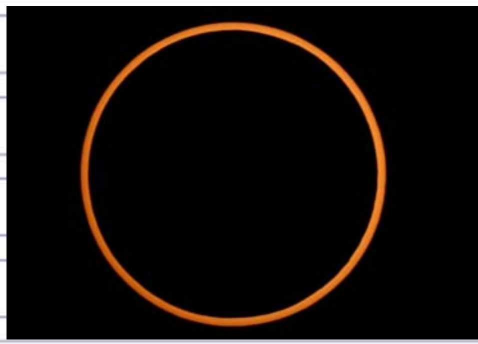
N° 98 – Décembre 2005

Feuille de Vigne

Irem de Dijon

- Mesurer la distance de la Lune à partir d'une éclipse de Soleil
- Utilisation de géoplan w en classe de troisième
- Etude de la convergence de la suite $\left((\cos n)^n\right)$ et fractions continues
- La formule de Héron à l'aide des aires
- Un jeu curieux : le jeu du premier sorti



Revue Trimestrielle

Issn 0246-5752

Editorial

Tous ceux qui sont sensibilisés à l'information chiffrée n'auront pas manqué de remarquer le numéro de ce numéro [comme ils ne sont peut-être pas sensibilisés à l'information non-chiffrée, ils voudront bien me passer, je l'espère, cette répétition sans ajouter « un sacré numéro ! » ; quoique je doute de la mansuétude de quelques-uns qui ne manqueront pas une telle occasion : pas très sérieux, les profs de maths[1]…] Alors ce numéro ? Eh bien, plus que deux (2) et nous arrivons au centième [je ne veux pas dire par là « à la centième partie » comme dans les approximations, ils sont embêtants ces matheux ! Si vous préférez, j'écrirai « au 100^e^ », pour faire la différence avec « au 1/100 ».]

Ces crochets devenant pénibles (ils s'accrochent), il est temps de changer de paragraphe. Le numéro 98 [c'est-à-dire le nombre, pas la revue elle-même, on est bien d'accord ?] montre le long chemin parcouru depuis la création de l'IREM de Dijon, il y a trente ans → à chacun de trouver la périodicité moyenne de la Feuille de Vigne. On évoque ici l'époque bénie des débuts (bénie au sens des moyens financiers attribués), le nombre important de brochures et articles publiés ensuite, de travaux réalisés et de formations encadrées, avec la spécificité de l'IREM : la formation par la recherche. La bénédiction financière des débuts s'expliquait semble-t-il par la nécessité de former les enseignants au nouveau calcul des probabilités ; mais même sans décharge horaire, l'enthousiasme subsiste toujours. Nous voyons avec plaisir des jeunes collègues participer aux travaux de l'IREM, certains s'investissant même dans divers groupes ; et dire que l'on croyait que les jeunes n'avaient plus l'esprit du bénévolat et de la recherche gratuite ! Si les méthodes ont changé (il semble que nos jeunes homologues aient beaucoup moins de difficultés que nous face à l'ordinateur, qui l'eût cru ?), nombre de préoccupations restent les mêmes : signification profonde de ce que nous enseignons, moyens de susciter l'intérêt des élèves, d'assurer la motivation, le travail personnel et la discipline en classe. Voilà : l'IREM continue, le flambeau est porté par d'autres mais ne s'éteint pas. Ce postulat fonctionne aussi pour les directeurs, voyez-vous ?

Ce dernier changement de paragraphe coïncide donc avec le changement de direction : saluons ici le travail accompli par Daniel BEAU, et souhaitons bienvenue à Patrick GABRIEL, qui lui succèdera à partir de janvier à la direction de l'IREM, avec l'aide de Catherine LABRUÈRE-CHAZAL. L'expression « changement de direction » ne doit pas forcément être prise au sens itinéraire du terme : il faut rappeler que chacun est bienvenu au sein de l'équipe, que les groupes de travail seront heureux de compter de nouveaux membres.

Bonne fin d'année, bon 98, et au 99 !

Frédéric MÉTIN

[1] Et c'est un prof de maths qui vous le dit.

Sommaire

MISE EN PAGE :
Françoise BESSE

COMITÉ DE RÉDACTION ET DE LECTURE :
Pascal AMP
Patrick GABRIEL
Frédéric METIN
Jean-François MUGNIER
Marie-Noëlle RACINE

RÉDACTEUR EN CHEF :
Daniel BEAU

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION :
Daniel BEAU, Directeur de l'IREM

N° D'ENREGISTREMENT :
1 496 ADEP

DÉPÔT LÉGAL :
n° 173 – 2ème semestre 2005

IMPRESSION :
Service Reprographie

FEUILLE DE VIGNE
Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques
IREM
9 Avenue Alain Savary – BP 47870 – 21078 Dijon cedex
☎ 03 80 39 52 30 – Fax 03 80 39 52 39
@ : iremsecr@u-bourgogne.fr....
http://www.u-bourgogne.fr/irem

B loc-notes

RALLYES : Rappel des dates

Pensez à vous inscrire à l'IREM

Le rallye des Collèges de Côte d'Or aura lieu le vendredi 27 janvier 2006.

Le Rallye de Mathématique de Bourgogne aura lieu le mercredi 25 janvier 2006.

JOURNÉE DE FORMATION

(Vous pouvez encore vous inscrire à l'IREM)

12 janvier 2006 Lieu : IREM, Faculté Sciences Mirande

Journée de formation organisée en collaboration avec l'IUFM de Bourgogne : ***DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT - Denise GRENIER****, Maître de conférences à l'Université de Grenoble, Directrice de l'IREM de Grenoble*

La construction de la connaissance des nombres réels chez les élèves concerne toute la scolarité obligatoire et au-delà. Comme pour toutes les autres notions mathématiques, l'apprentissage comporte des obstacles, à tous les niveaux, et qui semblent résister aux nombreuses tentatives pour les résoudre.
Des questions se posent, quand on regarde les programmes au fil de la scolarité, telles que : Comment s'effectue le passage des entiers aux décimaux ? Comment s'apprend l'ordre sur les décimaux ? Où se construisent les irrationnels ? Quelles connaissances sur les réels sont absentes de l'enseignement, et quelles sont les conséquences de ces "trous" ?
Un travail sur le thème plus précis suivant : "la place de la notion de racine carrée dans la construction des irrationnels, dans les programmes actuels" sera proposé.

Organisation de la journée :
- Présentation générale sur les nombres.
- Travail en groupes pour analyser différents documents (extraits de manuels, productions d'élèves, notes d'observation de classe) à l'aide d'outils didactiques simples et adaptés permettant de repérer les erreurs dans les conceptions des élèves et aussi les effets de certaines pratiques d'enseignement.

NOUVELLES ACQUISITIONS À LA BIBLIOTHÈQUE

Actualisé le 08.12.05

Tout enseignant de l'académie peut emprunter des ouvrages à la bibliothèque

Les ouvrages :

▪ Il était sept fois la révolution – Albert Einstein et les autres - 2005	Klein	3237
▪ Les nombres – problèmes anciens et actuels - 2000	Ellipses	3238
▪ L'intelligence et le calcul de Gödel aux ordinateurs quantiques - 2002	Delahaye	3239
▪ La planète $\mathbb{R}$ – voyage au pays des nombres réels – 2002	Bouhalem, Brouzet	3240
▪ Méthodes probabilistes pour l'étude des phénomènes réels	Beauzamy	3241
▪ Toutes les probabilités et les statistiques - 2004	Dauxois, Hassenforder	3242
▪ CAP Industriel – Les compacts de Foucher	Foucher	3243

- Mathématiques $1^{ères}$ STG — Foucher — 3244
- Institution arithmétique — Guillaumin — 3244
- Aide individualisée en mathématiques – classes de secondes — Hervier, Reynaud — 3245
- Statistiques au lycée – Vol.1 : les outils de la statistique- 2005 — Chaput (coor.) — 3246
- La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire — APMEP — 3247
- Le cours de l'APM, T1 : Groupes, anneaux, corps – 1962 — Revuz — 3248
- Le cours de l'APM, T2 : Espaces vectoriels - 1963 — Revuz — 3249
- Le cours de l'APM, T3 : Eléments de topologie – 1966 — Revuz — 3250
- Les tourbillons Cartésiens, défense et réfutation- le rôle de P. Sigorgne — Guyot — 3251
- Problèmes de mathématiques – 320 énoncés avec solutions détaillées — Delcourt — 3252
- Problèmes de mathématiques – 320 énoncés avec solutions détaillées — Delcourt — 3253
- Cours de géométrie – Préparation au CAPES et à l'agrégation — Mercier — 3254
- Cours de géométrie – Préparation au CAPES et à l'agrégation — Mercier — 3255
- L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques — Mercier — 3256
- L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques — Mercier — 3257

Production des IREM

- De la sphère au plan — Irem Besançon — B5371
- L'ouvert n°11 – Juin 2005 — Irem Strasbourg — B5372
- Math à crédit – Juillet 2005 — Irem Caen — B5373
- Actes du 31ème Colloque COPIRELEM - Quelles maths faire vivre à l'école ? Irem Toulouse B5374
- Chronique d'une correspondance très certainement apocryphe – Didactique n°6 Irem Nancy B5375
- Lois continues, test d'adéquation – Groupe proba–stat 3ème trimestre 2005 Irem Besançon B5376
- Mathématiques Sciences Educ.- Autour de 1789 en Bretagne — Irem Rennes — B5377
- L'aide individualisée en seconde en Maths : De quels outils avons-nous besoin ? Irem Rennes B5378
- Feuille de vigne n°96 – Juin 2005 — Irem Dijon — B5379
- Feuille de vigne n°97 – Novembre 2005 — Irem Dijon — B5380
- Actes du Colloque Inter-Irem: "Apprendre les mathématiques quelle(s) histoire(s)!? Irem Dijon B5381

