemple des carrés magiques, pour l'ordre $n$ on a $n^2$ libertés pour seulement $2n + 2$ contraintes d'alignements (lignes colonnes et diagonales).
La preuve en chiffres. Aux symétries et rotations près :
On a un seul carré magique d'ordre 3 (Le carré vu plus haut).

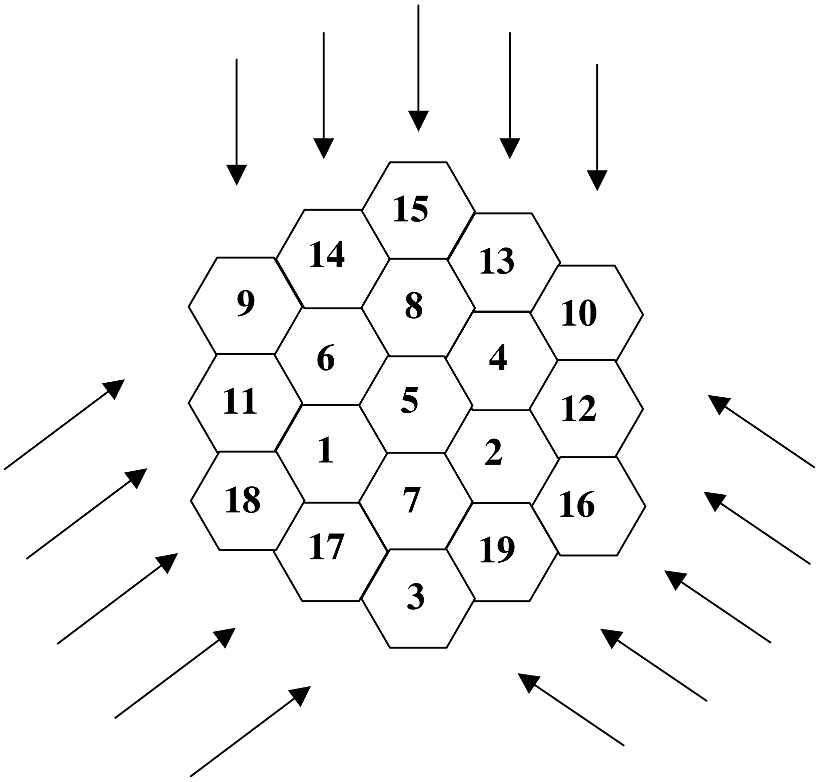
On a 880 carrés magiques d'ordre 4 (résultat connu depuis 3 siècles par Frénicle de Bessy)
On a 275.305.224 carrés magiques d'ordre 5 (résultat de 1973, merci l'informatique).
Et on estime à un peu moins de $2.10^{19}$ le nombre de carrés magiques d'ordre 6…

Alors, si on veut que le défi devienne intéressant, il faut ajouter des contraintes, et plus les contraintes seront fortes, plus la magie opérera.
Parmi les milliers de possibilités que les amateurs de monde entier ont imaginées depuis des siècles, beaucoup sont répertoriées sur les sites Internet (Tapez "carré magique" dans un moteur de recherche) puis surfez…
Citons seulement la bimagie qui mérite le détour :

Dans un carré d'ordre *n*, on place les entiers de 1 à $n^2$ et on exige d'une part la même somme pour les nombres des lignes, colonnes et diagonales (magie ordinaire) et d'autre part la même somme pour les carrés de ces nombres. Ce n'est plus de la magie, mais de la sorcellerie. Le carré bimagique ci-contre est de Pfeffermann (1891). La constante est **260** pour les sommes et **11180** pour les sommes de carrés. Boyer et Trump ont prouvé en 2002 qu'il n'y avait pas de carré bimagique d'ordre inférieur à 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | **21** | **51** | **14** | **37** | **28** | **62** | **44** |
| **22** | **39** | **1** | **27** | **52** | **42** | **16** | **61** |
| **45** | **32** | **58** | **36** | **11** | **17** | **55** | **6** |
| **40** | **50** | **24** | **41** | **2** | **63** | **25** | **15** |
| **60** | **46** | **12** | **53** | **30** | **35** | **5** | **19** |
| **49** | **4** | **38** | **64** | **23** | **13** | **43** | **26** |
| **10** | **59** | **29** | **7** | **48** | **54** | **20** | **33** |
| **31** | **9** | **47** | **18** | **57** | **8** | **34** | **56** |

**2).** Une manière de corser la situation est d'aller chercher des figures géométriques moins courantes ou de faire en sorte que les contraintes impliquent l'unicité de la solution (cerise sur le gâteau). On obtient alors des petits bijoux numériques (bijoux parce qu'ils sont beaux et rares).
C'est le cas de l'hexagone magique d'ordre 3 que nous admirons ci-dessous :
La somme constante des 15 alignements vaut **38**.

