N° 97 – Octobre 2005

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- ✓ La formule de Shannon
- ✓ Résolution de problèmes logiques par le calcul
- ✓ Trisecteur : commentaires sur le déroulement d'une séquence
- ✓ L'évolution d'un problème "pour chercher" en CM2

Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Editorial

Ce numéro de la "Feuille de Vigne" synthétise les objectifs que cherche à respecter notre revue, vous y trouverez à la fois deux articles de mathématiques et deux articles relatant des expériences pédagogiques, en lycée et en école élémentaire.

J'espère qu'ainsi cet exemplaire de notre revue plaira au plus grand nombre d'entre vous.
Il se trouve que c'est la dernière fois que je rédige un éditorial pour la Feuille de Vigne. En effet, souhaitant ne plus être directeur, j'ai réuni le Conseil de Gestion de l'IREM le 13 octobre afin d'élire mon successeur. Conformément aux statuts, le Conseil de Gestion a désigné une nouvelle équipe dirigeante
- M. Patrick Gabriel, Maître de Conférence à l'Université, Directeur,
- M. Frédéric Métin, Professeur au lycée "Le Castel"», Directeur Adjoint.

Je souhaite, en votre nom à tous, "bonne chance" à cette équipe, d'autant plus qu'au dessus des IREM s'amoncellent bien des difficultés dues aux restrictions budgétaires, à l'éclatement des centres de financement, Université, Rectorat et à l'exigence de performance que devront satisfaire les divers groupes de recherche des IREM.
Pour vous en convaincre, voici un petit extrait du compte-rendu de la négociation de renouvellement de la convention Ministère-ADIREM qui a eu lieu le 10 octobre dernier entre M. ASCIONE, pour le Ministère et M. DAMAMME, pour l'ADIREM :
"… avec la nouvelle loi, la LOLF, 95% à 99% des moyens seront décentralisés et attribués aux Rectorats. Les moyens ne seraient plus fléchés et les Rectorats les attribueraient en fonction d'appels d'offre.
M. Ascione encourage donc les IREM à collaborer avec les IPR, à "s'habituer à répondre à des appels d'offre", à une "rémunération vis-à-vis d'un contrat", à un "programme annuel de performances".
Ainsi des moyens attribués au plan national, 70 000€, pour les déplacements de commissions, 10 000 HSE DESCO, il nous subsiste l'espoir d'en voir conserver 5%, le reste étant redistribué au niveau local avec la possibilité pour chaque Recteur "de pouvoir déplacer le curseur" selon sa politique. …"

Enfin pour terminer sur une note moins pessimiste, je dois avouer que j'ai trouvé beaucoup de plaisir à travailler avec des professeurs de tous les niveaux, école élémentaire, collège, et lycée, je les en remercie,

Daniel Beau.

Sommaire

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr....
http://www.u-bourgogne.fr/irem

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Daniel BEAU, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
1 496 ADEP

DÉPÔT LÉGAL :
n° 171 – 2ème semestre 2005

IMPRESSION :
Service Reprographie
Département de Mathématiques

B loc-notes

Cette rubrique vous informe des manifestations qui se dérouleront durant le prochain trimestre.

Le planétarium du jardin des sciences de Dijon a ouvert ses portes

On en parlait depuis longtemps, Dijon a enfin son planétarium. Il est situé dans le jardin de l'Arquebuse, face à la gare, dans le prolongement du pavillon du Raines avec en compléments, une salle d'exposition et une salle d'animation pour les groupes (en particulier les scolaires).

La salle de 10 mètres de diamètre peut accueillir 60 personnes. Elle est inclinée et servira aussi pour des conférences. Tout l'équipement a été réalisé par une entreprise de St Etienne, RSA Cosmos.
Au centre de la salle, le "planétaire" projette les étoiles et les planètes. Le ciel étoilé est de bonne qualité. Chaque planète peut être représentée par un point (ils sont tous de la même magnitude) ou par une diapo. Pour la Lune, il n'y a qu'une pleine Lune et un fin croissant, ce qui est peu. On peut aussi projeter l'écliptique, le méridien, l'équateur et les dessins des constellations du zodiaque.

Six projecteurs de diapositives permettent de projeter une image sur le dôme complet (all sky). Il y a en réalité 12 projecteurs pour les fondus enchaînés.

Autre équipement important, un vidéo projecteur qui permet d'envoyer des images fixes ou des vidéos sur une partie du dôme. C'est un gros engin qui a l'avantage d'être capable de faire un fond noir. On peut envoyer une image de Saturne au milieu des étoiles sans que l'on voit les limites de la fenêtre de projection (qui ne serait pas noire mais gris foncé avec un vidéo projecteur classique). De plus, un logiciel en temps réel développé par RSA Cosmos permet de projeter des images du système solaire. On peut ainsi se promener au milieu des planètes, montrer l'éclipse du 3 octobre vue depuis la Terre ou vue depuis l'espace… Il y a énormément de possibilités.
Malgré ses petits défauts (2 phases de la Lune seulement et les planètes de même magnitude), c'est un outil qui fournit de très bonnes images et qui devrait permettre de développer de nombreux spectacles.

Actuellement, un seul spectacle est projeté, "Regards vers le Cosmos", fourni par la même société. Pour y assister, les séances de planétarium sont prévues aux heures suivantes :

- lundi - jeudi - vendredi (hors vacances scolaires), à 9h30, 10h30, 14h30, 15h30.
- mercredi (ainsi que les lundi, jeudi, vendredi pendant les vacances scolaires) à 10h, 15h, 16h, 17h.
- mardi et dimanche : 15h, 16h, 17h.

Le tarif est de 3 euros par personne et de 10 euros pour un groupe scolaire.
Les réservations sont conseillées mais vous pouvez venir pour n'importe quelle séance, on vous laissera rentrer s'il reste de la place…

Deux animateurs travaillent spécifiquement pour le planétarium et d'autres personnes du Muséum ont été formées pour faire passer le spectacle. Une partie seulement des séances pourront donc être suivies de questions, en fonction de la personne présente.

Les animations pour les scolaires

Les classes peuvent réserver pour voir le spectacle mais différentes animations leur sont aussi proposées. Pour les écoles primaires, elles ont déjà commencé et toutes les écoles ont dû recevoir le programme. Pour les collèges et lycées, elles devraient démarrer fin 2005 ou début 2006. On trouve le programme sur le site du rectorat (www.ac-dijon.fr cliquer sur action culturelle / activités / astronomie / planétarium fixe). Il est en train d'être mis au point donc des modifications peuvent être apportées. Les animations ont été prévues en fonction des programmes scolaires de SVT (classes de sixième et de seconde) et de sciences physiques (collège et lycée). Il n'y a rien de prévu pour les profs de maths mais vous pouvez demander des animations spécifiques.

Deux enseignants travaillent quelques heures au planétarium pour concevoir les animations avec les scolaires. Leur rôle est aussi d'aider d'autres enseignants à monter des projets autour de l'astronomie. N'hésitez pas à les contacter. Pour cela, il suffit d'e m'envoyer un mail à l'adresse pierre.causeret@ac-dijon.fr

Une exposition d'astronomie au jardin de l'Arquebuse du 11 au 18 novembre

La Société Astronomique de Bourgogne exposera de nombreuses maquettes et expériences dans la grande orangerie à proximité du planétarium du 11 au 18 novembre. Des visites guidées pour les classes seront organisées.
Vous pourrez y trouver en particulier :

- une maquette motorisée du système solaire permettant de simuler et d'expliquer les phases de la lune, les éclipses, les saisons, l'opposition de Mars…
- une balance de Cavendish montrant en direct l'attraction de deux boules de plomb (expérience qui vient de Lyon via Nice et qui n'arrivera peut-être que le lundi) et qui vérifie donc la théorie de Newton,
- la constellation d'Orion en relief,
- une carte du ciel lumineuse où s'allume la constellation choisie,
- des expériences de décomposition de la lumière,
- d'autres maquettes sur l'effet Doppler ou les lentilles gravitationnelles,
- des panneaux sur les applications de la relativité à l'astronomie,
- des projections de photos…

Vous pourrez coupler votre visite avec une séance de planétarium (10 euros par classe pour le planétarium, entrée libre pour l'exposition). Il est indispensable de réserver pour les classes (en téléphonant au Muséum au 03 80 76 82 76. ou éventuellement par mail pierre.causeret@ac-dijon.fr en précisant la date et l'heure). Les horaires prévus sont 9h30-11h30 le matin et 14h30-16h30 l'après midi (visite guidée de l'exposition + planétarium). De petites modifications d'horaires sont envisageables en fonction de vos libertés.

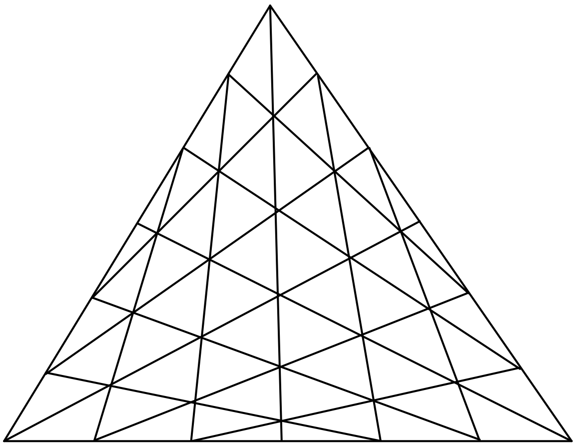
Pierre CAUSERET

Jeux et Problèmes

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

JEU - 47

Combien comptez vous de triangles dans la figure agaçante ci-dessous ?



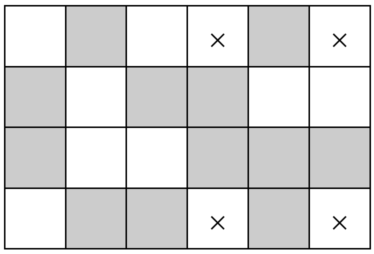
PROBLÈME - 47

Démontrer que si pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a $|a\,x^2 + b\,x + c| \leq 1$ alors $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Solutions de la rubrique précédente

JEU - 46.

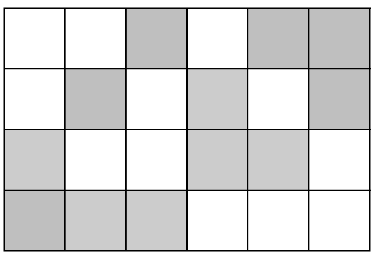
> Trouver un rectangle de 4 × 6 cases, chacune colorée en blanc ou noir, de telle sorte qu'il ne contienne aucun rectangle ayant ses 4 sommets unicolores.



Le schéma proposé ne marche pas car il y a un rectangle "blanc".

Solution :

La seule solution aux permutations près de lignes ou de colonnes est :



PROBLÈME - 46.

Démontrer dans l'ensemble des nombres réels l'implication :

$$\begin{cases} a+2b \le 3 \\ b+3c \le 4 \\ c+4a \le 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a+b+c \le 3}$$

Solution :

Cherchons par identification à obtenir :

$$x\,(a + 2b) + y\,(b + 3c) + z\,(c + 4a) = a + b + c. \qquad (1)$$

c'est-à-dire résolvons le système : $\begin{cases} x+4z=1 \\ 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \end{cases}$

on obtient : $x = 9/25$ $\quad y = 7/25$ $\quad z = 4/25$

En remplaçant dans (1) $x,\ y,\ z$ par leurs valeurs, on obtient :

$$a + b + c = \frac{9}{25}(a+2b)+\frac{7}{25}(b+3c)+\frac{4}{25}(c+4a) \le \frac{9}{25}3+\frac{7}{25}4+\frac{4}{25}5=\frac{75}{25}=3$$

C Q F D.

Le problème 46 a aussi été résolu par R. Ferachoglou.

Une solution de Richard BECZKOWSKI, au problème 46.

En remplaçant $a,\ b,\ c$ par $A = a-1$, $B = b-1$ et $C = c-1$ le système proposé devient :

$\begin{cases} A+2B \le 0 \\ B+3C \le 0 \\ C+4A \le 0 \end{cases}$ et on doit prouver que $S = A+B+C \le 0$

Par addition licite des trois inégalités on obtient : $3S+2A+C \le 0$ soit $4S+A-B \le 0$.

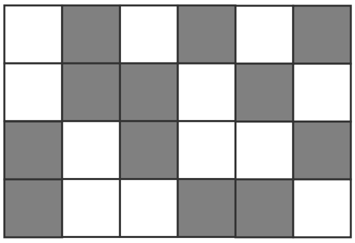
Si on a $A-B \ge 0$ le résultat est évident, la somme S ne peut être que négative ou nulle.

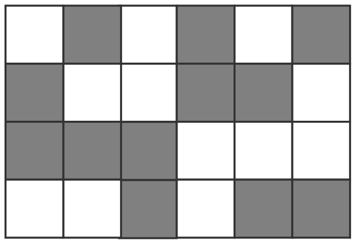
Considérons le cas $A-B<0$.
La première inégalité du système proposé exige que le plus petit de A et de B, donc A, soit strictement négatif.
Par addition licite des première et deuxième inégalités on obtient :
$A+3B+3C \le 0$ et donc $3S-2A \le 0$ qui n'est possible qu'avec $S \le 0$.

Une solution de Richard BECZKOWSKI, au jeu 46.

Considérons un rectangle à trois lignes et six colonnes dont une a ses trois carrés de même couleur. Pour qu'il ne contienne aucun rectangle à sommets unicolores il est nécessaire que les cinq autres colonnes contiennent au moins deux carrés de l'autre couleur et qu'elles soient différentes les unes des autres. C'est impossible car il n'y a que quatre façons d'obtenir trois carrés dont au moins deux ont la même couleur donnée.