CARREFOURS DES CARRIÈRES AU FÉMININ 2006

Pour faire suite à l'action menée l'année dernière pour inciter nos jeunes filles élèves à se diriger vers des études scientifiques, nous vous invitons à leur faire connaître les « carrefours des carrières au féminin » dont les dates et lieux sont indiqués ci-dessous : une grande majorité de métiers techniques scientifiques leur seront présentés

- pour la Cote d'Or : Dijon, samedi 4 février 2006
- pour le Nièvre : Nevers, samedi 18 mars 2006
- pour la Saône et Loire : Montchanin (Espace des Tuileries), samedi 4 février 2006
- pour l'Yonne : Auxerre (Auxerrexpo), samedi 28 janvier 2006

Pour avoir plus de renseignements sur l'un de ces Carrefours, vous pouvez contacter :
Francine Got, association FETE (Féminin Technique) - 2, rue Mozart - 21000 Dijon
Tel : 03 80 43 28 34 - Fax : 03 80 45 29 73
Courriel : fetebourgogne@aol.com Internet : www.feminin-technique.com
ou encore pour le Carrefour des Carrières d'Auxerre : Nelly Morien, professeure de Mathématiques au collège Jean Bertin à Saint Georges sur Baulche, Nelly.Morien@wanadoo.fr - 10, rue de Dublin - 89000 Saint Georges sur Baulche - Téléphone : 03 86 46 63 03

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

JEU - 48

On part d'un cube :

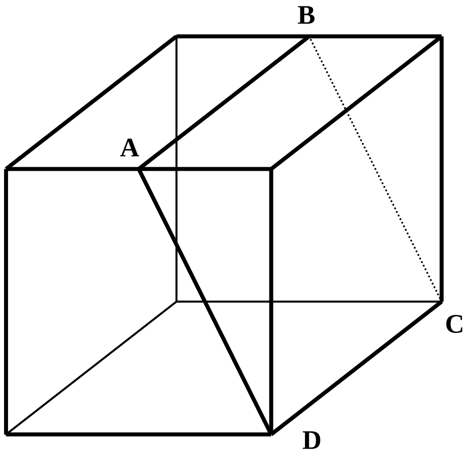


Figure 1

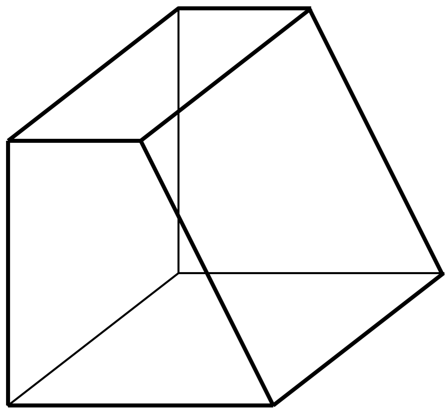


Figure 2

On tronque le cube (Figure 1) par un coup de scie le long du rectangle ABCD (où AB est une médiane). On obtient la figure 2 :

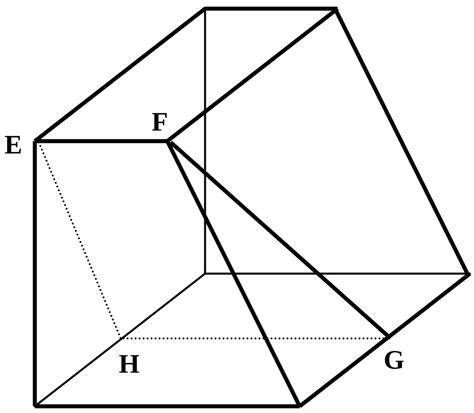


Figure 3

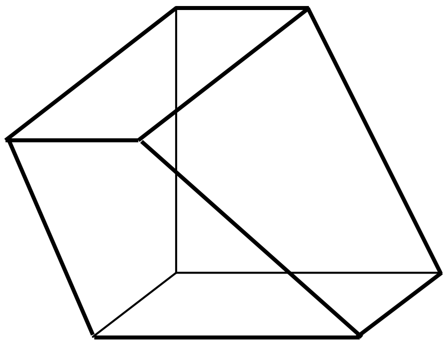


Figure 4

On tronque ce qui reste (Figure 3) par un coup de scie le long du trapèze EFGH (où GH est une autre médiane du cube).
On obtient l'horrible chose de la figure 4.
Cette chose a un **axe de symétrie** ! Trouvez-le.

D'après André DELEDICQ.

PROBLÈME - 48

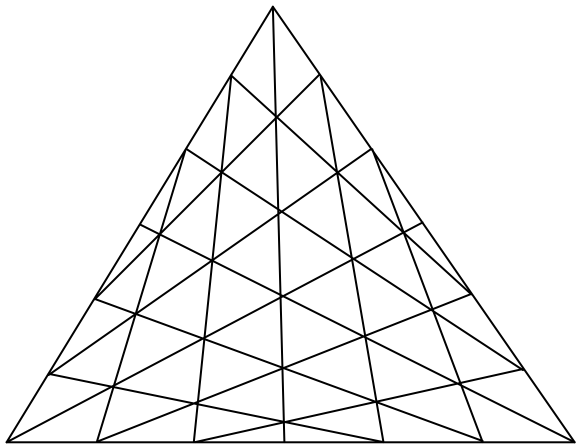
On pose $U_1 = 10$ $U_2 = 401$ et pour $n \geq 0$: $U_{n+2} = U_n - \dfrac{1}{U_{n+1}}$

Démontrer que $U_{2006} = 0$.

Solutions

JEU - 47

Combien comptez vous de triangles dans la figure agaçante ci-dessous ?



Il y a exactement **198** triangles.

PROBLÈME - 47

Démontrer que si pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a $|a\,x^2 + b\,x + c| \leq 1$
alors $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Si dans $|a\,x^2 + b\,x + c| \leq 1$ on fait successivement $x = 0$ $x = ½$ $x = 1$
On obtient le système :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} |c| \leq 1 \\ |a + 2b + 4c| \leq 4 \\ |a + b + c| \leq 1 \end{cases}$$

ce qui entraîne :
$|a| = |2a + 2b + 2c - (a + 2b + 4c) + 2c| \leq 2\,|a + b + c| + |a + 2b + 4c| + 2|c| \leq 2 + 4 + 2 = 8$
$|b| = |a + 2b + 4c - (a + b + c) - 3c| \leq |a + 2b + 4c| + |a + b + c| + 3|c| \leq 4 + 1 + 3 = 8$
$|c| \leq 1$

d'où par addition : $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Remarquons que l'optimum est atteint avec $P(x) = 8x^2 - 8x + 1$ de tableau de variation :

x	0		$1/2$		1
$P(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Ce qui montre bien que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ on a $|P(x)| \leq 1$

Les majorations ne tombent pas du ciel, mais de la résolution de systèmes linéaires, qui permettent ensuite d'utiliser les majorations du système (S) :
Par exemple, la majoration de a vient de l'identification de

$$x(c) + y(a + 2b + 4c) + z(a + b + c) \text{ avec } a.$$

(On trouve $x = 2$ $y = -1$ $z = 2$).

Mesurer la distance de la Lune à partir d'une éclipse de Soleil

Pierre CAUSERET, Collège Les Hautes Pailles à Echenon
pierre.causeret@ac-dijon.fr

Dernière éclipse de Soleil : 3 octobre 2005
Prochaine éclipse de Soleil : 29 mars 2006

Bras tendu, observez votre pouce avec l'oeil droit puis avec l'oeil gauche. Vous le verrez se déplacer devant le paysage. La mesure de ce déplacement angulaire et la connaissance de l'écartement de vos yeux devraient vous permettre de calculer la distance de votre pouce, bien que ce ne soit pas la méthode la plus simple.

Vu avec l'œil droit, le pouce cache l'arbre.

Mais pas pour l'œil gauche

Remplacez votre pouce par la Lune, le paysage du fond par le Soleil, vos deux yeux par deux observateurs à la surface de la Terre et vous pourrez alors calculer la distance de la Lune. Cette méthode de mesure des distances, dite méthode de la parallaxe, est au programme de sciences physiques des classes de seconde mais le problème peut être traité en maths en lycée et même en collège. Je vous propose ici de calculer la distance de la Lune à partir de l'éclipse du 3 octobre dernier. Cette éclipse était partielle en France et annulaire sur une ligne passant par Madrid et Alger. Annulaire parce que, la Lune étant plus éloignée qu'à son habitude (396 000 km contre 384 000 km en moyenne) elle ne pouvait pas cacher totalement le Soleil et un anneau de lumière était toujours visible au moment du maximum.

Je pensais utiliser une photo que j'aurais prise avec mes élèves à 10h58 depuis Dijon. A la même heure, des astronomes amateurs de la Société Astronomique de Bourgogne étaient à Madrid et faisaient des photos de l'éclipse annulaire.
Malheureusement, le ciel était totalement couvert ce jour-là en Côte d'Or, j'ai donc dû utiliser une photo d'un ami prise à Caen à 11h08. A la même heure, l'éclipse était centrale du côté d'Alger (où là aussi le ciel était couvert, je vous ai donc mis ci-dessous une photo prise de Madrid…)

Photo René Cavaroz

A 11h08 (9h08 TU), l'éclipse était partielle à St Contest à côté de Caen (49 ,21° N et 0,40° O).