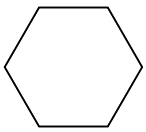



Il est très difficile à obtenir. Ce problème fut proposé en 1895 par William Radcliffe (habitant l'île de Man). Clifford Adams (employé des chemins de fer) prend connaissance du problème en 1910, travaille très longtemps dessus et en 1957 trouve une solution qu'il envoie (5 ans plus tard !) à Martin Gardner spécialiste des jeux mathématiques. M. Gardner l'envoie au mathématicien Charles W. Trigg, expert en combinatoire, lequel démontre l'unicité de la solution aux symétries et rotations près.

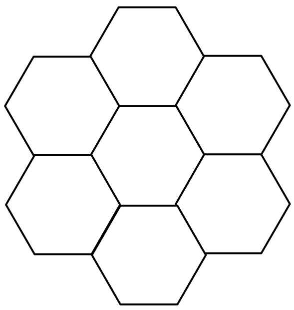
**3).** A la vue du bijou précédent, la question qui vient immédiatement à l'esprit est :

**Y a t-il d'autres hexagones magiques ?** (Sous-entendu d'ordre autre que 3)

Notons $H_n$ l'hexagone d'ordre *n*, c'est à dire le grand hexagone composé d'un pavage de petits hexagones égaux à raison de *n* pavés par côté.



$H_1$



$H_2$

Supposons que $H_n$ soit rempli magiquement, et examinons les conséquences.

- D'abord, combien $H_n$ a t-il de cases ?

La réponse est : $n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (2n-2) + (2n-1) + (2n-2) + \ldots + (n+2) + (n+1) + n = 2\,[n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (2n-2)] + (2n-1) = (n-1)(3n-2) + (2n-1) = 3\,n^2 - 3n + 1$.

- Quelle serait la constante des sommes de $H_n$ ?

On remplit $H_n$ avec les entiers de 1 à $3\,n^2 - 3n + 1$.

La somme de tous ces entiers est $S_n = \dfrac{(3n^2-3n+1)\ \ (3n^2-3n+2)}{2}$.

Cette somme doit se partager entre les $2n - 1$ alignements d'une des trois directions, d'où la constante

$$C_n = \frac{S_n}{2n-1} = \frac{(3n^2-3n+1)\ \ (3n^2-3n+2)}{2\ \ (2n-1)} = \frac{9n^4-18n^3+18n^2-9n+2}{2\ \ (2n-1)}.$$

$C_n$ doit être un entier, ce qui nécessite que $2n - 1$
divise $9\,n^4 - 18\,n^3 + 18\,n^2 - 9n + 2 = N$.
Or $(2n-1)^4 = 16\,n^4 - 32\,n^3 + 24\,n^2 - 8n + 1$.
$2n - 1$ divise N donc 16 N ainsi que $(2n-1)^4$ donc $9\,(2n-1)^4$.
Une condition nécessaire à la magie de $H_n$ est donc que
$2n - 1$ divise $16\,N - 9\,(2n-1)^4 = 72\,n^2 - 72n + 23$.
Mais $2n - 1$ divise $18\,(2n-1)^2 = 72\,n^2 - 72n + 18$.
Il faut donc que $2n - 1$ divise $72\,n^2 - 72n + 23 - [72\,n^2 - 72n + 18] = 5$.
Cela ne laisse que deux possibilités : $2n - 1 = 1$ ou $2n - 1 = 5$ c'est à dire $\boldsymbol{n = 1}$ **ou** $\boldsymbol{n = 3}$.
Ces deux conditions nécessaires sont aussi suffisantes, donc

| |
|---|
| Il n'y a que deux hexagones magiques :<br>$H_3$ vu au paragraphe précédent et le bijou de pacotille ci-contre : |

$H_1$ = **1**

**4).** Ce serait dommage d'abandonner si vite les hexagones.
Le cas $n = 3$ étant résolu, on va étudier les deux cas suivants $n = 4$ et $n = 5$.