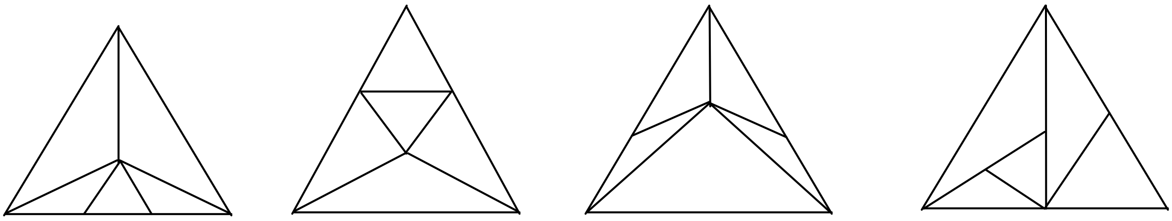
La seule chance d'obtenir le rectangle demandé est de choisir les six colonnes différentes, contenant chacune deux carrés blancs et donc deux carrés noirs. Ce choix est unique car $C_4^2 = 6$.
La variété ne peut venir que des 720 permutations de ces six colonnes.





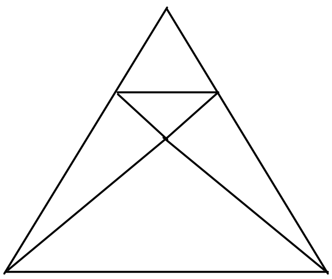
Solutions tardives

M. **Lucien Sautereau** a envoyé une solution au problème numéro 45, et, à propos du jeu numéro 45, où il fallait partager un triangle équilatéral en 5 triangles isocèles, il remarque que le "corrigé" ne propose que 4 solutions :

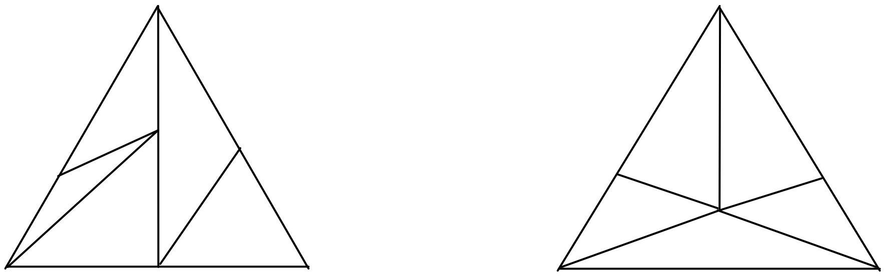


alors que :

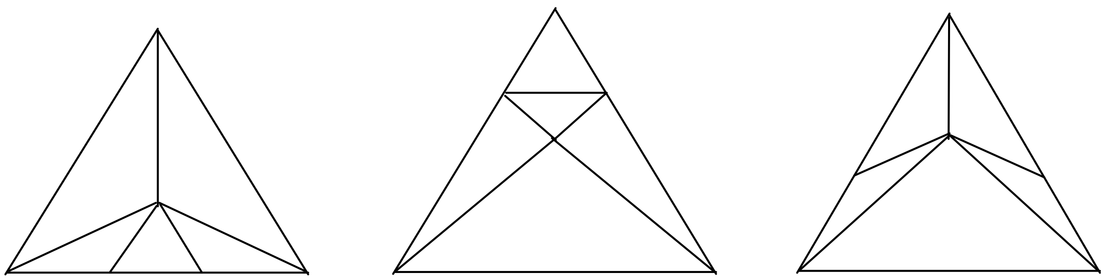
a) La solution 2 peut se décliner d'une infinité de manières non isométriques, en choisissant le point intérieur n'importe où sur l'axe vertical de symétrie :



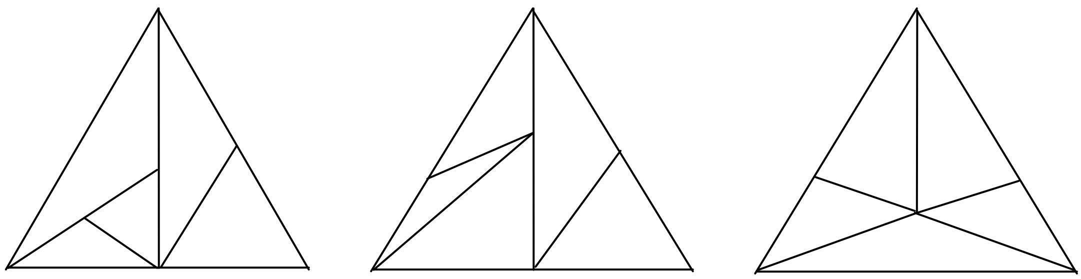
b) Deux solution doivent être ajoutées : (la première est un panaché des figures 3 et 4)



Finalement il y a (au moins !) 6 solutions, si on compte pour une solution la famille infinie :



(infinité)



Le ver du doute a donc complètement rongé ce problème, et il n'est pas sûr que d'autres solutions n'existent pas !

La formule de Shannon

Gérard LAVAU, Lycée Carnot à Dijon

Dans le n° 96 de *Feuille de Vigne*, Michel Lafond nous exposait l'algorithme de compression de Huffman, et nous précisait que cet algorithme permettait de compresser d'environ 15% un texte "ordinaire". Nous nous proposons d'expliquer en quoi la formule de Shannon permet de préciser ce point.

Nous donnons d'abord la formule de Shannon, l'appliquons sur quelques exemples, puis tenterons d'en donner une justification empirique que nous espérons assez convaincante.

Considérons une suite de lettres ou de symboles constituant un message. Chaque symbole peut prendre les valeurs s_1, s_2, …, s_k (ce sont par exemple les lettres de l'alphabet), avec des probabilités respectivement p_1, p_2, …, p_k et chaque symbole est supposé être indépendant du suivant (ce qui n'est pas exact pour un texte littéraire, mais cela simplifie les choses). Shannon définit la quantité d'information contenue dans un symbole comme étant $H = p_1 \log \frac{1}{p_1} + p_2 \log \frac{1}{p_2} + \dots + p_k \log \frac{1}{p_k}$, où log est le logarithme en base 2. Cette quantité d'information est maximale lorsqu'elle est obtenue dans le cas de l'équirépartition et vaut alors $\log(k)$. Cela résulte d'une inégalité de convexité, en utilisant le fait que log est concave :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \log\left(\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{p_i}\right) = \log(k).$$

Enfin, Shannon énonce qu'un message constitué de N symboles peut en moyenne être compressé en un message de longueur aussi proche que l'on veut de $\frac{HN}{\log(k)}$, quantité qui donne donc la longueur moyenne optimale d'un message compressé.

EXEMPLE 1

Reprenons la répartition des 32 lettres et autres symboles, telle qu'elle est donnée dans l'article de Michel Lafond.

s_i	p_i	s_i	p_i	s_i	p_i
E	0,144	D	0,033	*virgule*	0,007
blanc	0,128	C	0,026	*tiret*	0,007
S	0,062	M	0,024	H	0,007
A	0,062	P	0,021	J	0,007
N	0,062	V	0,013	K	0,007
I	0,058	*apostrophe*	0,013	X	0,006
R	0,057	*point*	0,008	Y	0,006
T	0,057	Q	0,008	*interrogation*	0,006
U	0,049	B	0,007	Z	0,005
O	0,048	F	0,007	W	0,005
L	0,043	G	0,007		

Si les 32 symboles s_i étaient équirépartis, alors la quantité d'information donnée par un symbole serait $H = \sum_{i=1}^{32} \frac{1}{32} \log(32) = \log(32) = 5$.

Ce nombre correspond exactement aux 5 chiffres binaires (de 00000 à 11111) qui seraient nécessaires pour coder chacun des 32 symboles, chaque chiffre binaire apportant une quantité d'information d'une unité.

Mais les symboles ne sont pas équirépartis, et si on applique la formule de Shannon à la répartition ci-dessus, on trouvera : $H = \sum_{i=1}^{32} p_i \log \frac{1}{p_i} = 4{,}29$ soit un peu moins de 5. Un message constitué de N symboles comportera une quantité d'information de 4,29N au lieu de 5N. Shannon prévoit qu'on peut compresser le message en utilisant environ $\frac{4{,}29\mathrm{N}}{5}$ symboles au lieu de N, soit une réduction de $\frac{0{,}71}{5} = 0{,}142$ proche des 15% annoncés.

EXEMPLE 2

On ne considère plus que deux symboles. Chaque symbole peut prendre deux valeurs s_1 et s_2 avec des probabilités respectivement $p_1 = 0{,}8$ et $p_2 = 0{,}2$. La quantité d'information contenue dans un symbole est $p_1 \log \frac{1}{p_1} + p_2 \log \frac{1}{p_2} \approx 0{,}72$. Un message de N symboles contient en moyenne une quantité d'information égale à 0,72N. Sa quantité d'information est donc inférieure à sa longueur, ce qui est une perte. Il est possible de coder le message de façon à ce qu'il ait en moyenne une longueur aussi proche que l'on veut de 0,72N. En appliquant le codage d'Huffman sur des groupes de symboles, on obtient par exemple :

- ***Codage 1***

On regroupe les symboles deux par deux et l'on code :

s_1s_1 par 0	(avec une probabilité p_1^2)
s_1s_2 par 10	(avec une probabilité p_1p_2)
s_2s_1 par 110	(avec une probabilité p_2p_1)
s_2s_2 par 111	(avec une probabilité p_2^2)

On vérifiera que le décodage est sans ambiguïté. La longueur moyenne du message est :

$$\frac{\mathrm{N}}{2}(p_1^2 + 2p_1p_2 + 3p_1p_2 + 3p_2^2) = 0{,}78\mathrm{N} \text{ au lieu de N}$$

- ***Codage 2***

On regroupe les symboles trois par trois et on les code comme suit :

$s_1s_1s_1$	0	(avec une probabilité p_1^3)
$s_1s_1s_2$	100	(avec une probabilité $p_1^2p_2$)
$s_1s_2s_1$	101	(avec une probabilité $p_1p_2p_1$)
$s_2s_1s_1$	110	(avec une probabilité $p_2p_1^2$)
$s_1s_2s_2$	11100	(avec une probabilité $p_1p_2^2$)
$s_2s_1s_2$	11101	(avec une probabilité $p_2p_1p_2$)
$s_2s_2s_1$	11110	(avec une probabilité $p_2^2p_1$)
$s_2s_2s_2$	11111	(avec une probabilité p_2^3)

La longueur moyenne du message est : $\frac{\mathrm{N}}{3}(p_1^3 + 3 \times 3p_1^2p_2 + 3 \times 5p_1p_2^2 + 5p_2^3) = 0{,}728\mathrm{N}$

ce qui est encore meilleur et quasiment optimal.
Mais d'où vient la formule de Shannon ?

Quantité d'information

Considérons N boîtes numérotées de 1 à N. Un individu A a caché au hasard un objet dans une de ces boîtes. Un individu B doit trouver le numéro de la boîte où est caché l'objet. Pour cela, il a le droit de poser des questions à l'individu A auxquelles celui-ci doit répondre sans mentir par OUI ou NON. Mais chaque question posée représente un coût à payer par l'individu B (par exemple un euro). Un individu C sait dans quelle boîte est caché l'objet. Il a la possibilité de vendre cette information à l'individu B. B n'acceptera ce marché que si le prix de C est inférieur ou égal au coût moyen que B devrait dépenser pour trouver la boîte en posant des questions à A. L'information détenue par C a donc un certain prix. Ce prix représente la quantité d'information représentée par la connaissance de la bonne boîte : c'est le nombre moyen de questions à poser pour identifier cette boîte. Comme plus haut, nous la noterons H.

Exemples :
Si $N = 1$, $H = 0$. Il n'y a qu'une seule boîte. Aucune question n'est nécessaire.
Si $N = 2$, $H = 1$. On demande si la bonne boîte est la boîte n°1. La réponse OUI ou NON détermine alors sans ambiguïté quelle est la boîte cherchée.
Si $N = 4$, $H = 2$. On demande si la boîte porte le n°1 ou 2. La réponse permet alors d'éliminer deux des boîtes et il suffit d'une dernière question pour trouver quelle est la bonne boîte par deux.
Si $N = 2^n$, $H = n$. On écrit les numéros des boîtes en base 2. Les numéros ont n chiffres binaires (de 00...0 à 11...1), et pour chaque rang de ces chiffres, on demande si le numéro de la boîte cherchée possède à ce rang le chiffre 0 ou le chiffre 1. En n questions, on a déterminé tous les chiffres binaires de la bonne boîte.
On est donc amené à poser $H = \log(N)$ questions, mais cette configuration ne se produit que dans le cas de N événements équiprobables.

Formule de Shannon

Supposons maintenant que les boîtes soient colorées, et qu'il y ait n_1 boîtes rouges. Supposons également que C sache que la boîte où est caché l'objet est rouge. Quel est le prix de cette information ? Sans cette information, le prix à payer est $\log(N)$. Muni de cette information, le prix à payer n'est plus que $\log(n_1)$. Le prix de l'information "*la boîte cherchée est rouge*" est donc $\log(N) - \log(n_1) = \log \frac{N}{n_1}$.

Supposons maintenant que les boîtes soient de diverses couleurs : n_1 boîtes de couleur C_1, n_2 boîtes de couleur C_2, ..., n_k boîtes de couleurs C_k, avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$. La personne C sait de quelle couleur est la boîte cherchée. Quel est le prix de cette information ? L'information "*la boîte est de couleur C_1*" vaut $\log \frac{N}{n_1}$, et cette éventualité a une probabilité $\frac{n_1}{N}$. L'information "*la boîte est de couleur C_2*" vaut $\log \frac{N}{n_2}$, et cette éventualité a une probabilité $\frac{n_2}{N}$, etc. Le prix moyen de l'information est donc $H = \frac{n_1}{N} \log \frac{N}{n_1} + \frac{n_2}{N} \log \frac{N}{n_2} + \ldots + \frac{n_k}{N} \log \frac{N}{n_k}$. Plus généralement, si on considère k événements disjoints de probabilités respectives
$p_1, p_2, \ldots, p_k$ avec $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, alors la quantité d'information correspondant à cette distribution de probabilité est $p_1 \log \frac{1}{p_1} + \ldots + p_k \log \frac{1}{p_k}$.