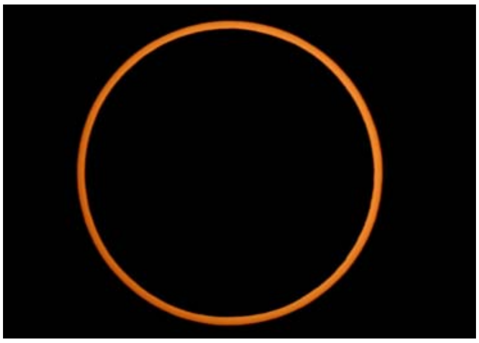


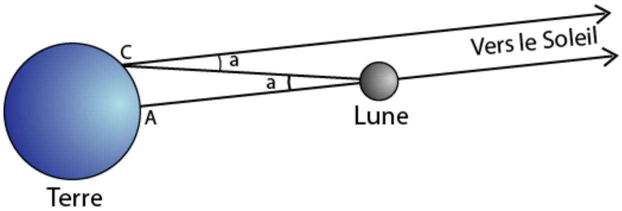
Photo Aurore Lasalle (SAB) à Madrid

A la même heure, l'éclipse était centrale à Bouira à côté d'Alger (36,37° N et 3,92° O).

La prochaine éclipse de Soleil visible à Dijon aura lieu le 29 mars 2006, entre 11h36 et 13h32, le maximum ayant lieu à 12h34 (heures légales).

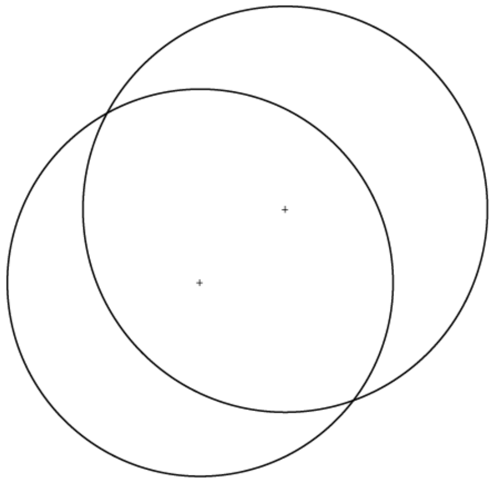
Le principe

Vue depuis deux points éloignés de la Terre, la Lune n'a pas la même position par rapport au fond d'étoiles lointaines.
Sur le schéma ci-dessous, un observateur en A (Alger) voit la Lune devant le Soleil alors que pour un observateur en C (Caen), la direction de la Lune et la direction de cette étoile forment un angle a.
La mesure de cet angle et la connaissance de la distance entre les deux points d'observation vont permettre de déterminer la distance de la Lune.



Calcul de l'angle a

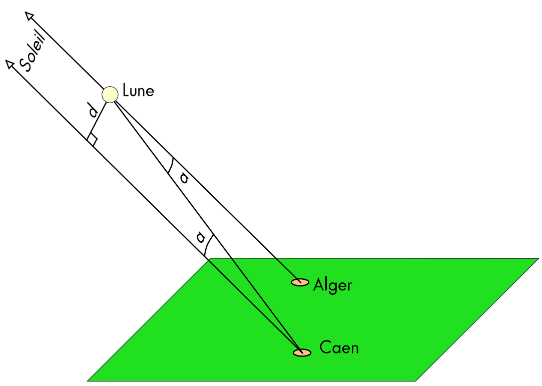
On utilise la photo de l'éclipse prise à Caen. Elle a subi ici un traitement informatique (filtre contour).
On cherche la distance angulaire entre le centre du disque Soleil et le centre du disque Lune. Il faut donc déjà tracer les deux disques. On peut trouver leur centre à l'intersection de médiatrices de cordes (méthode des matheux, les physiciens préférant en général essayer avec un calque et des cercles de différents rayons). On obtient ainsi ces deux cercles.



Le diamètre du Soleil est de 53 mm sur l'image. Nous savons que le diamètre angulaire du Soleil était de 0,532° ce jour-là, l'échelle est donc de 0,01°/mm. On mesure ensuite la distance en cm entre les deux centres, on obtient 15 mm donc 0,15°.

a ≈ 0,15°

Calcul de la distance d



Pour trouver la distance de la Lune, il faut encore connaître la distance d entre les lignes de visée en direction du Soleil depuis Caen et Alger (parallèles sur le schéma).

Pour la trouver, on peut utiliser un globe terrestre, matérialiser la direction du Soleil depuis Caen et Alger avec des bâtonnets (il faut connaître l'azimut et la hauteur du Soleil à l'heure dite) et mesurer la distance entre les deux bâtonnets (que l'on suppose parallèles puisqu'ils sont sécants au centre du Soleil…).

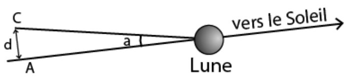
On peut aussi se servir d'une image de la Terre vue du Soleil le 3 octobre 2005 à 9h08 TU (11h08 en heure légale). On trouve ce type d'image sur le site suisse fourmilab (www. fourmilab.com/earthview/vplanet.html demander "view the Earth from the sun" puis entrer la date et l'heure).

Je me suis servi en plus de Google Earth qui m'a permis de repérer précisément Caen et Alger sur le globe.

On a donc ici la Terre vue du Soleil à l'heure de la photo (sans la Lune pour nous gêner). La distance d que l'on cherche doit être mesurée perpendiculairement à la ligne de visée Terre Soleil. C'est donc exactement la distance mesurée sur la carte.
Le diamètre équatorial de la Terre est de 61 mm sur l'image pour 12756 km en réalité, ce qui donne une échelle de 209 km au mm.
La distance entre Caen et Alger mesurée sur l'image est de presque 5 mm soit 1000 km en réalité. Notons qu'il est plus facile d'utiliser l'image originale donnée par Google Earth puisque l'on peut travailler au pixel près. J'avais trouvé ainsi 990 km

d ≈ 1000 km

Distance de la Lune



On connaît a et d, il ne reste plus qu'à calculer la distance AL ou CL.

Avec une tangente, on obtient environ 382 000 km. On peut aussi le faire sans trigo, en assimilant le segment de longueur d à un arc de cercle centré sur L : le cercle complet mesure 1000 km / 0,15 * 360 soit 2 400 000 km et on obtient le rayon en divisant par 2π. On trouve le même résultat.

Distance de la Lune : 382 000 km

Ce jour-là, la Lune était située à 393 000 km de nous, l'erreur est de 3%. Ce n'est pas si mal.

(On retrouve les calculs de la distance de la Lune dans le numéro 111 des Cahiers Clairaut, la revue du Comité de Liaison Enseignants et Astronomes, www.ac-nice.fr/clea)

Utilisation de géoplan W en classe de troisième

Sylvie LANAUD, collège Bachelard à Dijon
jean-louis.lanaud@wanadoo.fr

Il est à la mode de réclamer une salle multimédia et notre collège n'a pas échappé à la règle. Depuis l'année dernière, nous pouvons utiliser une salle équipée de 16 postes en réseau. Avoir une salle c'est bien, l'utiliser c'est mieux. Des activités sur tableur sont demandées dans les programmes mais cette année j'ai aussi eu envie d'utiliser d'autres logiciels, notamment en géométrie.

Voici l'activité que j'ai proposée en ce début d'année à une classe de 3^{e} de 23 élèves qui ne connaissaient pas le logiciel : classe hétérogène avec des élèves très faibles, 2 ou 3 excellents, bref, une classe normale d'un collège lambda.

Logiciel utilisé : geoplanW

Matériel utilisé
1 fiche par élève et 1 stylo : une séance informatique ne peut se limiter à des images sur un écran.

Temps prévu (et tenu)
50 minutes, y compris le temps d'allumage et d'extinction des ordinateurs.

Déroulement
Les élèves sont en binôme.
La fiche (4 pages) est distribuée aux élèves.
Les élèves « ouvrent » geoplanW.
Les consignes de la première page sont explicitées brièvement à l'oral.
Les élèves regardent les menus disponibles et, en fait, se mettent rapidement au travail.
Cette séance s'est poursuivie sans aucun problème. Les élèves ont peu de questions, ils réussissent assez naturellement à s'entraider et je n'ai qu'à superviser tranquillement le déroulement de l'activité.

Bilan
Cette activité a plu aux élèves.
Elle m'a permis de présenter la réciproque du théorème de Thalès.
Les élèves ont pu visualiser les configurations type et comprendre l'utilité de toutes les hypothèses.
Elle a été suivie d'un bilan court fait en classe et complétée par quelques exercices.
C'est vrai, nous avons passé une heure pour écrire « seulement » la réciproque du théorème de Thalès. Ce n'est pas du temps perdu : les élèves ont davantage l'impression de découvrir eux-mêmes la propriété. Tous les élèves adhèrent à l'activité, ils n'ont pas l'impression de faire des maths et la manipulation informatique atténue les éventuelles difficultés.

Annexe 1 : commentaires pour le professeur

- Informations techniques : tableau créé dans Word avec des cadres geoplanW obtenus grâce à la touche "Impr écran" suivie d'un "rognage".
- Page 2 § 5 : quand les élèves déplacent le point M, les droites ne sont pas toujours parallèles. L'ajout de la mesure algébrique ne se justifie pas, les élèves admettant assez facilement que les points doivent être alignés dans le même ordre.