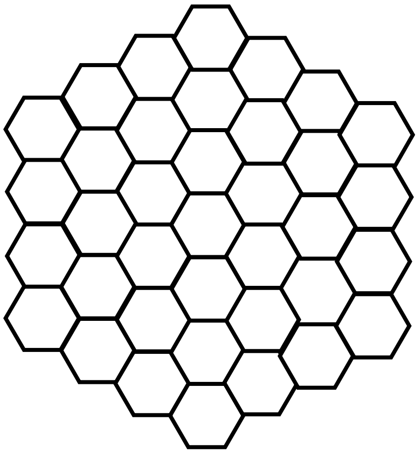
- Le cas de l'hexagone $H_4$.

En utilisant l'expression de $C_n$ du paragraphe 3, on a $C_4 = \dfrac{1406}{14} = 100{,}428\ldots$ non entier.

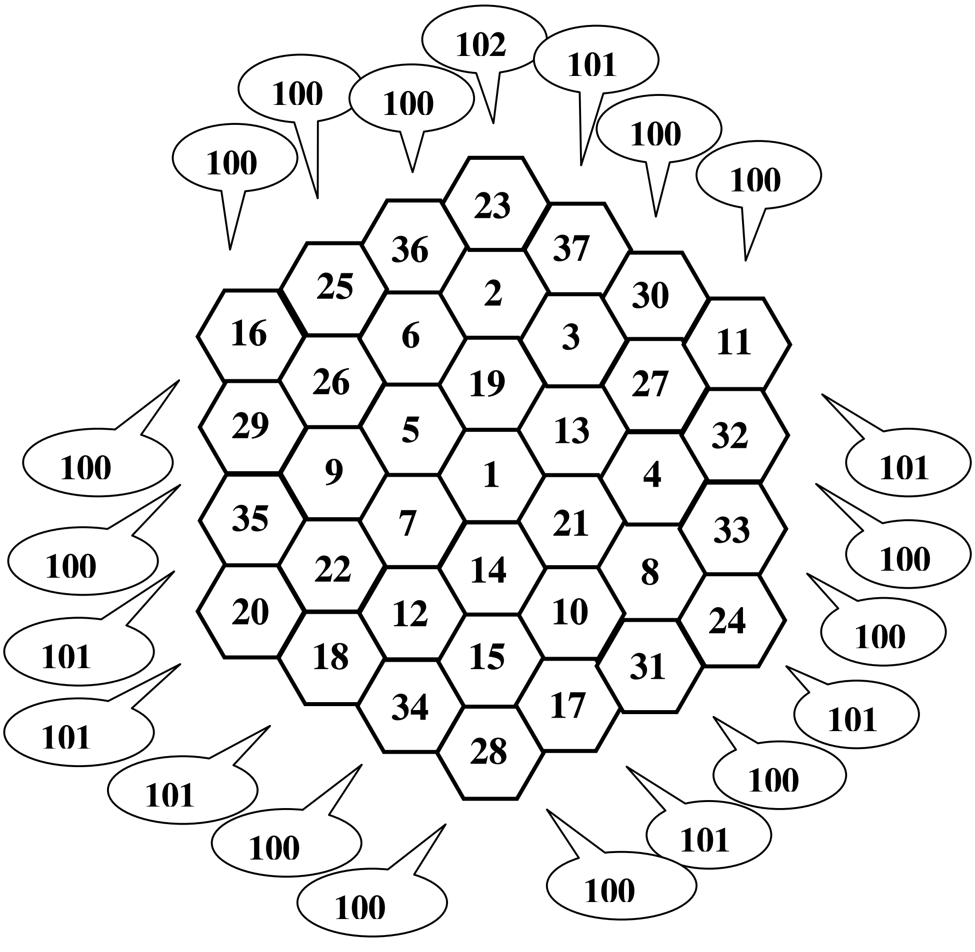
On savait que le bijou magique $H_4$ n'était qu'un rêve, aussi on peut s'en approcher en exigeant que les 21 alignements de $H_4$ aient tous une somme la plus proche possible de 100,428… Ce serait bien si les 21 sommes étaient toutes supérieures ou égales à 100, d'où le problème suivant qu'on peut résoudre à la main en quelques heures :

| |
|---|
| Placer dans les 37 cases de l'hexagone $H_4$ ci-dessous les entiers de 1 à 37 de manière |

que les 21 alignements aient tous une somme supérieure ou égale à 100.



Voici une solution qu'on peut sans doute améliorer en supprimant l'alignement de 102, défaut inadmissible chez un bijou de cette taille :




- Le cas de l'hexagone $H_5$.