Trisecteur : commentaires sur le déroulement de la séquence

Pour l'équipe de secondes du lycée Janot de Sens : Jean Terreran et Richard Dalin

Introduction

Cette activité a été réalisée par une équipe de professeurs de secondes travaillant au lycée Catherine et Raymond Janot de Sens.
L'idée de cette séquence est venue à la suite d'un devoir sur la trisection d'un angle rendu par un élève de 1S ; celui-ci a proposé, sans le valider, l'appareil dont nous parlons dans cet article : il l'avait trouvé sur INTERNET.
Nous nous sommes alors posé la question de savoir si cet appareil était fiable et l'un d'entre nous a constaté que la démonstration était accessible aux élèves de seconde en utilisant les triangles isométriques.
Nous avons alors décidé de monter cette séquence.

Mise en place pratique de cette séquence
Cette séquence est prévue pendant une séance de module de seconde de 55 minutes :

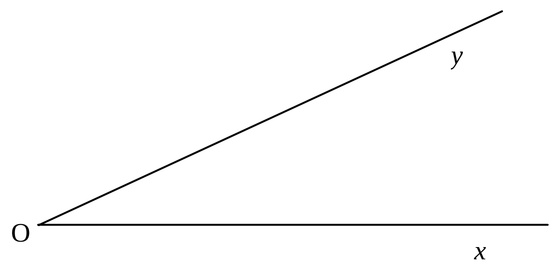
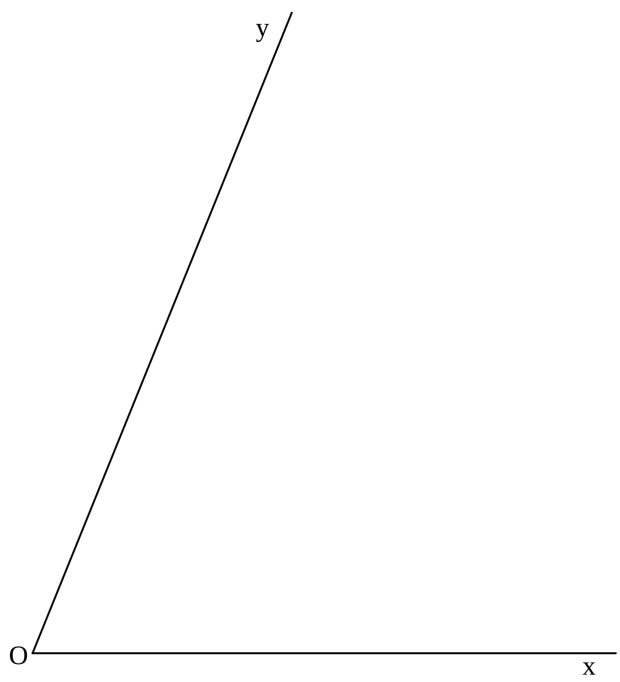
- les élèves sont en binôme.
- une introduction historique d'environ 5 minutes est prévue :
    - ❖ cette année, les élèves ont réalisé un dossier sur le nombre π après des recherches sur BCDI et Internet au CDI. Ils connaissaient donc l'impossibilité de la quadrature du cercle (construction à la règle et au compas d'un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné) ainsi que le principe général d'une construction à la règle et au compas.
    - ❖ Nous avons signalé l'impossibilité de la duplication du cube (la légende qui y est attachée : le doublement du volume d'un autel cubique pour s'attirer les faveurs des dieux) qui revient à construire un nombre dont le cube vaut 2.
    - ❖ Et nous avons présenté le troisième problème impossible pour les géomètres grecs : la trisection de l'angle. Nous avons insisté sur le fait que ces impossibilités pour les mathématiciens ne les ont pas découragés, mais au contraire, qu'elles les ont incités à chercher d'autres solutions, donnant naissance à de nouveaux développements des mathématiques : ces solutions utilisent le "mouvement", l'appareil que nous utilisons dans ce module en est un exemple.
- Chaque élève a un appareil qui a été photocopié sur transparent.

Document papier distribué aux élèves

2nde **Module** **Trisecteur**

Objectif *:* Justifier le mode d'emploi d'un appareil.
Travail : en binôme.

ACTIVITÉ

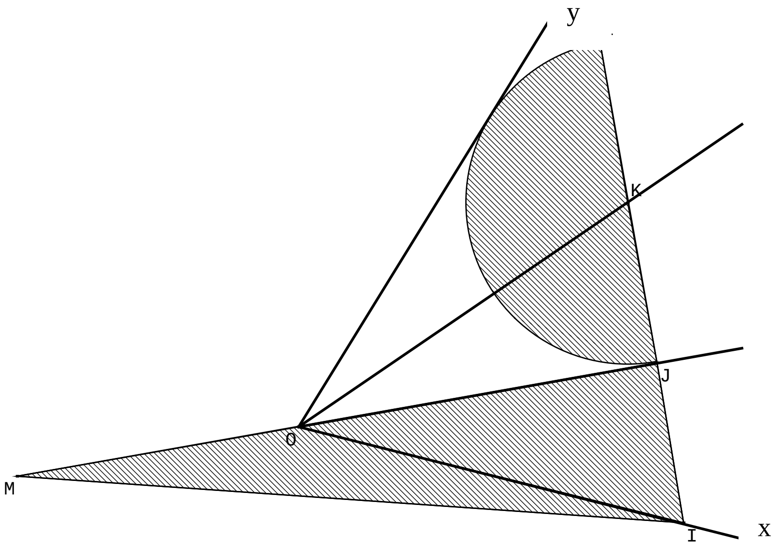
<table>
<tr><td>Ex 1 :
Construire à l'aide de la règle et du compas la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ ci-contre.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ex 2 :
A l'aide uniquement du compas et de la règle, couper l'angle droit ci-contre en trois angles égaux.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ex 3 :
Pour un angle quelconque la construction à la règle et au compas est impossible.
Heureusement un élève de 1ère a trouvé sur Internet un appareil de construction, appelé trisecteur à demander à votre professeur.
En voici la notice :
On doit poser l'appareil sur l'angle de façon à ce que :
la droite (MJ) passe par O.
le point I est sur Ox.
Faire glisser l'appareil, O restant sur (MJ) et I sur Ox jusqu'à ce que le demi-cercle soit tangent à Oy.
Marquer alors à l'aide de la pointe du compas les points J et K.
Enlever l'appareil et tracer les droites (OJ) et (OK).
Vérifier alors à l'aide du compas que l'on a coupé l'angle $\widehat{xOy}$ en trois angles égaux.</td><td></td></tr>
</table>

Démonstration : (validation de l'outil)

Impressionnés par la précision de cet appareil, on se demande si cette manipulation permet de partager **exactement** un angle quelconque en 3 angles égaux.
On utilise pour cela les caractéristiques de l'appareil décrites dans la notice suivante :

- I, J, K, L sont alignés de telle sorte que IJ = JK = KL.
- IJM est un triangle rectangle en J.
- K est le centre du demi-cercle passant par L et J. Il est tangent à Oy.

Voici comment l'on doit placer le trisecteur pour couper l'angle $\widehat{xOy}$ en trois secteurs égaux :

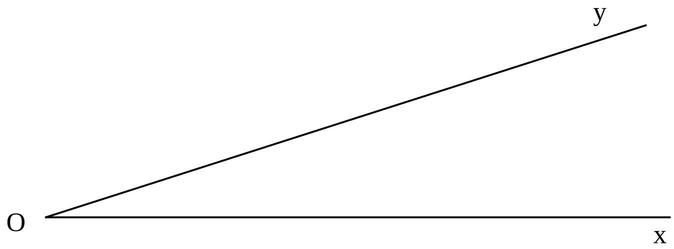


On appelle H le point de tangence du demi-cercle et de la demi-droite Oy : le marquer sur la figure.

1. Montrer que les triangles IOJ et JOK sont isométriques.
2. Montrer que les triangles JOK et OKH sont isométriques.
3. En déduire que les trois angles $\widehat{IOJ}$, $\widehat{JOK}$ et$\widehat{KOH}$ sont égaux.

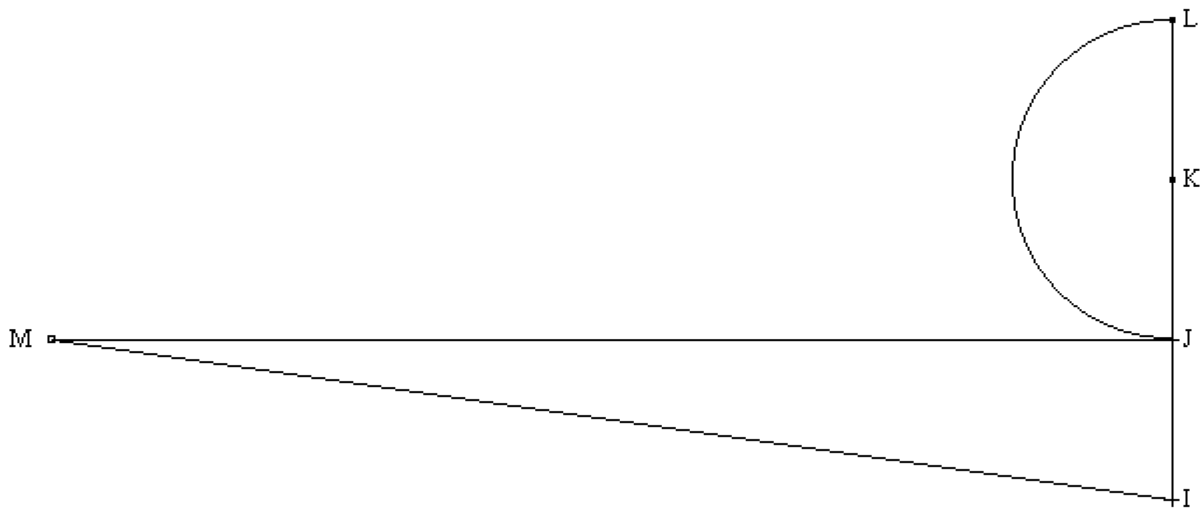
Pour ceux en avance

On donne l'angle $\widehat{xOy}$ ci-dessous.
On veut le partager à l'aide du trisecteur : quel problème rencontre-t-on ?
Dessiner Oz tel que $\widehat{yOz}$ soit le complémentaire de $\widehat{xOy}$.
Partager à l'aide du trisecteur cet angle $\widehat{yOz}$.
En utilisant l'exercice 2, en déduire la trisection de l'angle $\widehat{xOy}$.



Fin du module.

Figure photocopiée sur transparent et distribuée aux élèves



Réactions des élèves

Cette activité a été proposée à toute une classe d'un niveau correct en 2003-2004 (option ISI) et à deux classes en 2004-2005, l'une (option Arts Plastiques), l'autre option SES.
Les élèves ont été intéressés, se montrant très actifs, comprenant leurs erreurs et les corrigeant assez facilement.
Il a été proposé aux élèves de conserver l'appareil sur le transparent s'ils le désiraient : les réactions sont variables selon les classes, dans une ils sont presque tous repartis avec, dans une autre presque aucun.

Commentaires par exercice

ex 1 : Aucun problème particulier à signaler.

ex 2: Beaucoup de difficultés, certains flairent même un piège "vous venez de dire que la construction à la règle et au compas est impossible !".
Ceux qui réussissent construisent un triangle équilatéral de sommet O basé sur Ox.
D'autres coupent une première fois en 2, puis encore en 2, avant de s'apercevoir qu'ils obtiennent ainsi quatre angles égaux. Certains insistent dans cette voie en effaçant la première bissectrice tracée !
On avait choisi de les aider en leur rappelant le mode de construction d'un hexagone régulier dans un cercle, mais très peu la connaissaient.
En revanche dans une classe, on a parlé de la construction d'une rosace dans un cercle, ce qui les a beaucoup aidés.

ex 3 : La manipulation est en général, bien réussie. Quelques élèves cependant ne savent pas ce qu'est un cercle tangent à une droite et il faut les aider à positionner l'objet.
La vérification, en revanche, est très difficile :

- Il faut rappeler comment on compare deux angles, ou comment on construit un angle égal à un angle donné : constater que c'est en construisant des triangles isocèles isométriques ou des arcs de cercles isométriques est une révélation pour certains élèves pour qui compas était synonyme de cercle, et c'est tout.

- Quelques élèves ont tenté de copier la construction de l'ex 2 en traçant un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$, la corde correspondante étant alors partagée en trois après avoir été mesurée à la règle graduée. Il a fallu leur rappeler la définition d'une construction "à la règle et au compas" au sens antique.
- Un des binômes insiste car il se souvient du partage d'un segment grâce à Thalès ; ça y est, il a trouvé la construction si longtemps cherchée !
- Il faut alors leur montrer que les segments égaux obtenus ne donnent pas des angles égaux, contrairement à l'impression visuelle (on peut l'observer plus nettement sur un angle plus grand). Quelle déception !

ex 4 : 1° Pour montrer que IOJ et JOK sont isométriques, presque tous utilisent l'égalité des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{JOK}$: il faut insister sur le fait que c'est ce que l'on veut prouver !

2° La démonstration est plus difficile : chacun utilise bien les angles droits, mais rien à faire, les côtés égaux n'encadrent pas l'angle égal ! On peut alors leur suggérer d'utiliser une propriété bien connue du triangle rectangle pour montrer l'égalité du troisième côté.
Seul un binôme (deux bonnes élèves) a pensé à utiliser l'équidistance du point aux côtés de l'angle pour en déduire que (OK) est bissectrice de $\widehat{JOH}$. C'est d'autant plus méritoire que cette propriété avait été rencontrée "furtivement" en cours et que la formulation de la question ne les aiguillait guère dans cette voie : on peut alors se poser la question de la pertinence de la question 2.

3° La conclusion est vite faite.

Pour ceux en avance

Peu de binômes ont eu le temps d'aborder le problème. Des aides ont été nécessaires pour qu'ils réussissent. On aurait peut-être pu les laisser chercher plus longtemps.