Annexe 2 (4 pages de fiches) :

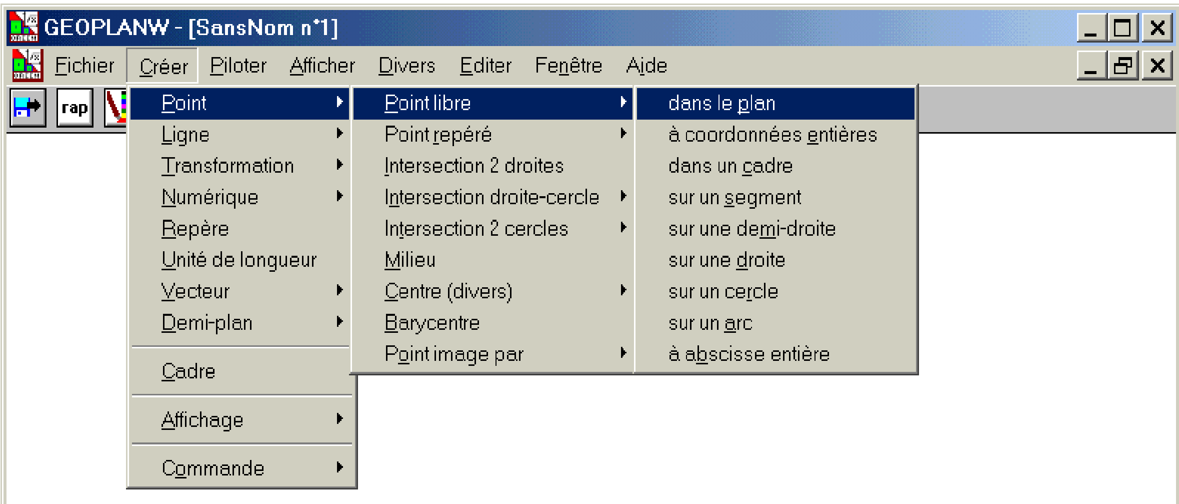
Activité geoplan W
Prise en main du logiciel

Geoplanw.exe

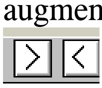
Quelques généralités

- Barre d'outils

- Lorsque vous cliquez sur l'un des menus de la barre d'outils (créer, piloter, afficher, divers, …) vous ouvrez un menu déroulant, comme ci-dessous :



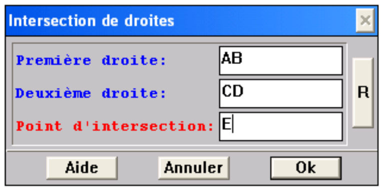
- 

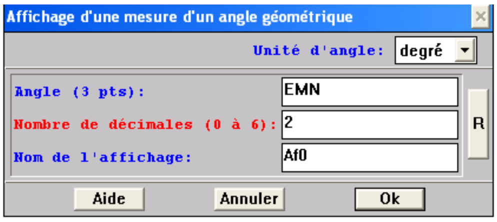
Utilisez ce bouton de la barre d'outils pour voir les rappels des objets prédéfinis et des objets construits.
-  « **couleur** » : **u**tilisez ce bouton de la barre d'outils pour changer les couleurs, augmenter la taille des caractères.
-  Utilisez ces boutons pour agrandir ou rétrécir votre figure.

Consignes générales

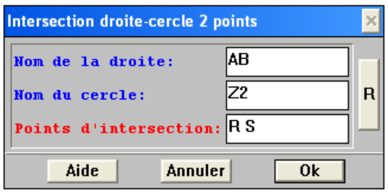
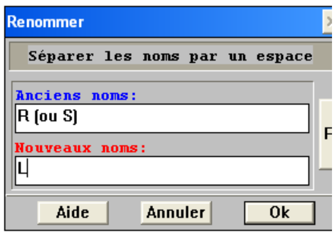
Chaque manipulation est précédée d'un ☐.
Coloriez ces cases au fur et à mesure que vous progressez.
Vous devez respecter les majuscules lors de l'activité car, pour le logiciel, a est différent de A.

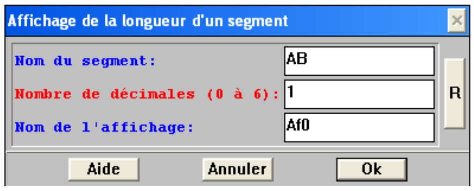
Réciproque du théorème de Thalès

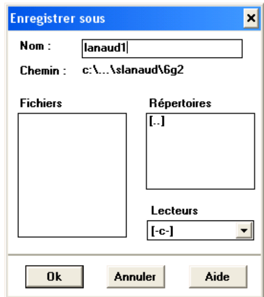
Enoncé	Réalisation avec geoplanW
1) Créer deux droites sécantes.	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Point libre, dans le plan.* Taper A, B, C et D pour les noms des points puis cliquer sur $\boxed{\text{Ok}}$.  ☐ Cliquer successivement sur *Créer, Ligne, droite, définie par deux points.* Taper AB et CD puis cliquer sur $\boxed{\text{Ok}}$. 
ASTUCE	☐ On peut changer les positions des points. Pour cela, cliquer sur l'un des points (clic gauche). Une main apparaît, maintenir la touche enfoncée et déplacer ce point.
DE LA COULEUR	☐ Pour mettre de la couleur, cliquer sur l'icône « couleur » puis choisir la couleur voulue, ensuite cliquer sur l'objet à colorier.
2) Créer le point d'intersection des deux droites.	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Intersection 2 droites.* Taper AB pour la première droite. Taper CD pour la deuxième droite. Taper E pour le point d'intersection puis cliquer sur $\boxed{\text{Ok}}$. 
3) Créer un point mobile sur (AB)	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Point libre, sur une droite.* Taper AB pour le nom de la droite. Taper M pour le nom du point puis cliquer sur $\boxed{\text{Ok}}$.  ☐ Faire bouger M ; il ne se déplace que sur (AB).
DE LA GOMME	☐ Pour effacer un point ou un objet, cliquer sur l'icône « couleur » puis cliquer sur "non dessiné" puis sur l'objet à gommer. ☐ Gommer les points A et D.
4) Placer N sur (EC) tel que : $\frac{EM}{EB}=\frac{EN}{EC}$.	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Point repéré sur une droite.* Taper EC pour la droite. Taper EM/EB pour l'abscisse.  Taper N pour le nom du point puis cliquer sur $\boxed{\text{Ok}}$.

<table>
<tr><td>5) Tracer les droites (MN) et (BC).</td><td>☐ Cliquer successivement sur Créer, Ligne, droite, définie par deux points.
Taper MN et BC puis cliquer sur Ok .
☐ Colorier ces deux droites en rouge.
☐ Déplacer le point M.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q1 : Que constatez-vous ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td>VERIFICATION</td><td>☐ Cliquer successivement sur Créer, Affichage, Mesure d'un angle géométrique.
Toujours choisir comme unité d'angle le degré
(par défaut, elle est en radian).
Ne jamais modifier le nom de l'affichage.
Taper EMN pour l'angle.
Taper 2 pour le nombre de décimales puis cliquer sur Ok .


☐ Recommencer cette procédure pour mesurer l'angle $\widehat{EBC}$.
☐ Déplacer le point M.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q2 : Que constatez-vous ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
Q3 : Que peut-on conclure ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
Q4 : Grâce à quel théorème ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès :
Etant données deux droites d et d' sécantes en A, deux points B et M de d, distincts de A, deux points C et N de d', distincts de A,
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M sont dans le même ordre que les points A, C, N,
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pourquoi les points E, M, B et les points E, N, C doivent-ils être alignés dans le même ordre ?</td></tr>
<tr><td>1) Ouvrir une nouvelle figure</td><td>☐ Dans Fichier, cliquer sur Nouvelle figure.</td></tr>
</table>

2) Créer 3 points.	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Point libre, dans le plan.* Taper A, B et C pour les noms des points puis cliquer sur Ok.
3) Créer 2 cercles.	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Ligne, cercle, défini par centre et point*. Taper A pour le centre. Taper B pour le point du cercle. Taper Z1 pour le nom du cercle puis cliquer sur Ok. ☐ Cliquer successivement sur *Créer, Ligne, cercle, défini par centre et point*. Taper A pour le centre. Taper C pour le point du cercle. Taper Z2 pour le nom du cercle puis cliquer sur Ok.
4) Créer les droites (AB) et (AC).	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Ligne, droite, définie par deux points*. Taper AB et AC puis cliquer sur Ok.
5) Créer les points d'intersection de (AB) et Z2	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Intersection droite-cercle, 2 points*. Taper AB pour la première droite. Taper Z2 pour le nom du cercle. Taper R et S pour les points d'intersection puis cliquer sur Ok. 
6) Créer les points d'intersection de (AC) et Z1	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Point, Intersection droite-cercle, 2 points*. Taper AC pour la première droite. Taper Z1 pour le nom du cercle. Taper T et U pour les points d'intersection puis cliquer sur Ok.
7) Renommer des points	☐ Cliquer successivement sur *Divers, renommer* pour appeler L le point R ou S qui est situé du même côté que B par rapport à A. ☐ Cliquer successivement sur *Divers, renommer* pour appeler M le point T ou U qui est situé du côté opposé à C par rapport à A. 
8) Créer (BM) et (LC)	☐ Cliquer successivement sur *Créer, Ligne, droite, définie par deux points*. Taper BM et LC puis cliquer sur Ok.

<table>
<tr>
<td>9) Afficher les rapports $\frac{AB}{AL}$ et $\frac{AM}{AC}$</td>
<td>☐ Cliquer successivement sur Créer, Affichage, Longueur d'un segment.
Taper AB pour le nom du segment.
Taper 1 pour le nombre de décimales.