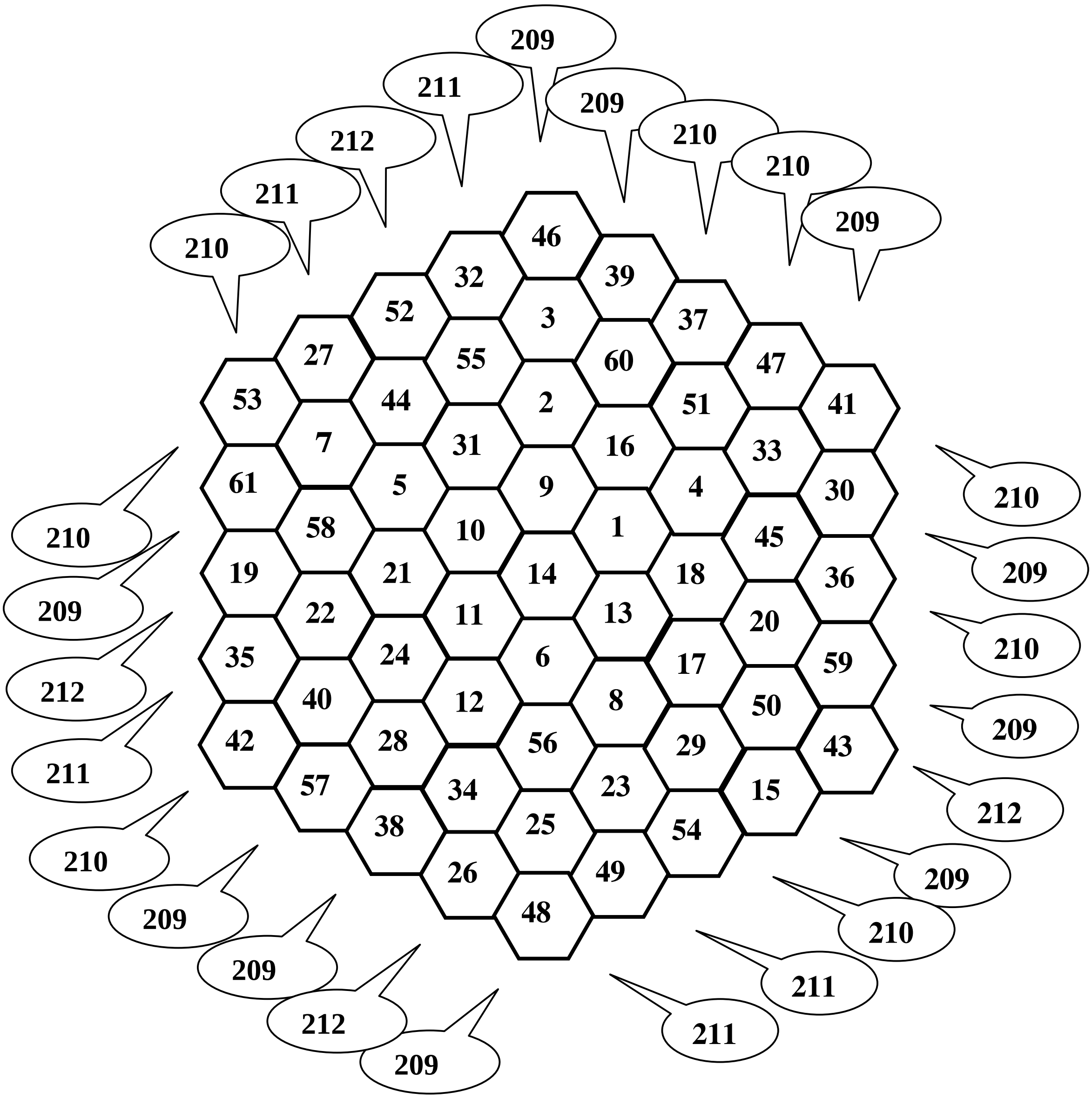
$H_5$ a 61 cases et la somme des entiers de 1 à 61 vaut 1891.

Le calcul de la constante est alors facile : $C_5 = \dfrac{1891}{9} = 210{,}111\ldots$

On le savait, la magie de $H_5$ est impossible. Aussi on peut s'en approcher en exigeant que les 27 alignements de $H_5$ aient tous une somme supérieure ou ègale à 210.