Une autre activité est alors proposée : se servir du trisecteur comme bissecteur :

- la solution est trouvée rapidement : on fait glisser l'appareil comme précédemment jusqu'à ce que K vienne sur Oy.
- En revanche, faire glisser le cercle jusqu'à ce qu'il soit tangent aux deux côtés de l'angle est une méthode d'abord rejetée par les élèves, car ils y voient une infinité de solutions avant de se rendre compte (il faut les aider) que si le diamètre [LJ] "bouge", le centre du cercle reste fixe, et c'est ce qui compte.

Résolution de problèmes logiques par le calcul

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

- Voici deux problèmes qu'on classe habituellement dans les problèmes de "logique" :

PB-1 On retire d'une population les gros méchants, les gentils maigres, les grands gentils, les petits maigres, et les gentils petits gros. Qui reste ?

PB-2 Lors d'une enquête, trois suspects A, B, C sont interrogés. A dit que "B ment". B dit que "C ment". C dit que "A ou B ment". Qui ment ?

On peut parfaitement résoudre ces deux problèmes en raisonnant sans outil spécial, autre que les cellules grises, et ces deux exercices sont laissés au lecteur.
Mais il est intéressant de mettre au point une méthode (algèbre) qui permette la mise en équation et la résolution systématique (algorithmique) par le calcul dans cette algèbre.
C'est ce qu'a fait Monsieur George Boole vers 1850 en procédant à peu près ainsi :

- ***Première étape* : définition des variables du problème.**

On commence par définir après analyse du problème, une ou plusieurs "variables binaires" qui, comme leur nom ne l'indique pas, sont des fonctions qui, à chaque individu du problème, associent **deux** "valeurs logiques" ou "états logiques". Ces valeurs logiques, selon la nature du problème, seront par exemple :

"GROS ou MAIGRE" pour un individu du problème 1 ;
"DIT LA VÉRITE ou MENT" pour un individu du problème 2 ;
"PASSE ou NE PASSE PAS" pour le courant électrique d'une entrée ou une sortie de porte logique dans un ordinateur.
Etc.

Il est essentiel que les variables soient binaires, c'est-à-dire qu'elles ne puissent prendre que deux états.
Ainsi, la variable prenant pour un élève donné dans une matière donnée l'une des "valeurs logiques" MÉDIOCRE, MOYEN, BON ne pourrait pas, telle qu'elle, participer au calcul.

Dans PB-1 trois variables binaires notées a, b, c sont nécessaires dans un premier temps :
Elles sont définies ainsi :

$a(x) = 1$ si l'individu x est gros,
$a(x) = 0$ si l'individu x est maigre,

$b(x) = 1$ si l'individu x est grand,
$b(x) = 0$ si l'individu x est petit,

$c(x) = 1$ si l'individu x est gentil,
$c(x) = 0$ si l'individu x est méchant.

L'algèbre de Boole qu'on va définir sera donc assez grossière, puisqu'on y est soit gros soit maigre, soit grand soit petit, soit gentil soit méchant !
Comme c'est l'usage, les "valeurs logiques" quelles qu'elles soient, seront codées 1 et 0, ce qui est commode pour le calcul futur, mais évidemment dangereux car on risque d'interpréter malgré soi ces symboles comme des nombres.

Comme dans toute nouvelle théorie, une des premières choses qu'on fait c'est des abus de notation !
Allons-y : On notera dans la suite pour un individu x donné, s'il n'y a pas ambiguïté :

$a = 1$ pour $a(x) = 1$ si l'individu x est gros,
$a = 0$ pour $a(x) = 0$ si l'individu x est maigre,

et de même pour toutes les autres variables.
Remarque : le fait d'avoir choisi "1" pour le code de "gros" et "0" pour le code de "maigre" est arbitraire. On aurait aussi bien pu choisir le contraire.
Cette première étape est la plus facile.

- Deuxième étape : la mise en équation.

Cette étape va nécessiter de disposer d'autant d'opérations booléennes que d'"opérations logiques".
Toute la logique élémentaire (la nôtre !) peut être écrite avec les trois opérations (appelées aussi connecteurs) NON, ET, OU.
Par exemple : si A, B désignent des propositions logiques (caractérisées par leur valeur logique vrai ou faux, indépendamment de leur contenu), ces opérations sont :

La négation :	A	$\rightarrow$	NON (A)
La conjonction :	(A ; B)	$\rightarrow$	A ET B
La disjonction :	(A ; B)	$\rightarrow$	A OU B

Pour les autres connecteurs, il suffit de combiner les 3 connecteurs précédents :
Ainsi :

- Pour exprimer "A mais pas B" on écrira : A ET (NON B)
- Pour exprimer "A ou bien B" on écrira :
  (A ET (NON B)) OU (B ET (NON A)) [*On reconnaît le OU exclusif*]
- Pour exprimer "ni A ni B" on écrira : (NON A) ET (NON B)

Le plus difficile est l'implication logique :

- Pour exprimer "A implique B" on écrira : B OU (NON A)

En effet : "A implique B" est vraie (par définition) **sauf** si (A est vraie et B fausse).
Donc : "A implique B" est vraie sauf si (A ET (NON B)) est vraie,
"A implique B" est vraie si et seulement si (A ET (NON B)) est fausse,
"A implique B" est vraie si et seulement si NON(A ET (NON B)) est vraie,
"A implique B" est vraie si et seulement si NON(A) OU B est vraie.

On a utilisé au passage les théorèmes logiques :
NON (NON X)) équivaut* à X
NON (X ET Y) équivaut à (NON X) OU (NON Y)
qu'on démontrera plus tard par le calcul, en algèbre booléenne.

* *[L'équivalence logique entre deux propositions, dont il est question plus haut, signifie simplement que ces propositions sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses]

Voici les trois opérations booléennes correspondantes aux trois connecteurs précités :

A chaque variable booléenne a on définit sa <u>complémentaire</u> notée $\overline{a}$ par :
$\overline{a} = 1 \Leftrightarrow a = 0$ autrement dit NON ($a = 1$)

A chaque couple de variables booléennes a, b on définit :
Leur <u>produit</u> p noté $p = a \,.\, b$ défini par $a \,.\, b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ET $b = 1$
Leur <u>somme</u> s notée $s = a + b$ définie par $a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ OU $b = 1$

Le but de George Boole est presque atteint : toute affirmation d'un individu donné faisant intervenir un nombre fini de variables logiques pourra se traduire par une équation du type E (a b c ...) $= 1$ où a, b, c, ...sont les variables logiques intervenant dans l'affirmation, et E une expression composée de ces variables (éventuellement complémentées) et des opérations " . " ; " + " précédemment définies.
Ainsi : dans le problème 1, l'affirmation : "x est un méchant gros" qui signifie "x est méchant ET x est gros" se traduira par : "$c = 0$ ET $a = 1$" puis par "$\overline{c} = 1$ ET $a = 1$" et enfin par $\overline{c} \,.\, a = 1$
En accord avec les définitions précédentes des opérations booléennes.
L'habitude est de définir les trois opérations booléennes par leur table de vérité, dans lesquelles ne figurent par économie, que les codes 0 ou 1 :

Voici la table de vérité de la <u>complémentation</u>
traduisant la définition :

$\overline{a} = 1 \Leftrightarrow$ NON ($a = 1$)

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Voici les tables de vérité des opérations
<u>produit et somme</u>
traduisant leur définition :

$a \,.\, b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ET $b = 1$
$a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ OU $b = 1$

a	b	$a \,.\, b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Si le produit booléen n'a rien de choquant puisque parfaitement identique au produit numérique dans le sous-ensemble de R : $\{0 ; 1\}$, il n'en est pas de même pour la somme booléenne puisque "$1 + 1 = 1$" .
Quand on enseigne ceci aux élèves (BTS informatique par exemple) c'est un peu difficile au début, mais on s'y fait vite.
Ce sont ces tables de vérité qui servent à câbler les portes logiques des ordinateurs, leur permettant de traiter la totalité de leurs tâches.

La deuxième étape est presque terminée, il reste à préciser ce qu'on entend par "égalité de deux variables booléennes u et v" . Rien de plus naturel, et on n'a pas le choix ! :

On dit que <u>deux variables booléennes</u> u et v sont <u>égales</u> si elles ont la même table de vérité, ou ce qui revient au même : si pour tout individu x : $u(x) = v(x)$

Effectuons la mise en équation du problème 1 :

Puisque la question était : Qui reste après avoir retiré les "gros méchants" … ?, il nous faut une quatrième variable disons r pour coder les individus retirés. On pose donc :

$r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x$ est retiré de la population [$r = 0$ sinon].

On a alors :

$r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x$ est retiré $\quad \Leftrightarrow \quad$ (x est gros ET x est méchant) OU (x est gentil ET x est maigre) OU (x est grand ET x est gentil) OU (x est petit ET x est maigre) OU (x est gentil ET x est petit ET x est gros).

Pour obtenir l'équation, la seule précaution à prendre est de tout coder avec "1" quitte à utiliser la complémentation, après quoi, il suffit de remplacer ET par "$.$" et OU par "$+$". Enfantin :

$r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x$ est retiré

$\Leftrightarrow$ ($a = 1$ ET $c = 0$) OU ($c = 1$ ET $a = 0$) OU ($b = 1$ ET $c = 1$) OU ($b = 0$ ET $a = 0$) OU ($c = 0$ ET $b = 0$ ET $a = 1$)

$\Leftrightarrow$ ($a = 1$ ET $\overline{c} = 1$) OU ($c = 1$ ET $\overline{a} = 1$) OU ($b = 1$ ET $c = 1$) OU ($\overline{b} = 1$ ET $\overline{a} = 1$) OU ($\overline{c} = 1$ ET $\overline{b} = 1$ ET $a = 1$)

$\Leftrightarrow$ ($a \,.\, \overline{c} = 1$) OU ($c \,.\, \overline{a} = 1$) OU ($b \,.\, c = 1$) OU ($\overline{b} \,.\, \overline{a} = 1$) OU ($\overline{c} \,.\, \overline{b} \,.\, a = 1$)

$\Leftrightarrow \quad a \,.\, \overline{c} + c \,.\, \overline{a} + b \,.\, c + \overline{b} \,.\, \overline{a} + \overline{c} \,.\, \overline{b} \,.\, a = 1$

La suppression des parenthèses n'étant possible qu'à condition de convenir que la multiplication est prioritaire sur l'addition, ce qu'on s'empresse de faire.

Si l'on examine les deux extrémités de la chaîne d'équivalences précédente, et si on se réfère à la définition de l'égalité booléenne, on a :

$r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \,.\, \overline{c} + c \,.\, \overline{a} + b \,.\, c + \overline{b} \,.\, \overline{a} + \overline{c} \,.\, \overline{b} \,.\, a = 1$

ce qui permet d'écrire : $\quad r = a \,.\, \overline{c} + c \,.\, \overline{a} + b \,.\, c + \overline{b} \,.\, \overline{a} + \overline{c} \,.\, \overline{b} \,.\, a$

On peut dire que r est le "polynôme" associé à l'ensemble des individus retirés.
D'une manière générale, à tout ensemble d'individus E définis à partir d'un nombre fini de variables binaires a, b, c…, on peut, comme ci-dessus, associer un "polynôme" P (a, b, c...). Il s'agit effectivement d'une somme (booléenne) de "monômes" avec la particularité que chaque variable peut être complémentée ou non.
Ce polynôme s'interprète ainsi : $\quad x \in E \Leftrightarrow P(a, b, c...) = 1$.

- Troisième étape : la résolution de l'équation. (Et la solution du problème !)

Pour résoudre l'équation $r = 0$ c'est-à-dire trouver les codes (0 ou 1) des trois variables a, b, c des individus qui restent (puisque $r = 1$ code ceux qui sont retirés), on a besoin de connaître les règles de calcul de cette algèbre un peu spéciale.
Mais avant, il faut encore définir les deux "constantes" booléennes : **0** ; **1**
Ce sont les variables (fonctions constantes) :

0 (qui vaut 0 pour tout individu x)
1 (qui vaut 1 pour tout individu x)

Toutes les règles de calcul booléen se démontrent facilement à l'aide des tables de vérité.

Ainsi : la propriété $\overline{\overline{a}} = a$ se démontre instantanément en comparant les tables de vérité des deux membres :

a	$\overline{a}$	$\overline{\overline{a}}$
0	1	0
1	0	1

De même, les fameuses lois de Morgan comme $\overline{a+b} = \overline{a} \,.\, \overline{b}$ se démontrent de la même manière, en comparant les tables de vérité des deux membres :

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a + b$	$\overline{a+b}$	$\overline{a} \,.\, \overline{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

La propriété $a + \overline{a} = \mathbf{1}$ où intervient la constante **1** se démontre ainsi :

a	$\overline{a}$	$a+\overline{a}$
0	1	1
1	0	1

On constate que $a+\overline{a}$ est la variable qui vaut toujours 1 ; celle qu'on a précisément notée **1**.
D'où l'égalité voulue.
Remarquons la distinction entre le code "1" et la variable booléenne constante **1**.

Voici le formulaire complet :
(Ce formulaire est "isomorphe" à celui du calcul ensembliste dans un référentiel Ω, où les notations booléennes $\mathbf{0}$; $\mathbf{1}$; $\overline{a}$; $a + b$; $a \,.\, b$ *deviennent :*

$\varnothing$; Ω ; $\overline{A}$; $A \cup B$; $A \cap B$.

L'embêtant avec le calcul ensembliste c'est que les expressions deviennent vite illisibles.)