☐ Recommencer pour les autres segments AL, AM et AC.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Compléter :
AB =   AL =   AM =   AC =
Calculer :
$\frac{AB}{AL} =$ $\frac{AM}{AC} =$
Q5 : Les droites sont-elles parallèles ?
....
Q6 : Quelle hypothèse n'est pas respectée ?
....</td>
</tr>
<tr>
<td>ENREGISTREMENT</td>
<td>Pour enregistrer votre figure, cliquez sur :
Fichier
Enregistrer la figure sous
Dans répertoires, double-cliquez sur [..]
Puis [mesdoc 1]
Puis [slanaud]
Nommez-le avec votre nom suivi de 1.

</td>
</tr>
</table>

Etude de la convergence de la suite $\left((\cos n)^n\right)$

et fractions continues

Emmanuel MOREAU, Lycée Davier à Joigny

I. Présentation[1]

La définition de la limite d'une suite ou d'une fonction est l'un des ajouts récents aux programmes des classes de Première S et Terminale S. Le programme de Première S nous invite, pour aborder ce thème, à développer la "notion intuitive de limite perçue à partir d'exemples" avant de présenter la "définition de la convergence d'une suite". On peut raisonnablement penser que les "exemples" doivent inclure des observations numériques. Le programme de Terminale S rappelle : "on montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou sur tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées". L'exploration numérique est donc réellement encouragée. Vient ensuite, dans le programme de Première S : "Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition", ceci accompagné d'un commentaire quelque peu vague : "le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique". Pourquoi pas, mais il est à craindre que l'utilisation de cette définition n'apparaisse trop formelle à des élèves qui n'en saisissent pas la nécessité. On peut peut-être aider les élèves pour qui l'épistémologie est chose absconse en leur proposant une suite pour laquelle l'étude de la convergence suscite des interrogations. La suite $\left((\cos n)^n\right)$ est un tel exemple où la convergence est problématique.

Abordant ce chapitre, je propose à mes 35 élèves d'observer numériquement, à la maison, le comportement de quelques suites, dont la suite de terme général $u_n = (\cos n)^n$. Pour les élèves qui ont fait ce travail relativement sérieusement −ça coûte peu d'efforts−il ne fait aucun doute que cette suite tend vers 0. Voici une belle occasion de nous offrir le beau rôle en demandant aux élèves de recalculer quelques termes, comme $u_{289} \approx 0.903$ ou $u_{666} \approx 0.902$.

Que penser de ces artefacts ? Suffit-il d'aller plus loin pour qu'ils disparaissent ? On peut alors demander aux élèves de reprendre l'exploration des valeurs prises par cette suite pour qu'ils se rendent compte par eux-mêmes de la rareté, mais de la présence, de ces sauts.

On obtient par exemple :

$u_{1043} \approx 0.961$	$u_{2130} \approx 0.99997$	$u_{10295} \approx -0.996$
$u_{100\,088} \approx 0.994$	$u_{513\,575} \approx 0.901$	$u_{1\,037\,090} \approx 0.908$

[1] Deux activités, directement inspirées de cet article, sont disponibles "clé en main" sur le serveur de l'académie : http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/index.html, rubrique "Thème".

Quelle conclusion tirer de ces observations, concernant la convergence de la suite ?
Les quelques sauts observés[2], très rares, empêchent-ils de dire que la suite tend vers 0 ? Non, pour quelques élèves qui auraient tendance à assimiler les notions de limite et de valeur d'adhérence. Le besoin d'une définition précise se fait alors ressentir, c'est ce que nous voulions[3]. Quant à l'étude mathématique de la convergence de cette suite, elle se trouve dans ce qui suit. Nous aurons besoin pour celle-ci d'un résultat faisant appel à un chapitre des mathématiques peut-être inattendu ici : les fractions continues.

II. Les fractions continues : des approximations rationnelles de bonne qualité

2.1. Définition

2.1.1. Généralités et notations

De manière générale, on appelle fraction continue une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots}}}$$

Une fraction continue peut être finie ou infinie.
Nous utiliserons dans ce qui suit des fractions continues où les b_i sont tous égaux à 1 et où les a_i sont des réels strictement positifs.
Pour des raisons de commodités, on note traditionnellement

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

c_n est appelé réduite d'ordre n, ou convergent d'ordre n, les réels a_i sont appelés quotients partiels.

2.1.2 Développement d'un réel en fraction continue.

A un réel x on peut associer de manière unique une suite de fractions emboîtées par le procédé suivant :

On pose $a_0 = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Si $a_0 \neq x$, on pose ensuite $r_1 = \dfrac{1}{x - a_0}$. On a alors $x = a_0 + \dfrac{1}{r_1}$.

---

[2] Il est surprenant de constater qu'une calculatrice standard fournit des résultats relativement fiables pour ces calculs (les résultats ont été vérifiés sur ordinateur).

[3] On peut également profiter de ce travail pour inviter les élèves à méditer sur la question suivante : on sait que $|\cos n| \leq 1$ et π étant irrationnel l'égalité est exclue, on a donc $|\cos n| < 1$. Or on sait que si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$. Ne peut-on pas conclure ?

L'égalité $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ est une autre occasion de méditer ce genre de situation.

On poursuit :

On pose $a_1 = [r_1]$ puis, si $a_1 \neq r_1$, $r_2 = \dfrac{1}{r_1 - a_1}$ de telle sorte que $x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{r_2}}$.

On peut itérer (sauf division par 0, on en parle dans quelques lignes) :
En posant $r_0 = x$, l'algorithme général s'écrit :

Algorithme pour le développement d'un réel en fraction continue :

$$\text{Pour tout } n \geq 0 : \begin{cases} a_n = [r_n] \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{r_n - a_n} \end{cases}$$

Les a_i, qui sont des parties entières, sont des entiers. Seul a_0 peut être négatif.
Répétant l'algorithme, on obtient la suite d'égalités :

$$x = r_0 = [a_0, r_1] = [a_0, a_1, r_2] = [a_0, a_1, a_2, r_3] = ...$$

et la suite des convergents est définie par :

$$c_0 = [a_0] \qquad c_1 = [a_0, a_1] \qquad c_2 = [a_o, a_1, a_2] \qquad \ldots$$

Les r_i s'appellent les restes et les c_i sont les convergents d'ordre i.
Les a_i étant des entiers, les c_i sont des nombres rationnels.

Si l'algorithme s'interrompt, c'est que x est rationnel[4].
En effet si, répétant l'algorithme, on obtient à la $n^{ème}$ étape l'égalité $a_n = r_n$ on a alors

$$c_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, r_n] = x$$

On ne peut alors poursuivre l'algorithme (r_{n+1} n'est pas défini) et on remarque que $x = c_n$ est rationnel.
Si x est irrationnel, on ne peut avoir d'égalité de forme $a_n = r_n$, sinon on aurait $x = c_n$ qui est rationnel. L'algorithme se poursuit donc indéfiniment.

Remarquons pour finir, avant de voir un exemple, que si x est irrationnel alors pour tout $n \geq 0$ on a $0 < r_n - a_n < 1$ puisque $a_n = [r_n]$ et que $a_n \neq r_n$, d'où $r_{n+1} = \dfrac{1}{r_n - a_n} > 1$ et donc $a_{n+1} \geq 1$. On en déduit que :
Si x est irrationnel, les a_i sont des entiers strictement positifs pour $i \geq 1$.

2.1.3. Un exemple : le cas du nombre π.

A l'aide d'une calculatrice, on obtient successivement :

$$a_0 = [\pi] = 3$$

puis $r_1 = \dfrac{1}{r_0 - a_0} = \dfrac{1}{x - a_0} = \dfrac{1}{\pi - 3}$ et $a_1 = \left[\dfrac{1}{\pi - 3}\right] = 7$

$r_2 = \dfrac{1}{r_1 - a_1} \approx 15.9$ d'où $a_2 = 15$

[4] La réciproque est vraie : si x est rationnel, alors l'algorithme s'interrompt après un nombre fini d'étapes.

$$r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} \approx 1.03 \text{ donc } a_3 = 1$$

$$r_4 = \frac{1}{r_3 - a_3} \approx 292.6 \text{ donc } a_4 = 292$$

……….

En poursuivant ainsi on obtient $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,....]$[5]

La suite des convergents est :

$c_0 = 3$	$c_1 = \frac{22}{7}$	$c_2 = \frac{333}{106}$
$c_3 = \frac{355}{113}$	$c_4 = \frac{103\,993}{33\,102}$	$c_5 = \frac{104\,348}{33\,215}$

Le fait que $a_4 = 292$ est "grand" montre que c_3 est une bonne approximation : on reconnaît la célèbre approximation $\pi \approx \frac{355}{113}$ connue en Chine depuis le $V^{ème}$ siècle et dont la précision est inférieure à un millionième.

c_4 fournit une approximation dont la précision est inférieure à un milliardième.

2.2. Résultats fondamentaux

Théorème :

Considérons la suite de fractions emboîtées de terme général $c_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$ où les a_i sont des réels strictement positifs.

Si on pose $p_{-1} = 1; q_{-1} = 0$ et $p_{-2} = 0; q_{-2} = 1$, on a alors pour tout $n \geq 0$ $c_n = \frac{p_n}{q_n}$,

les réels p_n et q_n étant définis par les relations de récurrence :

$$\textbf{(1)} \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$\textbf{(2)} \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Remarque : Ce théorème, qui n'a rien d'évident, permet de calculer aisément (sans que l'on soit obligé de procéder à des mises au même dénominateur successives) la suite des convergents sous forme de fraction simple lorsqu'on connaît les a_i. Il permet surtout d'établir les résultats qui vont suivre.

Preuve du théorème :

Etablissons par récurrence, pour tout $n \geq 0$, la propriété **P(n)** :

[5] Si l'on dispose d'une machine plus performante, on obtient pour π le développement [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, ...]