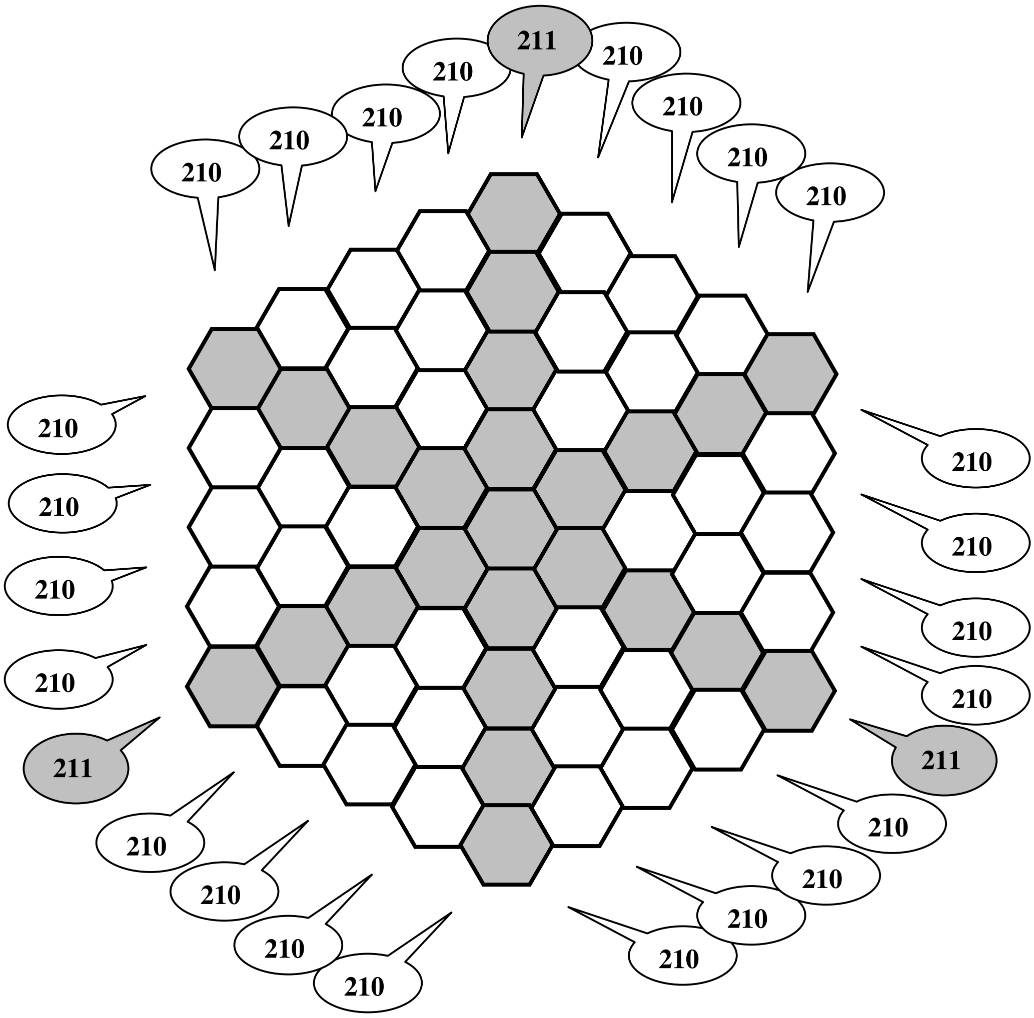
Si c’était possible, dans chacune des trois directions, ces sommes seraient à l’ordre près 210, 210, 210, 210, 210, 210, 210, 210 et 211, seule manière d’obtenir une somme de 1891 en 9 termes entiers tous supérieurs ou égaux à 210.

Je ne suis pas sûr qu’un tel joyau existe. A l’aide d’un programme informatique, j’ai obtenu un minimum de 209 dans chacun des 27 alignements avec l’hexagone ci-dessous :




Bien sûr, on aimerait obtenir le joyau suprême dans lequel les sommes seraient toutes égales à 210, sauf celles des alignements les plus longs qui vaudraient 211 (Figure page suivante).

Un lecteur patient y parviendra t-il ?




Est-il possible de placer les entiers de 1 à 61 dans les cases de l'hexagone ci-dessus de manière à réaliser les sommes imposées dans les 27 alignements ?

Bibiographie :

- Jeux mathématiques du "Scientific American" Martin Gardner chez CEDIC Paris 1979.

- Le site incontournable http://mathworld.wolfram.com/ véritable encyclopédie de maths.

(Dans la page d'accueil cliquer sur "Recreational Mathematics" puis sur "Magic Figures").

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Michel LAFOND
Frédéric METIN
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Catherine LABRUERE CHAZAL

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Catherine LABRUERE CHAZAL, Directrice de l'IREM

DÉPÔT LÉGAL :
n° 189 – 1er semestre 2009

IMPRESSION :
Service Reprographie

**FEUILLE DE VIGNE**
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
**IREM**
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr.
http://math.u-bourgogne.fr/IREM