$\overline{\mathbf{0}}=\mathbf{1} \quad \overline{\mathbf{1}}=\mathbf{0}$	$\overline{\overline{a}} = a$
$a + b = b + a$ $a + \mathbf{0} = a$ $a + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ $a + a = a$ $a + \overline{a} = \mathbf{1}$	$a \,.\, b = b \,.\, a$ $a \,.\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$ $a \,.\, \mathbf{1} = a$ $a \,.\, a = a$ $a \,.\, \overline{a} = \mathbf{0}$
$\overline{a+b} = \overline{a} \,.\, \overline{b}$ $\overline{a \,.\, b} = \overline{a}+\overline{b}$	les fameuses lois de MORGAN que les élèves ont bien du mal à appliquer
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$
$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$ $a + b \,.\, c = (a + b) \,.\, (a + c)$	

Cette dernière propriété semble curieuse et pourtant, si on compare les colonnes 5 et 8 :

a	b	c	$b.\,c$	$a+\ b.\,c$	$a+b$	$a+c$	$(a+b)\,.\,(a+c)$
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Mentionnons aussi les lois dites <u>d'absorption</u>, très utiles pour les simplifications algébriques :

$$a + a\,.b = a$$
$$a + \overline{a}\,.\,b = a + b$$

dont les démonstrations sont immédiates à partir du formulaire précédent :

$a + a.\,b = a\,.\,\mathbf{1} + \ a.\,b = a\,.\,(\mathbf{1} + b) = a\,.\,\mathbf{1} = a$
$a+\overline{a}\,.b=(a+\overline{a}).(a+b)=\mathbf{1}.(a+b)=a+b$

On va enfin pouvoir "calculer" le code des individus qui restent dans le problème 1 :
Les individus retirés vérifient l'équation : $r = a\,.\,\overline{c}\ + c\ \,.\,\overline{a}\ + b\,.\,c\ + \overline{b}\,.\,\overline{a}\ + \overline{c}\,.\,\overline{b}\,.\,a = 1$
Donc ceux qui restent vérifient l'équation $r = 0$ ou $\overline{r} = 1$
D'après les lois de Morgan :

$\overline{r} = (\overline{a}+c).(\overline{c}+a).\,(\overline{b}+\overline{c}).\,(b+a).\,(c+b+\overline{a})$ qu'on développe en utilisant la distributivité, et qu'on simplifie avec le formulaire, essentiellement $a\,.\,\overline{a} = \mathbf{0}$ et $a + \mathbf{0} = a$:
$\overline{r} = \underbrace{(\overline{a}+c).(\overline{c}+a)}.(\overline{b}+\overline{c})\ .\ (b+a)\ .\ (c+b+\overline{a})$ (les accolades signalent le produit effectué.)

$$\overline{r} = (\overline{a}\ .\ \overline{c}+a\ .\ c)\ .\ \underbrace{(\overline{b}+\overline{c})\ .\ (b+a)}.\ (c+b+\overline{a})$$

$$\overline{r} = (\overline{a}\ .\ \overline{c}+a\ .\ c)\ .\ \underbrace{(\overline{b}.\ a+\overline{c}\ .\ b\ +\ \overline{c}\ .\ a)\ .\ (c+b+\overline{a})}$$

$\overline{r} = (\overline{a}.\overline{c} + a.c).(a.\,\overline{b}.\,\overline{c} + a.\,\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c} + b\,.\,\overline{c})$ On utilise ici la propriété : $x + x = x$

En multipliant les deux facteurs restant, on trouve : $\overline{r}=\overline{a}.b.\,\overline{c}$ (tous les autres termes étant nuls).
Puisque les individus qui restent vérifient l'équation $\overline{r} = 1$, il n'y a plus qu'à résoudre : $\overline{a}.b.\,\overline{c} = 1$
c'est-à-dire : $\overline{a} = 1$ ET $b = 1$ ET $\overline{c} = 1$
c'est-à-dire : $a = 0$ ET $b = 1$ ET $c = 0$
Traduisons : les individus qui restent sont donc les "**grands méchants maigres**".

- Résolvons pour finir le Problème 2 (un peu plus difficile) :

Pour rester dans le binaire, on est obligé de supposer qu'un individu : ou bien ment toujours, ou bien dit toujours la vérité. On va retrouver nos 3 étapes :

- <u>Première étape</u> : définition des variables du problème.
- <u>Deuxième étape</u> : la mise en équation.
- <u>Troisième étape</u> : la résolution de l'équation.

Posons :

$a = 1$ si A dit la vérité, $b = 1$ si B dit la vérité, $c = 1$ si C dit la vérité,
$a = 0$ si A ment, $b = 0$ si B ment, $c = 0$ si C ment.

"A dit que B ment" signifie : (A dit la vérité ET B ment) OU (A ment ET B dit la vérité)
qui se traduit par : ($a = 1$ ET $\overline{b} = 1$) OU ($\overline{a} = 1$ ET $b = 1$) soit $a \,.\, \overline{b} + \overline{a} \,.\, b = 1$
De même : "B dit que C ment" se traduit par : $b \,.\, \overline{c} + \overline{b} \,.\, c = 1$
Enfin "C dit que (A ou B ment)" signifie :
(C dit la vérité ET (A ment OU B ment)) OU (C ment ET (A dit la vérité ET B dit la vérité))
Ce qui se traduit par : $c \,.\, (\overline{a} + \overline{b}) + a \,.\, b \,.\, \overline{c} = 1$
Le problème 2, qui est la conjonction des trois affirmations a donc pour équation :
$(a \,.\, \overline{b} + \overline{a} \,.\, b) \,.\, (b \,.\, \overline{c} + \overline{b} \,.\, c) \,.\, (c \,.\, \overline{a} + c . \overline{b} + a \,.\, b \,.\, \overline{c}) = 1$
On résout comme dans PB-1 par multiplications et simplifications, ce qui amène à
$a \,.\, \overline{b} \,.\, c = 1$ soit $a = 1$ ET $\overline{b} = 1$ ET $c = 1$
Ce qui prouve que la seule solution au problème est : **seul B ment**.

- Un exercice pour finir :

A dit que "ou bien B ment ou bien C ment"
B dit que "A ou C ment"
C dit que "si D ment alors A aussi"
D dit que "A et B disent la vérité"

Qui ment ?

L'évolution d'un problème "pour chercher" en CM2

Nicole BONNET - professeur de mathématiques à l'IUFM de Dijon, membre de la COPIRELEM,[1]
Sylvie CLÉMENT-MARTIN : professeur des écoles, maître formateur à l'école Chevreul de Dijon et ses élèves de CM2 (année 2004-2005)

I. Introduction

L'expérience que je vais relater a été le prélude à un Atelier de Pratique Pédagogique avec un groupe d'une dizaine de PE2 (professeurs stagiaires en deuxième année d'IUFM à Dijon). Les séances réalisées par les stagiaires ne sont pas décrites, ni analysées dans cet article car il serait trop long…

La première séance de cet APP dure trois heures. Les PE2 apprennent par compagnonnage : la PEMF (Sylvie) mettant en œuvre, dans sa classe, une séance préparée par nous deux. Lors des deux séances suivantes, les stagiaires s'exercent en poursuivant sur le thème initié (les problèmes proposés sont du même type avec un habillage différent et des nombres différents).

Nous avions fait le choix, le maître formateur et moi-même de travailler sur la résolution de problèmes, et nous avons souhaité proposer à ses élèves de CM2, une autre forme du problème "des carrés et des triangles" décrit dans le Document d'accompagnement des programmes[2] sur les "problèmes pour chercher". Bien entendu, les stagiaires sont invités à lire le document, et le débat que nous avons après qu'ils aient observé la séance permet de réfléchir ensemble et d'approfondir le thème. Il permet aussi d'élargir leurs connaissances sur les divers types de problèmes, dont les "situations-problèmes". Un dialogue s'engage également sur les "activités d'aide à la résolution de problèmes[3]", et sur les controverses qu'elles provoquent.

Lors du débat, j'ai mis en garde les stagiaires sur le fait qu'il y a différents types de problèmes qui permettent la mise en relation des savoirs. Il ne faut donc pas focaliser sur les "problèmes pour chercher", mais les intégrer dans des situations d'apprentissage. Si on ne procède que par ce type de problèmes, la construction des savoirs ne sera certainement pas faite totalement.

Les textes officiels distinguent quatre fonctions de la résolution de problèmes.

- **Les problèmes "pour apprendre"** : leur résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance (anciennes situations-problèmes).
- **Les problèmes "pour s'entraîner"**, destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.
- **Les problèmes "pour approfondir"**, plus complexes que les précédents, dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.
- **Les problèmes "pour chercher"**, centrés sur le développement des capacités à chercher : pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte (s'il y en a une !) et l'apprentissage de celle-ci n'est pas encore un objectif visé.

"Les savoirs fondamentaux de l'école" passent au travers de la résolution de problèmes disent encore les textes officiels.

La question qui revient souvent est : comment rétablir et/ou conforter une attitude positive des élèves face aux problèmes ? Les stagiaires évoquent la lassitude de ceux-ci face aux problèmes

---

[1] COPIRELEM : commission inter IREM pour l'école élémentaire
[2] « Les problèmes pour chercher" pages 7 à 14 CNDP applicables dès la rentrée 2003.
[3]Voir les articles de grand N cités en bibliographie

"traditionnels" que l'on trouve dans les manuels. Si les enfants les résolvent, c'est souvent sans grande conviction, pour faire "leur métier d'élève", pour faire plaisir au maître et aux parents…
Un autre point soulevé est celui des évaluations nationales qui fournissent chaque année des résultats qui interrogent. Elles nous donnent des indices sur les performances en résolution de problèmes d'élèves de primaire. En 2004, le score moyen concernant la résolution de problème a été de 48,4%, pourcentage relativement mauvais face aux autres scores, (travaux géométriques 60,1% ; numération et écriture des nombres 70,1% ; traitements opératoires 68,6% ; traitement de l'information 75%).

Un élément de réponse concernant ces interrogations pourrait se trouver dans les I.O. de 2002. Elles ont permis une évolution, grâce à la promotion d'une nouvelle sorte de problèmes : les "problèmes pour chercher". Elles renforcent l'utilisation des problèmes dans l'enseignement, elles insistent sur le point suivant -qui n'est pas une découverte en soi- : plus les connaissances seront rendues opératoires au travers de la résolution de problèmes, mieux elles seront acceptées des élèves et surtout construites de manière plus pertinente et plus durable. Il est aussi essentiel qu'elles prennent du sens et ne le perdent pas en cours de route.
Lors du dialogue avec les PE2, je cite également des auteurs qui confirment :
"Dès leur plus jeune âge, les élèves doivent être confrontés à des pratiques mathématisantes : chercher, expliquer, argumenter, prouver, organiser…" Roland Charnay.
"C'est dans l'activité de résolution de problèmes que se trouve la source de la connaissance" : J. Julo.

II. Les problèmes pour chercher

Pourquoi donner aux élèves des "problèmes pour chercher" ? Brièvement la réponse peut se développer en cinq points :

- développer la capacité de l'élève à **faire face à des situations inédites ;**
- aider l'élève à prendre conscience de **la puissance de ses connaissances ;**
- valoriser **des comportements et des méthodes** essentiels pour la construction des savoirs ;
- développer les **capacités argumentatives** de l'élève ;
- ce type d'activité contribue à **l'éducation civique** des élèves.

Les caractéristiques du "problème pour chercher" sont les suivantes :

- situations proposées sous des formes variées ;
- les élèves peuvent facilement comprendre la situation et la tâche demandée, et s'y engager avec leurs connaissances antérieures ;
- le problème est "consistant" ;
- résoudre ce problème est un "défi" pour les élèves ;
- la validation de la solution est à la charge des élèves.

L'enseignement classique apporte des réponses à des questions qui n'ont pas été posées. Même si celui-ci n'est pas le modèle prépondérant à l'école élémentaire, les stagiaires PE2 ont souvent tendance à penser leurs leçons de la même manière qu'ils les ont vécues dans leur scolarité. L'enseignement par les problèmes se propose, à l'inverse, d'enseigner aux élèves les problèmes avant de leur enseigner les connaissances qui permettent de les traiter efficacement, autrement dit, de fixer un enjeu pour l'apprentissage, celui de devenir capable de résoudre les problèmes posés. C'est la fonction même des "problèmes pour apprendre", mais les "problèmes pour chercher" contribuent aussi à cet objectif.

Lors de la dévolution[4] d'un problème, deux facteurs sont à ne pas négliger, outre le contrat didactique mis en place dans la classe.

- **Le rôle du contexte** : si le contexte n'est pas suffisamment évocateur pour l'élève, il ne peut pas démarrer. Ainsi, il faut parfois inciter les élèves à simuler la situation en ayant prévu du matériel approprié, ou un jeu de questions appropriées ou des aides écrites qui ne dénatureraient pas le problème et qui n'en donneraient pas la solution.
  Dans le problème proposé, le contexte est celui d'une situation de la vie courante : cartes à jouer que l'on va distribuer, questions qui se posent à leur propos. Le jeu est au départ un peu mystérieux et suffisamment dépaysant pour que les élèves se sentent motivés.

Mais le problème mis en situation dans cet A.P.P. va permettre d'insister sur le deuxième point :

- **Le rôle de la présentation du problème :** la présentation a une réelle influence. Je pense que si le problème avait été proposé de manière traditionnelle avec un texte écrit au tableau ou bien distribué aux élèves sur des fiches photocopiées, leurs recherches, leurs démarches et leurs résultats n'auraient pas été identiques à ceux de cette expérimentation.
  Dans le problème proposé le jeu de cartes permet une entrée "active" dans le questionnement. Les élèves vont vivre une situation théâtralisée (sans excès). Elle se calque sur la vie qui ne nous propose jamais des problèmes épurés (comme trop souvent ceux proposés par les stagiaires).

III. Le problème pour chercher : "les chèvres et les scarabées"

1. Le problème et sa mise en oeuvre

J'ai exposé le problème au maître formateur (abruptement car Sylvie est une adulte qui n'est pas en phase d'apprentissage comme ses élèves) :
"Il s'agit d'une adaptation du problème donné dans les documents d'accompagnement des programmes. Le problème est le suivant : "Connaissant le nombre de têtes et le nombre de pattes, il s'agit de trouver combien on a tiré de cartes chèvres et de cartes scarabées[5]."
J'ai donné un exemple numérique : 20 têtes et 104 pattes (Ces nombres ne seront pas ceux de la leçon, bien entendu).
La solution mathématique est : (6 x 12) + (8 x 4).
Le maître en comprend tous les implicites. Il est satisfait lorsqu'il a écrit cette égalité.
Après une brève réflexion Sylvie m'a donc répondu : "c'est facile, ils vont trouver tout de suite, mes élèves sont assez forts en calcul (mental ou écrit)"
Malgré tout, elle a accepté de se prêter à l'expérience, avec une dévolution plus travaillée que celle de mon exposition et qui ressemble à celle du document pré-cité.