$P(n)$	Pour toute fraction emboîtée c_n de la forme $[a_0, a_1, ..., a_n]$ (comportant donc $(n+1)$ termes), on a $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ où : $\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} p_{-2} = 0 \\ q_{-2} = 1 \end{cases}$, et où pour tout $0 \leq k \leq n$ on a $\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$

P(0) est vraie car $c_0 = a_0 = \frac{a_0 \times 1 + 0}{a_0 \times 0 + 1} = \frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}}$.

On remarque de plus que $p_0 = a_0$ et $q_0 = 1$.

P(1) est vraie car $c_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$.

Supposons **P(n)** vraie à un rang $n \geq 0$ et montrons que **P(n+1)** est vraie.
Considérons donc une fraction emboîtée comportant $(n+2)$ termes :

$$c_{n+1} = [a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$$

Cette égalité peut également s'écrire $c_{n+1} = \left[a_0, a_1, ..., a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$ (d'où la nécessité de supposer les a_i réels et non entiers).

Or ce crochet ne contient plus $(n+2)$ mais $(n+1)$ termes, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$c_{n+1} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

où les nombres p_k et q_k, $0 \leq k \leq n-1$, sont associé à la fraction emboîtée $c_n = [a_0, a_1, ..., a_n]$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \text{ car la relation de récurrence est supposée vraie jusqu'à } k = n \end{aligned}$$

Si on pose $\begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases}$ on a donc bien $c_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, qui est ce que nous voulions prouver.

Corollaire :

(3) pour tout $n \geq 1$: $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$

(4) pour tout $n \geq 2$: $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$

(3') pour tout $n \geq 1$: $c_n - c_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$

(4') pour tout $n \geq 2$ $c_n - c_{n-2} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$

Preuve :
Pour établir **(3)** on soustrait **(2)** multipliée par p_{n-1} de **(1)** multipliée par q_{n-1}.
Pour établir **(4)** on soustrait **(2)** multipliée par p_{n-2} de **(1)** multipliée par q_{n-2}.
Pour établir **(3')** on divise **(3)** par $q_n q_{n-1}$.
Pour établir **(4')** on divise **(4)** par $q_n q_{n-2}$.

Conséquences . Si les a_i sont les termes obtenus par l'algorithme de décomposition en fraction continue (DFC) d'un irrationnel x, alors :

- La relation **(2)** montre, puisque les a_i sont supérieurs ou égaux à 1 pour $i \geq 1$ et les q_i strictement positifs pour $i \geq 0$, que la suite (q_n) est strictement croissante à partir du rang 1. Puisque c'est une suite d'entiers naturels, on en déduit que $\lim q_n = +\infty$. De même la suite (p_n) est strictement croissante et tend vers l'infini.

- La relation **(3)** montre, en application du théorème de Bézout, que les fractions $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ sont irréductibles pour tout $n \geq 0$.
- La relation **(4')** montre que (c_{2n}) est strictement croissante et que (c_{2n+1}) est strictement décroissante. La relation **(3')** montre que $c_{2n+1} - c_{2n}$ tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes, elles ont donc une limite commune. On en déduit que la suite (c_n) converge.

Il nous reste à montrer que (c_n) converge vers x lorsque les c_n sont les convergents successifs obtenus lors du DFC d'un irrationnel x. Perspective peu excitante dans la mesure où le résultat ne laisse guère de doute, mais nous établirons simultanément un résultat fort, relatif à la qualité de l'approximation de x par c_n.

2.3. Inégalité de Legendre

Théorème : Si $\dfrac{p_n}{q_n}$ est le $n^{ème}$ convergent obtenu par l'algorithme de DFC d'un irrationnel x, alors pour tout $n \geq 0$ $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \dfrac{1}{q_n{}^2}$.

Dans la littérature, on trouve rarement cette inégalité mentionnée sous cette appellation, mais il semble bien que ce soit Legendre qui le premier ait établit ce résultat.

Preuve :
On a, par définition du DFC d'un irrationnel (voir 2.1.2), pour tout $n \geq 0$:

$$x = [a_0, a_1, ..., a_n, r_{n+1}]$$

En application du théorème de la partie 2.2 on a donc, pour tout $n \geq 0$:

$$x = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

où les entiers p_k et q_k , $0 \leq k \leq n-1$, sont toujours définis par l'égalité $[a_0, a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$, la fraction étant irréductible. On en déduit :

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{\pm 1}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})}$$

car $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = \pm 1$ d'après **(3)**, or $q_{n-1} > 0$ et $r_{n+1} > a_{n+1}$, donc :

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^{\ 2}} \leq \frac{1}{q_n^{\ 2}}.$$

III. Etude de la convergence de la suite $\left((\cos n)^n\right)$

Théorème : La suite $\left((\cos n)^n\right)$ n'a pas de limite.

Preuve :
Pour démontrer ce théorème, comme chacun est persuadé que 0 est une valeur d'adhérence, il nous suffira d'en exhiber une deuxième.

Considérons la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ des convergents de π.

L'inégalité de Legendre permet d'écrire $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\ 2}}$, d'où en multipliant par $2q_n$:

$$|2q_n \pi - 2p_n| < \frac{2}{q_n}$$

Or pour tout entier n on a $0 \leq \frac{2}{q_n} \leq 2 < \pi$, on en déduit que $\cos\frac{2}{q_n} < \cos(2q_n\pi - 2p_n) \leq 1$.

Or pour tout réel u on a $\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$, on a donc $1 - \frac{2}{q_n^{\ 2}} \leq \cos(2p_n) \leq 1$.

Mais pour tout n on a $\frac{p_n}{q_n} < 4$ donc $\frac{1}{q_n} < \frac{4}{p_n}$ puis $\frac{2}{q_n^{\ 2}} < \frac{32}{p_n^{\ 2}}$, on en déduit que :

$$1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}} \leq \cos(2p_n) \leq 1$$

Donc, dès que $p_n \geq 6$ (pour que $1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}}$ soit positif), c'est-à-dire dès que $n \geq 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{32}{p_n^{\ 2}}\right)^{2p_n} \leq (\cos(2p_n))^{2p_n}$$

Or $\left(1-\frac{32}{{p_n}^2}\right)^{2p_n} = e^{2p_n \ln\left(1-\frac{32}{{p_n}^2}\right)} \geq e^{2p_n \times \frac{-64}{{p_n}^2}}$ car $\ln(1-u) \geq -2u$ si $u>0$ est suffisamment petit,

donc $$e^{-\frac{128}{p_n}} \leq (\cos(2p_n))^{2p_n} \leq 1$$

Mais $\lim p_n = +\infty$ donc par comparaison $\lim(\cos(2p_n))^{2p_n} = 1$, ce qui prouve que 1 est une valeur d'adhérence[6].

IV. Des entiers dont le cosinus est presque 1

L'encadrement $1-\frac{32}{{p_n}^2} \leq \cos(2p_n) \leq 1$ apparu dans la démonstration ci-dessus montre que le développement en fraction continue de π fournit un procédé pour trouver de tels entiers.
On a $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,....]$.
La relation de récurrence $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ nous permet de calculer très aisément les p_i :

$$p_0 = a_0 = 3$$
$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = 7 \times 3 + 1 = 22$$
$$p_2 = 15 \times 22 + 3 = 333$$
$$p_3 = 1 \times 333 + 22 = 355$$
$$p_4 = 292 \times 355 + 333 = 103\,993$$

etc.

On donne ci-dessous les premiers termes des suites (p_n) et $(\cos(2p_n))$ calculés par ordinateur :

3	0.96017028665036602054	833719	0.99999999998930080754
22	0.99984330864769122006	1146408	0.99999999999930902940
333	0.99984437405678246306	4272943	0.99999999999939592475
355	0.99999999818263592107	5419351	0.99999999999999708144
103993	0.99999999926813702535	80143857	0.99999999999999956352
104348	0.99999999975733877523	165707065	0.99999999999999985018
208341	0.99999999986831568045	245850922	0.99999999999999992513
312689	0.99999999998317188610	411557987	0.99999999999999998713

Puis :

1068966896	0.99999999999999999978174826245031935605331
2549491779	0.99999999999999999995995779009673428103095
6167950454	0.99999999999999999999551592839330454571602
14885392687	0.99999999999999999999562032999987477774740
21053343141	0.99999999999999999999999385131358663254485
1783366216531	0.99999999999999999999999902852629908037224
3587785776203	0.99999999999999999999999974154246939607003
5371151992734	0.99999999999999999999999977223580801894483
8958937768937	0.99999999999999999999999999030255749664848
139755218526789	0.99999999999999999999999999897267281673333
428224593349304	0.99999999999999999999999999999946187218622
5706674932067741	0.99999999999999999999999999999964086399922
6134899525417045	0.99999999999999999999999999999998196555447
30246273033735921	0.99999999999999999999999999999999614234555
66627445592888887	0.99999999999999999999999999999999989854778

[6] On peut démontrer que u_n est dense dans [-1 ; 1]. Pour tout contact : zim.moreau.mann@wanadoo.fr.

Remarque :
Si $\cos(2p_n) \approx 1$ alors $2p_n \approx 2k\pi$ donc $p_n \approx k\pi$ donc $\cos p_n$ est proche de 1 ou de -1. En fait $\cos p_n$ est plus proche, mais en valeur absolue, de 1 que $\cos(2p_n)$. Voir l'inégalité obtenue en 5.3, qui de plus peut être améliorée aisément.