---

[4] Dans l'analyse du déroulement d'une leçon, on parle usuellement de la phase de dévolution qui généralement est la première dans la chronologie de son déroulement.
"Il ne suffit pas de "communiquer" un problème à un élève pour que ce problème devienne son problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre." G. Brousseau
"La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, (consigne, règles, but, état final…) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité du résultat qu'il doit chercher." G. Brousseau.
C'est donc l'ensemble des conditions qui permet à l'élève de s'approprier la situation. Bien souvent, la consigne du maître ne suffit pas à réaliser la dévolution de la situation. Celle-ci fait intervenir des formulations des élèves, des exemples, le matériel lui-même (qui peut être implicitement porteur de son mode d'emploi), etc. La dévolution fait appel à la motivation des élèves : ils acceptent la situation que l'on propose.
[5] Voir plus bas un exemple de ces cartes.

Il nous a semblé que ce problème permettait, lorsqu'il était présenté d'une certaine manière, de développer la culture mathématique des élèves, mais aussi de travailler sur le sens des écritures mathématiques. Il permet aussi une théâtralisation et Sylvie, qui est très "comédienne", s'est tout de suite investie dans ce rôle. La deuxième étape décrite dans le chapitre III a en outre favorisé, pour les élèves, une compréhension plus fine du monde. Ils ont dû aiguiser leurs capacités à argumenter, à débattre, à ne pas se laisser influencer. Les mathématiques leur ont permis de faire grandir le futur citoyen qui ne s'en laisse pas conter par d'autres…

Revenons au problème initial : la fiche de préparation de Sylvie a été pensée de la manière suivante :

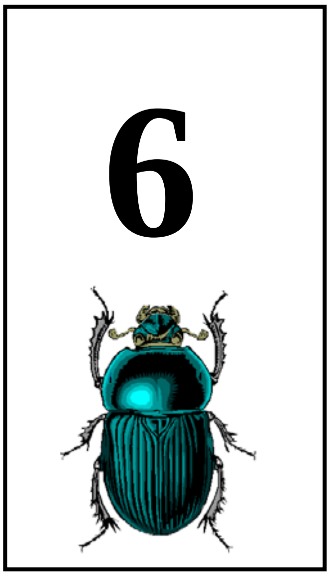
		Remarques faites dans l'action
Organisation	La classe est partagée en groupes de 3 ou 4 élèves. Il y a 7 groupes.	
Matériel	18 cartes "chèvres" et 18 cartes "scarabées" bien mélangées, des feuilles de brouillon, du papier affiche, des feutres	
Modalité	Recherche individuelle puis collective	
Déroulement **Phase 1** **5 à 7 min**	Dévolution : "aujourd'hui, nous allons travailler à l'aide d'un jeu de cartes que voici. Sur les cartes qui représentent des chèvres est inscrit le chiffre 4 sur les cartes qui représentent des scarabées est inscrit le chiffre 6. Pourquoi ? Déroulement : la maîtresse distribue trois cartes par groupes. Les élèves devront ensuite le redéposer dans une boîte ouverte et initialement vide. Elle demande combien de cartes ont été distribuées. Elle se cache pour ne pas montrer les cartes et pour compter le nombre total de pattes des animaux. Elle a préparé la phrase au tableau : "J'ai au total … pattes et … têtes" ; la consigne suivante est : "qui peut me dire ce que l'on doit chercher ?" Le problème est donc : "J'ai au total 120 pattes et 21 têtes. Combien a-t-on tiré de cartes chèvres et combien de cartes scarabées ?"	Les élèves trouvent rapidement qu'il s'agit du nombre de pattes des animaux. On se met d'accord là-dessus. Les élèves trouvent le nombre : "3 fois le nombre de groupes" soit 21 cartes Elle trouve au total 120 pattes et 21 têtes. Après une brève discussion les élèves s'entendent : il faut chercher combien il y a de cartes "chèvres" et combien de cartes "scarabées" dans la boîte.

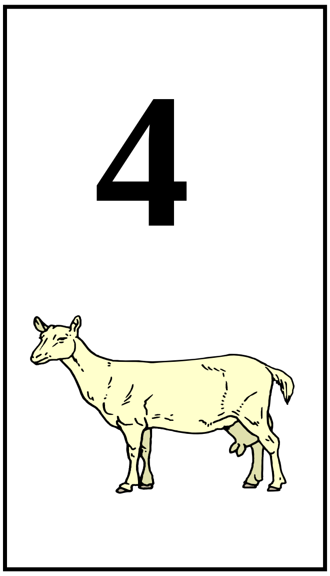
Phase 2 **5min**	Phase de recherche individuelle. Chaque enfant s'imprègne du problème et se lance dans quelques calculs	A ce stade, on perçoit bien la difficulté du contexte qui perturbe les élèves. Certains vont jusqu'à ajouter le nombre de pattes et le nombre de têtes. Un questionnement leur montre rapidement leur erreur. Ils sont désarmés face à ce problème peu habituel. Cependant, le plaisir de chercher vient de lui-même. Le problème est motivant pour les élèves
Phase 3 **20 min**	Phase de recherche en groupes Les élèves confrontent leurs idées au sein du groupe. Ils doivent se mettre d'accord et rédiger une affiche qui raconte leur recherche. Pendant ce temps, la maîtresse circule dans les groupes, étudie les différentes stratégies et identifie les difficultés rencontrées.	Les discussions vont bon train. Certains groupes trouvent très rapidement une solution, mais oublient une contrainte[6], ce qui fait qu'elle est invalidée. Les élèves apprennent à raisonner et à argumenter avec leurs pairs Un groupe trouve tout de suite la solution, un peu par hasard. D'autres groupes font des ajustements. Ils se rendent compte que lorsque l'on remplace une "chèvre" par un "scarabée", on perd deux pattes (et inversement).
Phase 4 **10 min**	Mise en commun Chaque rapporteur vient présenter sa proposition. Toutes les affiches sont scotchées au tableau. La classe est invitée à faire des remarques sur les différentes productions.	Ici, dans cette classe de CM2, les procédures sont toutes calculatoires, aucun élève n'a fait de dessin ou de schéma spontanément[7]. (En CE2 pour le problème des "carrés et des triangles", les procédures par dessin sont nombreuses et très efficaces)
Phase 5 **5 min**	Validation et synthèse. La maîtresse fait émerger un doute : "est-ce bien la seule et véritable solution ?" La vérification ultime se fait par la découverte des cartes qui se trouvent dans la boîte. Le comptage des différentes cartes est la preuve matérielle de la véracité de la solution mathématique trouvée.	Cette question déroute les élèves. Certains vont même jusqu'à affirmer qu'il y a sûrement d'autres solutions… Une relance peut être proposée, mais aucun calcul ne permet de trouver une égalité qui prenne en compte les deux contraintes.

[6] Il s'est avéré judicieux que les élèves aient en main quelques cartes en début de séance car j'ai pu observer un groupe qui avait trouvé comme solution : "20 chèvres". Lors de la rédaction de cette solution, un élève du groupe s'est soudainement exclamé : "c'est pas possible car quand la maîtresse nous a distribué les cartes, on avait une carte "scarabée". Il ne peut pas y en avoir zéro !" (Il y avait également l'erreur commise sur le nombre de têtes et dont ils ne s'étaient pas rendu compte.)

[7] Il s'agit d'une classe d'école d'application où de réels efforts ont été faits pour la mémorisation des tables de multiplication. Le fait de faire des schémas induit des procédures additives que ces élèves se sont interdites (Effet de contrat didactique implicite) .

Exemples de cartes utilisées lors de la séance (on doit en avoir une vingtaine de chaque)





2. L'analyse a posteriori :

Il semble que l'habillage et la forme originale du problème ait perturbé les élèves. La prise en compte des deux contraintes (les "têtes" et les "pattes") a amené des confusions dans l'esprit d'élèves pourtant considérés habituellement comme "globalement bons".
Dans un premier temps, certains pensent que ce problème possède plusieurs solutions (refus des deux contraintes prises conjointement). La preuve matérielle (le fait de dévoiler les cartes tirées) n'est pas convaincante pour tous. Il y aurait une sorte de "magie" interne à la situation.
Cependant, le débat final permet de clarifier la situation et les élèves ne se sentent pas bernés : il n'y a pas eu de tour de passe-passe. Les mathématiques leur ont permis de faire des hypothèses et aussi de mieux comprendre la situation.
Pour les élèves plus faibles, le problème s'est révélé complexe car ils y a souvent une perte de sens : ils font des opérations (additions, multiplications) mais les nombres sont abstraits et ne représentent pas forcément des "têtes" et des "pattes". En particulier ils sont capables d'écrire une égalité mathématique comme : $(6 \times 18) + (3 \times 4) = 120$, qui représente une écriture de la solution, mais la transcription en une phrase de conclusion en français est souvent difficile. Ils ont perdu la signification du problème. Le cheminement s'est fait dans une direction (des hypothèses vers une conclusion), mais ils ont des difficultés à décrypter cette conclusion et à revenir vers les "chèvres et les scarabées".
Ainsi un maître débutant qui s'arrêterait sur des indices superficiels de résolution et ne considérerait que l'équation mathématique comme une fin en soi, priverait les élèves de compréhension et les laisserait dans la "magie des chiffres". Les stagiaires PE2 ont souvent tendance à aller trop vite lors de l'institutionnalisation et à laisser dans l'implicite ce retour au sens qui justement est fondamental.

Quel est l'intérêt de ce problème ?
Ce problème ne creuse, néanmoins, pas les écarts chez les élèves car tous ont trouvé un résultat et ont pu en débattre. Ceux dont le résultat était erroné ont compris la nécessité de prendre en compte les deux contraintes, les autres ont trouvé la bonne solution.
On aurait pu, dans une autre classe, amener des aides sous forme d'étiquettes "chèvres" et "scarabées", autoriser ou suggérer des schémas, faire varier le nombre de cartes distribuées…

Sur le plan didactique, le problème se prête à une séance structurée en diverses phases (dévolution, phase de recherche en groupes, phase de débat, phase d'institutionnalisation). Il est riche sur le plan mathématique (travail implicite sur un système de deux équations à deux inconnues) et permet une différenciation selon divers niveaux de cycle 3. En effet j'avais mis en œuvre dans une classe de CE2 le problème "des carrés et des triangles" (combinaison linéaire de 3 et de 4), en ne distribuant que deux cartes par groupes (ce qui donne pour une classe répartie en 7 groupes, un nombre de "cotés" compris entre 42 et 56 pour 14 cartes distribuées).

Variante pour le problème des "chèvres et des scarabées": en distribuant quatre cartes par groupes nous aurions fait travailler les élèves sur des nombres compris entre 112 et 168 pour 28 cartes distribuées.
Par la modification du nombre de cartes distribuées, il permet plus de différenciation qu'un problème figé comme celui-ci :

Que peut-on calculer ?

Exercice extrait du manuel "Maths +" CM2, Editions SED

Ce problème est cependant intéressant dans une phase de réinvestissement…

La séance aurait pu s'arrêter, mais l'étude des variables didactiques et de leurs effets nous a suggéré une idée : "si nous faisions inventer des problèmes de ce type aux élèves !"

IV. Une suite édifiante : renversement de situation

1. Compte rendu de séance : écrire des problèmes

1) Rappel de la séance précédente : le problème "des chèvres et des scarabées"
2) Présentation des images qui vont servir de base de travail (voir en annexe 1)
   Une feuille A3 par binôme, un affichage collectif des images en couleur
3) Consigne : "La dernière fois nous avons travaillé avec un jeu de cartes qui était composé de 2 sortes d'images : des chèvres et des scarabées. Aujourd'hui vous allez inventer un problème en utilisant ces images. Vos énoncés seront proposés ultérieurement à vos camarades".

Cette consigne est très importante car lorsqu'on fait produire des problèmes par les élèves, il convient de faire jouer complètement cette situation de communication et de donner réellement les problèmes à chercher à d'autres élèves. C'est cela le vrai "feed-back" !

2. Première phase de recherche

- Deux groupes choisissent les images de manière "affective". Le scorpion bleu est très joli. Il est fréquemment choisi.
- Plusieurs groupes choisissent 3 images ayant un point commun, mais ne prennent pas en compte la diversité du nombre d'éléments. Par exemples, ils choisissent l'avion, l'oiseau et la libellule pour le critère "ailes". Mais l'avion et l'oiseau ont tous les deux 2 ailes.
- 3 groupes se lancent très vite dans la rédaction de l'énoncé. Ils choisissent des grands nombres pour produire un problème difficile.
- 4 groupes commencent par faire des calculs, puis rédigent l'énoncé.
- 2 groupes n'arrivent pas à se mettre d'accord sur un choix d'images.
- Quelques enfants trouvent la tâche très difficile et ne produisent rien.

3. Première synthèse

Chaque binôme fait le point sur ses recherches. Pour aider les enfants en difficulté, nous rappelons comment a été conçu le jeu "chèvre et scarabée". Nous explicitons de nouveau l'élément commun : les pattes, mais en nombre différent pour les chèvres et les scarabées, qui a permis l'existence du problème.
"Les deux animaux ont des pattes : la chèvre en a 4, le scarabée 6"
Il faut donc choisir des images ayant un point commun en quantité différente.
Nous énonçons les critères de choix : **Points, roues, ailes, pattes.**

De manière totalement implicite, les élèves sont confrontés à un modèle mathématique (système de deux équations à deux ou trois inconnues).

4. Deuxième phase de recherche

Tous les enfants ont maintenant orienté leur choix vers des images possédant un critère commun. Quelques binômes restent cependant en difficulté car ils ne prennent pas en compte le fait que la différence doit jouer entre les trois images qu'ils ont choisies.
Les enfants plus avancés terminent la rédaction à partir de l'équation du problème puis rédigent leur production sur une feuille.
Lors de la phase collective, l'enseignante recopie au tableau les problèmes qui semblent corrects.

En voici trois exemples recopiés sans ajouts ni retraits:

Le problème "des roues" de Rémi et Baptiste
Dans un paquet, il y a 3 sortes de cartes : avion à 2 roues, camion à 6 roues, tricycle à 3 roues.
Il y a 20 cartes en tout. Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?
Réponse des élèves :

6 x 6 = 36   4 x 3 = 12   10 x 2 = 20   36 + 12 + 20 = 68

Il y a 6 camions, 4 tricycles 10 avions et 68 roues.

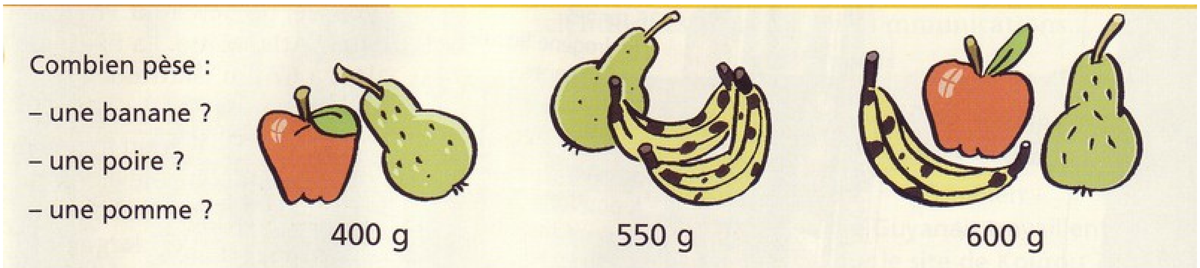
Le problème "des pattes" de Julien et Lorin
Un oiseau a 2 pattes, une coccinelle en a 6 et le crabe en a 8. En sachant qu'il y a 19 cartes dans le jeu et que l'on compte 110 pattes. Combien y –a-t-il de crabes, de coccinelles et d'oiseaux ?

$6 \times 2 = 12 \qquad 3 \times 6 = 18 \qquad 10 \times 8 = 80$

Il y a 10 crabes, 3 coccinelles et 6 oiseaux.

Le problème "des coccinelles" de Pauline et Raphaël et la solution donnée par les élèves
J'ai 118 points et 19 cartes.
Combien ai-je de coccinelles à 8 points, de coccinelles à 5 points et de coccinelles à 6 points ?
$(5 \times 8) + (5 \times 6) + (8 \times 6) = 118$
J'ai 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points, et 8 coccinelles à 6 points.

Remarques concernant les problèmes des élèves
- Les problèmes sont bien plus complexes que ceux que l'on trouve habituellement dans les manuels où il y a toujours un système de trois équations à trois inconnues.



Exercice extrait du manuel : "Pour comprendre les mathématiques" CM2. Editions Hachette

- Les problèmes construits par les élèves ont "l'air de fonctionner". En effet, ils les ont construits avec au départ une égalité mathématique correcte.
Par exemple pour le problème "des coccinelles" les élèves ont compté le nombre de points et le nombre de cartes correspondant. (Leur égalité de départ est $(5 \times 8) + (5 \times 6) + (8 \times 6) = 118$)
Cependant, le mathématicien sait que le système de contraintes est insuffisant pour aboutir à l'unique solution que les élèves rédacteurs ont écrite. En effet nous avons là un système de deux équations à trois inconnues. Ce qui donne potentiellement dans R une infinité de solutions. Mais ces solutions sont moindres dans N…

Une quinzaine de jours plus tard, nous avons posé le problème "des coccinelles" aux élèves de cette classe de CM2.

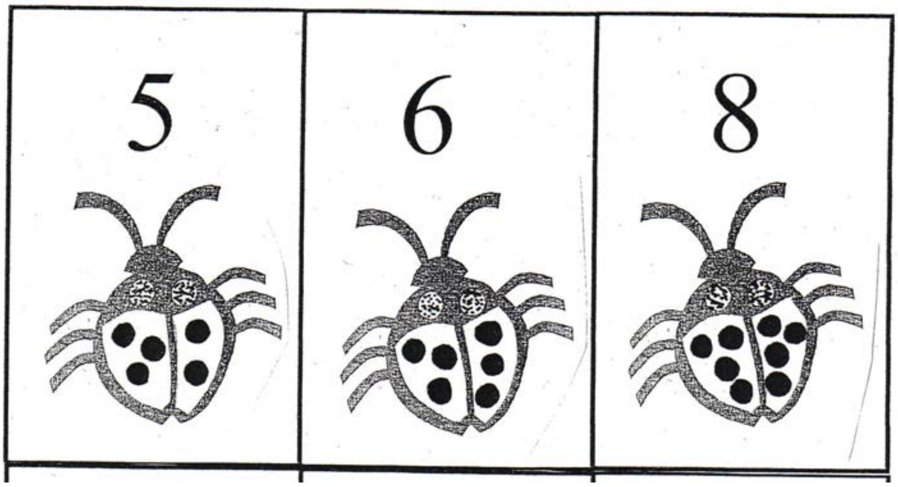
Le déroulement a été légèrement modifié par rapport à la séance précédente.

- La dévolution se fait toujours par une expérience (il y a des cartes de chaque sorte dans le paquet, Sylvie le montre clairement aux élèves. Elle ne leur dit pas combien il y en a de chaque sorte et cela aura une influence ultérieure. Mais cette fois ci, la maîtresse sélectionne 19 cartes dans le paquet en faisant semblant de les choisir au hasard[8]. La maîtresse dit alors : "parmi ces 19 cartes, combien ai-je de coccinelles à 5 points ? combien à 6 points ? combien à 8 points ?"

- S'en suivent, lors de la séance, une phase de recherche, une phase de mise en commun et une phase de validation par la découverte des cartes.

[8] Les cartes sont retournées et les enfants ne sont pas conscients de cette petite supercherie pédagogique. Elle s'explique par le fait que nous voulions mettre en œuvre le problème inventé par les enfants, ainsi que les données numériques fournies par eux.

Voici un exemplaire des cartes utilisées.



Les solutions[9] au problème posé sont :
J'ai 2 coccinelles à 8 points, 0 coccinelle à 5 points et 17 coccinelles à 6 points. (1)
J'ai 3 coccinelles à 8 points, 2 coccinelles à 5 points et 14 coccinelles à 6 points.
J'ai 4 coccinelles à 8 points, 4 coccinelles à 5 points et 11 coccinelles à 6 points.
J'ai 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points et 8 coccinelles à 6 points. (2)
J'ai 6 coccinelles à 8 points, 8 coccinelles à 5 points et 5 coccinelles à 6 points. (3)
J'ai 7 coccinelles à 8 points, 10 coccinelles à 5 points et 2 coccinelles à 6 points. (4)

Les élèves ont cherché plusieurs solutions, après une relance de recherche. Certaines étaient erronées (non prise en compte de toutes les contraintes :

- nombre total de cartes erroné : solution de Raphaële en annexe 2, solution 1 de Quentin en annexe 3, solution de Bastien en annexe 5, solution de Taran en annexe 6.
- nombre total de pattes erroné : solutions 2 et 3 de Manuela en annexe 4, solutions de Nicolas en annexe 5.
- certaines étaient possibles : solution de Julien en annexe 2, solution 2 de Quentin en annexe 3, solution 1 de Manuela en annexe 4, solution de Jessica en annexe 6.

Finalement, le collectif classe a permis de faire émerger quatre solutions (celles numérotées et mises en caractères gras ci-dessus). Les élèves affirment très rapidement, lors de la mise en commun, qu'il faut en choisir une seule. La maîtresse les interroge alors et leur demande pourquoi. Il y a là un conflit intellectuel. C'est le cœur du problème et un débat sera nécessaire.

Les quatre solutions trouvées par les élèves sont écrites au tableau, après que tous aient vérifié que ces solutions respectaient les consignes (19 cartes et 118 points),
La première solution (1) est éliminée rapidement car Sylvie montre brièvement le jeu qu'elle a en main et réaffirme qu'il y avait des coccinelles de chaque sorte dans le jeu (coccinelle à 5 points, coccinelles à 6 points, coccinelles à 8 points)
Il reste trois solutions et la maîtresse propose un débat dont voici un extrait (rédigé à l'aide d'un enregistrement audio).

[9] Le mot "solution" a été prononcé en classe, alors qu'il signifie "configuration possible" ou "configuration existante". Dans toute la suite, le mot "solution" est pris dans ce sens. Ce n'est pas exactement la "solution" mathématique telle qu'on l'entend généralement.

5. Le débat

E[10] *: c'est bizarre, il ne devrait pas y avoir plusieurs solutions.*

M[11] *: pourquoi ?*

E : parce que les cartes de la solution 3 ne sont pas les mêmes que celles de la solution 4

M : oui. Qu'en pensez-vous les autres ?

E : il ne peut pas y avoir trois solutions car dans ton jeu il n'y a qu'un tas de 19 cartes.

M : oui, cependant, il y a trois solutions qui fonctionnent…alors ?

E : moi, je pense que c'est la solution (4) car il y a plus de coccinelles à 5 points et que c'est plus petit donc dans le jeu tu en as mis plus.

(L'élève sous-entend que si la maîtresse a mis plus de coccinelles à 5 points dans le jeu, ces cartes ont plus de chances de sortir, le nombre de 10 lui paraît plausible)

M : on a mis des coccinelles des trois catégories dans le jeu, mais on ne sait pas combien.

E : moi, je pense que les trois solutions sont bonnes mais il n'y en a qu'une seule qui a été tirée

M : je suis d'accord avec toi, mais je voudrais que tu me dises ça d'une autre façon … c'est juste ce que tu as dit.

E : maîtresse : j'ai une idée : il pourrait y avoir une autre solution qui n'a pas été trouvée et qui serait la bonne

M : peut-être...

E : il y a deux solutions qui sont un petit peu inversées : les solutions (2) et (3), ça doit être les bonnes.

(J'ai 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points et 8 coccinelles à 6 points. (2)

J'ai 6 coccinelles à 8 points, 8 coccinelles à 5 points et 5 coccinelles à 6 points. (3))

M : oui, mais ce n'est pas pareil la répartition des cartes n'est pas la même. Dans la solution (2), il y a 8 cartes à 6 points et dans la solution (3), il y a 5 cartes à 6 points.

E : oui, mais il y a les mêmes chiffres. 5 x 8 = 40 et 8 x 5 = 40 ; 6 x 5 = 30 et 5 x 6 = 30...

M : oui, mais on veut les cartes qui ont été tirées là (elle montre les cartes) comment fait-on pour trouver le bon résultat ?

…

Finalement un élève affirme.

E : il faudrait connaître combien tu avais de cartes à 5 points et combien il en reste dans la pioche.

M : pourquoi ?

[10] E signifie : un élève. Ce n'est pas forcément toujours le même.
[11] M signifie : la maîtresse nommée Sylvie.

E : pour savoir combien il y en a dans ta main[12]

E : ça va pas, il y a trois choses à chercher et dans le problème, il n'y a que deux nombres

M : avez-vous écouté ce que votre camarade vient de dire ?

S'en suit un blanc, puis un élève reprend

E : moi, je crois que c'est la solution (2)

M : pourquoi ?

E : parce que c'est la première qu'on a trouvée

E : parce qu'on était beaucoup à la trouver.

M : bon, on va vérifier.

Elle donne les cartes à un enfant qui compte le nombre de chaque sorte de coccinelles. Il énonce la solution. (Configuration (2)).

E : c'était le hasard si on a trouvé la bonne solution ?

M : oui, il y avait beaucoup de solutions et vous l'avez trouvée par hasard. Julien avait une idée pour franchir la porte du hasard. Redis ce que tu as dit tout a l'heure

E : il faut que tu nous dises combien il y a de cartes de chaque en tout dans le jeu

E : il ne faut que deux catégories de cartes

M : non, on voulait en garder trois

E : il faut savoir combien il y a de cartes en tout dans le jeu.

M : alors, par rapport à ce qu'on doit chercher 19 cartes et 118 points, il faudrait changer l'énoncé …

E : ça pourrait aider si on savait qu'il y a 5 cartes à 8 points dans le jeu.

M : vous pensez que ça aiderait ?

Tous les élèves répondent par l'affirmative.

Les élèves ont débattu de ces configurations possibles. Ils font alors vivre leurs connaissances en argumentant. Le débat leur a permis de progresser et de construire des outils. Ils ont réussi à expliciter le fait que le problème posé ne permettait pas de donner une solution qui correspondait à l'expérience. Il manquait une donnée : on a trois inconnues et seulement deux nombres. C'est un grand pas franchi du point de vue mathématique et cela prépare l'avenir. Arrivés au lycée, ces élèves auront déjà construit un petit chemin mental vers la résolution de systèmes d'équations.
A l'école, il est nécessaire de travailler le plus possible dans le concret et de faire vivre les problèmes.
Dans ce cas, la seule configuration valide étant celle de l'expérience, cela nous a ramenés à la réalité avec toutes ses limites et aussi toute sa richesse.
En effet, cette expérience n'est pas reproductible avec un jeu de cartes (à moins de tricher) : la prochaine fois que je tire au hasard 19 cartes de mon jeu "des coccinelles", j'ai fort peu de chance d'obtenir la même configuration : 5 coccinelles à 8 points, 6 coccinelles à 5 points et 8 coccinelles à 6 points.

---

[12] La maîtresse a conservé pendant le débat les 19 cartes dans sa main.

Les enfants auraient pu ne pas trouver, parmi leurs solutions, celle qui s'est réellement produite. Cela nous aurait, peut-être, mises dans un certain embarras ??? C'est à la fois tout le plaisir et toute la difficulté d'un enseignant de l'école primaire.