V. Pour aller plus loin

5.1. Mesure d'irrationalité

Peut-on améliorer l'inégalité de Legendre : $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$? Ou, autre façon de poser la question, un irrationnel x étant donné, existe-t-il des rationnels $\frac{p}{q}$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ soit petit devant $\frac{1}{q^2}$?

Lagrange a montré que pour tout irrationnel x, l'inégalité $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ est vérifiée pour une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$.

Le théorème d'Hurwitz fournit des inégalités plus précises, mais toujours en $\frac{1}{q^2}$.Peut-on obtenir des inégalités en $\frac{1}{q^3}$? La réponse est oui, mais pas pour tous les irrationnels. Ceci nous conduit à définir la mesure d'irrationalité.

Mesure d'irrationalité : Pour un irrationnel x on appelle mesure d'irrationalité de x le réel $\mu(x)$ défini par $\mu(x) = \sup\{r > 0$ tel que l'inéquation $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^r}$ a une infinité de solutions $\}$

D'après l'inégalité de Legendre, pour tout irrationnel x on a $\mu(x) \geq 2$ puisque alors le DFC de x fournit une infinité de solution à l'inéquation $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, précisément : les convergents $\frac{p_n}{q_n}$.

Un théorème fondamental concernant les valeurs de $\mu(x)$ est le théorème de K.F.Roth (GB), qui a valu à son auteur la Médaille Fields en 1958.

Théorème de Roth :

- Si x est algébrique de degré > 1 alors $\mu(x) = 2$.
- Si x est transcendant, alors $\mu(x) \geq 2$.

Preuve : Non, je plaisante.
Pour les nombres transcendants, peu de valeurs exactes sont connues pour $\mu(x)$. Mais il a été démontré que :

- $\mu(e) = 2$
- $\mu(L) = +\infty$ où L est la constante de Liouville[7].

[7] La constante de Liouville est défini par $L = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!} = 0.110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,000\,...$
Historiquement, c'est le premier nombre dont on a démontré la transcendance (Liouville, 1850).

Bien entendu, la valeur exacte de $\mu(\pi)$ n'est pas connue, et la recherche d'une valeur approchée de ce nombre est l'objet de travaux actuels :

- en 1953, K.Mahler montre que $\mu(\pi) < 42$.
- en 1974, M.Mignotte montre que $\mu(\pi) < 21$.
- en 1992, M.Hata montre que $\mu(\pi) < 8.0161$.

Certains spécialistes de la question (dont les frères Borwein, à qui l'on doit aujourd'hui les algorithmes les plus rapides pour le calcul de valeurs approchées de π) pensent qu'il est assez probable que, comme pour e, on ait $\mu(\pi) = 2$, mais la démonstration semble encore lointaine. Pour démontrer le théorème qui suit, nous nous contenterons de la majoration $\mu(\pi) < 8.1$.

5.2. Augmentons la puissance

Théorème : Pour tout entier $m \geq 15$ la suite $\left((\cos n)^{n^m}\right)$ tend vers 0.

Preuve : Si $m \geq 15$ on a pour tout entier n : $|\cos n|^{n^{15}} \geq |\cos n|^{n^m}$, il nous suffira donc de montrer que la suite $\left((\cos n)^{n^{15}}\right)$ tend vers 0.

Par définition de la mesure d'irrationalité, et puisque $\mu(\pi) < 8.1$, l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ qui sont solution de l'inéquation $\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{8.1}}$ est fini.

Soit p_0 la plus grande des valeurs de p de cet ensemble fini. Pour $n > p_0$, tout nombre rationnel de la forme $\frac{n}{d}$ vérifie $\left|\pi - \frac{n}{d}\right| \geq \frac{1}{d^{8.1}}$ donc $|d\pi - n| \geq \frac{1}{d^{7.1}}$.

Posons $d_n =$ l'arrondi de $\frac{n}{\pi}$ à l'entier le plus proche.

Il n'y a pas d'ambiguïté (comme pour 13.5) car $\frac{n}{\pi}$ est irrationnel.

On a ainsi $\left|d_n - \frac{n}{\pi}\right| < \frac{1}{2}$ d'où $|d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$.

On obtient ainsi la double inégalité : $\frac{1}{d_n^{7.1}} \leq |d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$.

Or pour n assez grand on a $\frac{n}{d_n} > 3$ puisque $\left(\frac{n}{d_n}\right)$ est une suite qui tend vers π donc $\frac{1}{d_n} > \frac{3}{n}$ et

donc $\left(\frac{3}{n}\right)^{7.1} \leq |d_n\pi - n| < \frac{\pi}{2}$

D'où, pour n assez grand : $\cos n \leq \cos\left(\frac{3}{n}\right)^{7.1} \leq 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}\right)^{14.2} \leq 1 - \frac{1}{n^{14.2}}$

car $\cos u \leq 1 - \frac{u^2}{3}$ pour u suffisamment petit. On en déduit que

$$|\cos n|^{n^{15}} \leq \left(1 - \frac{1}{n^{14.2}}\right)^{n^{15}} = \exp\left(n^{15}\ln\left(1 - \frac{1}{n^{14.2}}\right)\right) \approx e^{-n^{0.8}} \to 0$$

Ce qui démontre notre théorème. Ajoutons :

Résultat douteux : S'il s'avérait que $\mu(\pi)=2$, on montrerait de la même manière que $\lim |\cos n|^{n^{2+\varepsilon}}=0$ pour tout $\varepsilon>0$.

Remarque : Des valeurs absolues sont nécessaires pour définir la suite lorsque ε n'est pas entier.

5.3. Et la suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$?

Théorème : La suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$ n'a pas de limite.

La démonstration qui suit est presque identique à la démonstration de la non convergence de la suite $(\cos n)^n$, mais – outre le fait qu'à cet endroit de l'article la question de la convergence de cette suite se pose naturellement – les observations numériques associées à cette suite sont particulièrement étonnantes (voir plus loin). Ces observations peuvent être faites en salle informatique avec les élèves (voir par exemple ce qui est proposé sur le site de l'académie de Dijon : http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/index.html).

Preuve du théorème :

Reprenons les notations de la partie 3 : $\left|\pi-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_n{}^2}$ et posons $e_n=|q_n\pi-p_n|$.

q_n étant entier on a : $|\cos p_n|=|\cos e_n|=\cos e_n$ pour n assez grand car $\lim e_n=0$

D'où, puisque $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel x : $|\cos p_n|\geq 1-\dfrac{e_n{}^2}{2}$

Puis : $$|\cos p_n|^{p_n{}^2}\geq \exp\left[p_n{}^2\ln\left(1-\frac{e_n{}^2}{2}\right)\right]$$

Utilisant l'inégalité $\ln(1-u)\geq -2u$ valable pour $u>0$ suffisamment petit, on obtient :

$$|\cos p_n|^{p_n{}^2}\geq \exp\left(-p_n{}^2e_n{}^2\right) \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

Or $e_n<\dfrac{1}{q_n}\Rightarrow -p_n{}^2e_n{}^2>-\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)^2>-10$ pour n assez grand car $\lim -\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)^2=-\pi^2=-9.8...$

Donc pour n assez grand : $|\cos p_n|^{p_n{}^2}\geq e^{-10}$.

Ceci prouve qu'il existe une suite extraite qui ne tend pas vers 0.

Pour qui est convaincu que 0 est une valeur d'adhérence (on peut le montrer sans problème), ceci suffit à prouver le théorème.

Observations numériques

- pour $10\ 000\leq n\leq 100\ 000$, on observe qu'aucun terme n'excède 10^{-17} en valeur absolue.

pour $10\ 000\leq n\leq 1\ 000\ 000$, dix termes seulement excèdent 10^{-6} en valeur absolue, qui correspondent aux valeurs suivantes de n : 103 638 ; 103 993 ; 104 348 ; 104 703 ; 208 341 ; 208 696 ; 312 689 ; 521 030 ; 625 378 et 833 719.

On rencontre dans ces dernières listes des termes de la suite (p_n) : 103 993 ; 104 348 ; 208 341 ; 312 689 et 833 719. Ceci est en accord avec la dernière partie, mais il est surprenant de constater que l'on rencontre aussi des combinaisons de ces p_n :

$$103\,638 = 103\,993 - 355 \; ; \; 104\,703 = 104\,348 + 355 \; ; \; 208\,695 = 208\,341 + 355 \; ;$$
$$521\,030 = 208\,341 + 312\,689 \text{ et } 625\,378 = 2 \times 312\,689.$$

Ceci se justifie à l'aide de la formule d'addition des cosinus :
Considérons deux numérateurs de réduites : p_n et p_m. On sait que $|\cos p_n| \approx 1$, et donc $\sin p_n \approx 0$. De même pour p_m. On a alors $|\cos(p_n + p_m)| = |\cos p_n \cos p_m - \sin p_n \sin p_m| \approx 1$.

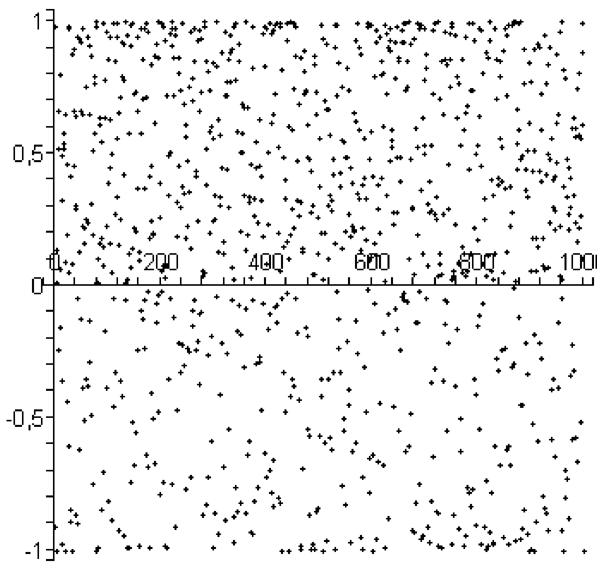
Selon la qualité de cette dernière approximation, il se peut alors que $(\cos(p_n + p_m))^{(p_n+p_m)^2}$ ne soit pas trop proche de 0.