Conclusion

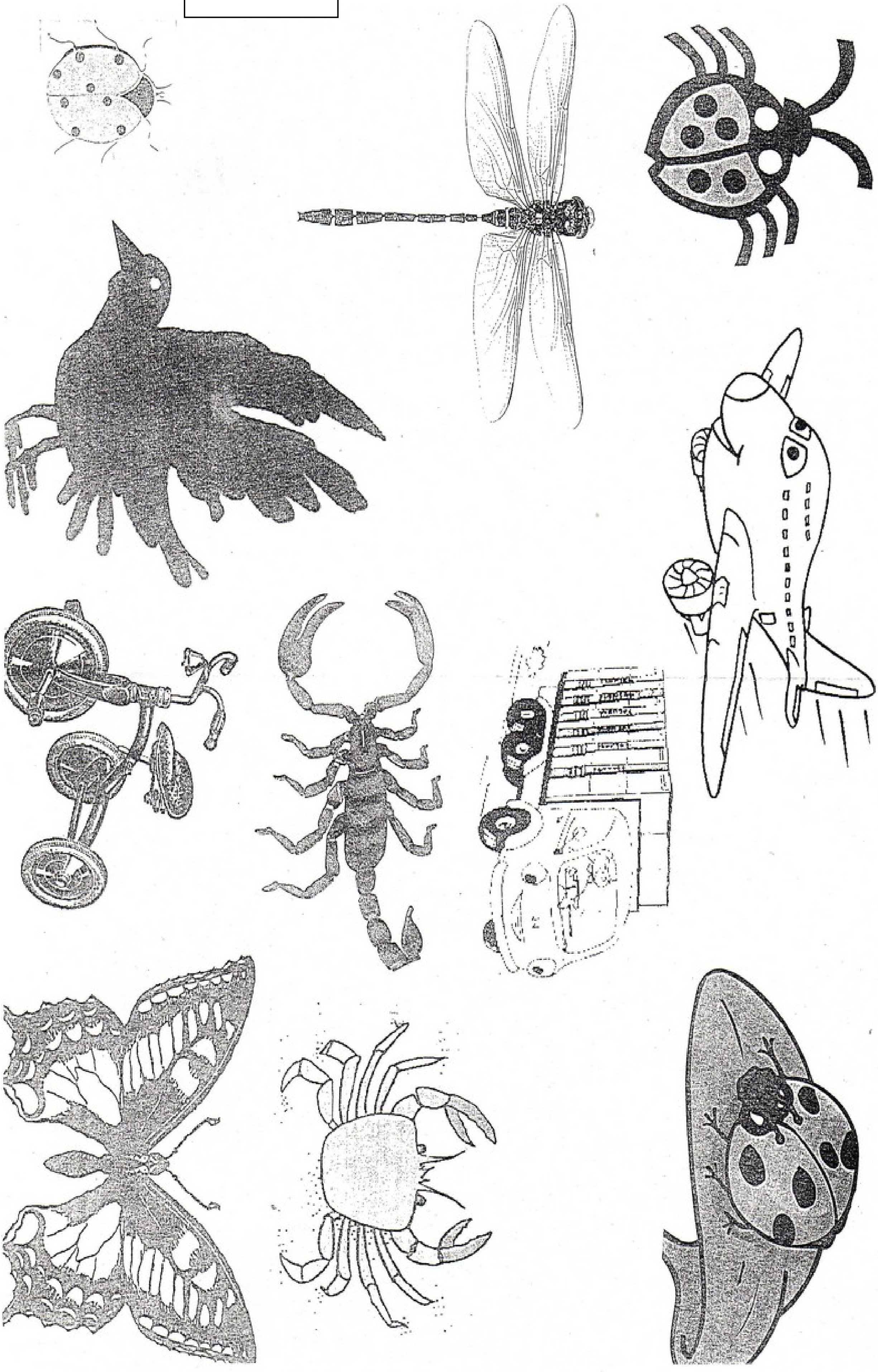
Cette expérience nous a permis d'apporter une réponse possible à la question de départ : comment développer une attitude positive des élèves face aux problèmes ? C'est en leur donnant l'occasion d'utiliser leurs connaissances pour essayer, pour faire des tentatives qu'ils progressent.
Lors de ces deux séances, ils ont beaucoup appris : à faire face à une situation nouvelle, à la comprendre, à utiliser leurs connaissances, à argumenter, à débattre, à avoir l'esprit ouvert et critique... Ce type de problèmes pour chercher permet aussi de développer l'imagination des élèves, de les confronter à des situations atypiques. Les connaissances relatives aux opérations enseignées prennent alors du sens : l'enseignement des mathématiques est utile !
De tels "problèmes pour chercher" développent une attitude scolaire différente de l'attitude traditionnelle : il ne s'agit plus de chercher parmi les dernières connaissances enseignées lesquelles vont pouvoir s'appliquer dans un problème, mais plutôt d'aborder le problème avec la compréhension de la situation que l'élève a, à un certain moment et de le résoudre avec ses propres connaissances. Tous les élèves se prennent au jeu et même les plus faibles ont de bonnes idées.
Lors de cet atelier de pratique pédagogique, les élèves de cette classe de CM2 se sont sentis en situation de recherche. Le problème présentait un caractère de défi pour l'esprit. Les réponses trouvées les ont questionnés. La recherche et les solutions potentielles ont provoqué un débat scientifique.

Si nous avons tous pris beaucoup de plaisir avec ces problèmes (maîtres comme élèves), cela ne signifie pas qu'il faille donner ce genre de "problème pour chercher" tout le temps lors de l'année scolaire. Des exercices (pour s'exercer et réinvestir) sont certainement utiles, et puis, il faudra être capable d'utiliser ses connaissances entraînées pour résoudre de nouveaux problèmes...C'est dans la variété qu'il convient de se tourner.

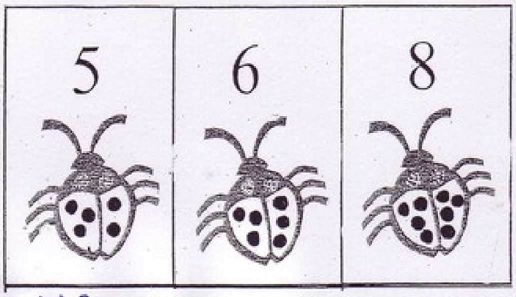
Bibliographie

- "Faut-il enseigner les mathématiques à tous les élèves ?" article de Roland Charnay Plot n°8
- Mathématiques et problèmes (extraits de "pourquoi des mathématiques à l'école"Roland Charnay, ESF 1996)
- "En mathématiques, l'utilisation des connaissances se manifeste à travers la résolution de problèmes" Roland Charnay article dans SNUipp
- "Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes" Jean Julo Grand N n°69
- "Mise en œuvre d'un problème pour chercher en CM2 : analyse et perspectives" Nicole Bonnet article à paraître IREM de Dijon
- "Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques" François Boule IREM de Dijon
- Document d'Accompagnement des Programmes "Les problèmes pour chercher" ; www.eduscol.education.fr/prog

Annexe 1



Annexe 2



Prénom Raphaële

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

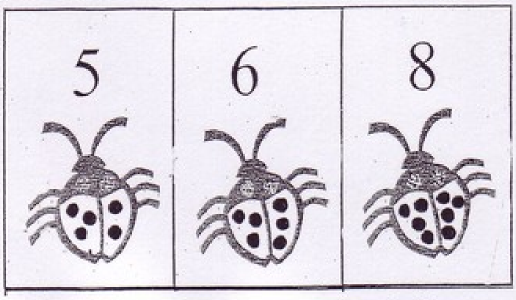
Je dois chercher le nombre de coccinelles a 5, 6, 8 points mélangés dans les 19 cartes en m'aidant du total des points.

Calcul :

1) 8 x 10 = 80 5 x 4 = 20 80 + 20 = 100

6 x 2 = 12 12 + 6 = 18 100 + 18 = 118

10 coccinelles de 8 points, 4 c de 5 p et 14c de 6 p.



Prénom Julien

Problème :

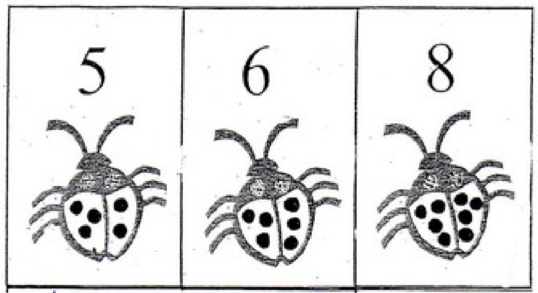
Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

Combien il y a de coccinelle à 5 à 6 et à 8 points

8c X 6 p = 48	8c X 5 p = 40
6c X 5 p = 30	6c X 8 p = 48
5c X 8 p = 40	5c X 6 p = 30
19c 118	19c 118

Annexe 3



Prénom Quentin

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

On doit chercher combien il y a de carte de 5 points de 6 points et de 8 points en toal avec 19 carte on doit trouver 118 points.

5x12 = 60

8x5 = 48

6c x 3 = 18

20c 118 p

J'ai pris 12 cartes de 5 points, 5 cartes de 8 points et 3 cartes de 6 points.

8c x 6 = 48

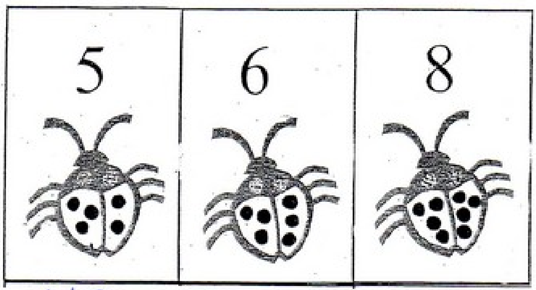
6c x 5 = 30

5c x 8 = 40

19c 118 p

J'ai pris 8 cartes de 5 points, 6 cartes de 8 points et 5 cartes de 6 points.

Annexe 4



Prénom … Manuela

Problème :

Il y a …19… cartes et la maîtresse a compté …118… points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

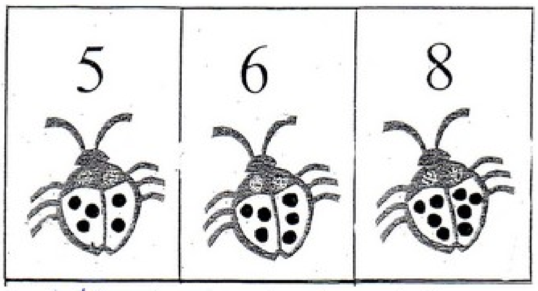
Je cherche combien il y a de 5 de 6 et de 8 points après je les additionne et je regarde si le résultat est correcte. Si il n'est pas correcte je vérifie mes calculs pour voir ou je me suis trompé.

7c x 8p = 56
2c x 6p = 12
10c x 5p = 50
19c — 118

8c x 5p = 40
6c x 9p = 54
5c x 5p = 25
19c — 119

8c x 4p = 32
6c x 10p = 60
6c x 5p = 30
19c — 117

Annexe 5



Prénom Bastien

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

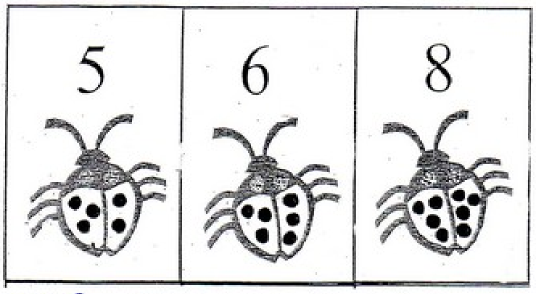
Le nombre de coccinelles à 5, 6 et 8 points

~~8c~~ 8p=16 = 2 cartes de 8

16 x 2 = 32 = 4 cartes de 8

(8c×8p)+(8c×5p)+(6p×~~1c~~= 118 points et 18 cartes

c = carte p = point



Prénom Nicolas

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

Combien y-a-t-il de cocinelles à 8 points, à 6 points, à 5 points, en oubliant pas qu'il y a 19 cartes!

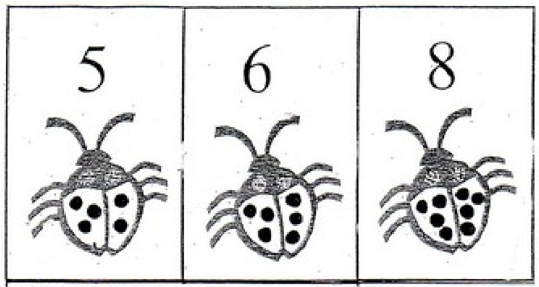
8p x 4c = 32 5pX11c=55 6pX4=24 32+55+24=111 pts

4+11+4=19 cartes

8p+6c=48 6p+7c=42 5pX6c=30 48+42+30=120 pts

6+7+6=19 cartes

Annexe 6



Prénom Jessica

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

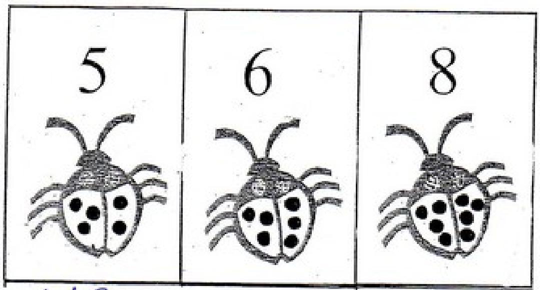
Combien il y a de coccinelles à 5 points, à 6 points et à 8 points?

19c 10c 6p 80 3c 98 8 10 6 8

x8p x8p x3c +18 x5p +45 x5 x2 x7

152 80 18 98 45 143 50 + 12 = 62 56

Il y a 10 coccinelles à 5 points, 2 coccinelles à 6 points et 7 coccinelles à 8 points.



Prénom Yanan

Problème :

Il y a 19 cartes et la maîtresse a compté 118 points au total sur les coccinelles

Je dois chercher :

Combien de coccinelles il y a t'il de 8, 6, 5 avec 19 cartes?

10X8 = 80 5X4 = 20 6X3 = 18 118 et 21 cartes

5X16 = 80 5X6 = 30 1X8 = 8 118 et 30 cartes

6X12 = 72 8X5 = 40 1X5 = 5 117 et 19 cartes