Pour terminer, intéressons nous aux valeurs de la suite $\left((\cos p_n)^{p_n^2}\right)$. Voici les douze premiers termes de cette suite, et les valeurs de p_n correspondantes :

3	0.9134549359	208341	0.2395551826
22	0.9812182213	312689	0.6627617336
333	0.0133736467	833719	0.1557943538
355	0.9999427433	1146408	0.7968990643
103993	0.1382500752	4272943	0.0634623947
104348	0.5165648219	5419351	0.9787989074

Sur le graphique ci-contre sont représentés les points de coordonnées $\left(n \; ; \; (\cos p_n)^{p_n^2}\right)$ pour n compris[8] entre 0 et 1000.

On constate que les nombres $(\cos p_n)^{p_n^2}$ semblent se répartir sur une grande partie[9] de l'intervalle [-1 ; 1].



Remarque : Mieux vaut ne pas dire à des élèves de lycée que la suite $\left((\cos n)^{n^2}\right)$ ne tend pas vers 0. Armés de leurs calculatrices (voir les observations numériques), pour qui nous prendraient-ils ?

[8] p_{1000} est un entier de 513 chiffres.

[9] Attention tout de même aux conclusions hâtives : cette suite n'est pas dense dans [-1 ; 1] puisque, par exemple, aucun terme n'appartient à l'intervalle $\left[-e^{-10} ; e^{-10}\right]$

La formule de Héron à l'aide des aires

Jean-Claude ANDRIEUX, Lycée Clos Maire à Beaune

La formule dite de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donnant l'aire d'un triangle S en fonction du demi-périmètre p du triangle et des côtés a, b et c peut être démontrée facilement en Seconde en utilisant des propriétés des aires et des triangles semblables.

Considérons un triangle quelconque ABC. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés du triangle et r et r_A les rayons respectifs du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$. $[ABC]$ désignera l'aire du triangle ABC.

On a :

$$[ABC] = [BIC] + [CIA] + [AIB] = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = pr$$

et

$$[ABC] = [ABJ] + [ACJ] - [BCJ] = \frac{cr_A}{2} + \frac{br_A}{2} + \frac{ar_A}{2} = (p-a)r_A$$

On en déduit que :

$$([ABC])^2 = p(p - a)r\,r_A$$

D'autre part, les triangles *IEB* et *BFJ* sont semblables car ce sont des triangles rectangles tels que

$$I\widehat{B}E = 90° - J\widehat{B}F = B\widehat{J}F$$

Il est bien connu que $BE = p - b$ et que $BF = p - c$, on a alors

$$\frac{IE}{BF} = \frac{BF}{JF} \Leftrightarrow \frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_A}$$

On en tire

$$r\,r_A = (p - b)\,(p - c)$$

Puis

$$([ABC])^2 = p(p - a)r\,r_A = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

et donc

$$\boxed{[ABC] = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

Un jeu curieux : le jeu du premier sorti

Michel LAFOND, Lycée Le Castel à Dijon

I. Description du jeu

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant ["Le premier sorti"] :

- Un entier positif n est fixé. C'est l'objectif à atteindre.
  Une pièce (équilibrée) est lancée, le résultat (Pile ou Face) étant ignoré des deux joueurs.
- Le premier joueur A essaie de deviner l'état de la pièce en formulant une hypothèse à haute voix pour que B l'entende.
- Le second joueur B essaie lui aussi de deviner l'état de la pièce en formulant une hypothèse.
  Il peut tenir compte du choix précédent de A.
- La pièce est retournée et chaque joueur qui a deviné juste gagne un point. [pas de pénalité pour les perdants].
- L'expérience est répétée jusqu'à ce qu'un joueur obtienne n points. A chaque fois, c'est A qui parle le premier.
- Dans le cas où les deux joueurs obtiennent n en même temps, un tirage au sort désigne le gagnant.

II. Exemple : le but est d'obtenir $n = 3$

lancer	Choix de A	Choix de B	Points obtenus A	B
P	P	F	1	0
P	F	F	1	0
F	F	P	2	0
P	F	P	2	1
F	P	F	2	2
F	F	P	3	2

A gagne.

III. Analyse du jeu

On pourrait penser que le jeu est équitable, en ce sens que la dissymétrie due à l'ordre des intervenants n'avantage pas B qui, comme A, a exactement une chance sur deux de deviner juste.
Et pourtant :
Notons P_n (A) et P_n (B) les chances de gain respectives de A et de B [pour une stratégie donnée].
Si chaque joueur répond au hasard [stratégie aléatoire], alors bien entendu P_n (A) $=$ P_n (B) $=$ ½.
Le joueur A, qui n'a aucune information, peut aussi bien jouer au hasard [ou jouer toujours Pile, ou jouer toujours Face] cela ne changera rien à ses chances de gain. Mais ce n'est pas vrai pour B. En effet, supposons qu'à un moment du jeu, B soit en avance d'un point sur A. Par exemple A a obtenu 1 point et B 2 points, bilan qu'on notera (1 ; 2). Dans ce cas, B est sûr de gagner !

Car, pour tous les lancers suivants, B n'a qu'à dire exactement comme A, et le bilan (1 ; 2) passera au lancer suivant :

ou bien à (1 ; 2) si A (donc B) se sont trompés car alors personne ne marque,
ou bien à (2 ; 3) si A (donc B) ont deviné juste et marquent chacun un point.

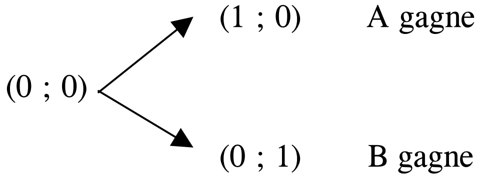
À plus ou moins long terme, le bilan passera ensuite à (3 ; 4) puis (4 ; 5) etc. B gagnera.

La meilleure stratégie de B devient évidente, car tant que B dit comme A, l'écart de points du bilan (a ; b) à savoir b - a, reste inchangé d'un lancer à l'autre.
Le seul espoir pour B d'obtenir une avance d'un point est donc de dire exactement le contraire de A.
Aussi B adoptera la stratégie optimale suivante S_0 :

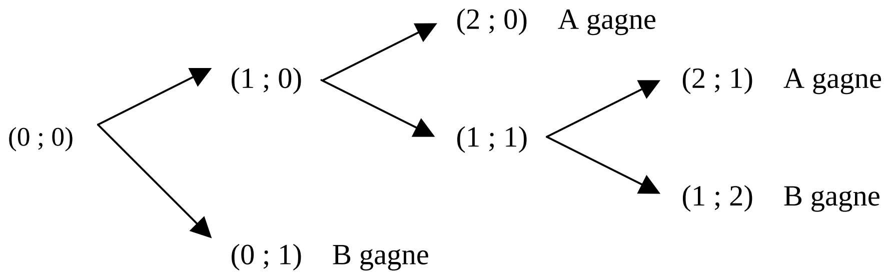
B dit le contraire de A, jusqu'à ce qu'il devance A d'un point.
(Si cela ne se produit jamais, B perdra ou il y aura tirage au sort)
Lorsque B a obtenu son avance d'un point, et si le jeu n'est pas encore terminé à ce moment là, B dira pour les lancers à venir, la même chose que A et il gagnera nécessairement.

IV. Exemples

Si $n = 1$ $P_n(A) = P_n(B) = ½$. L'arbre des possibilités est ci-dessous :



Si $n = 2$ $P_2(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $P_2(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \approx 0{,}625$

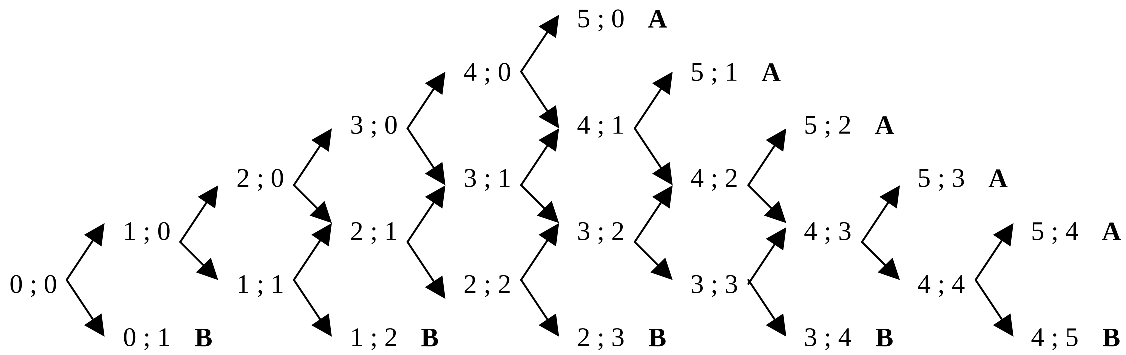


On vérifie que :

Si $n = 3$ $P_3(A) = \frac{5}{16} \approx 0{,}312$ $P_3(B) = \frac{11}{16} \approx 0{,}688$

Si $n = 4$ $P_4(A) = \frac{35}{128} \approx 0{,}273$ $P_4(B) = \frac{93}{128} \approx 0{,}727$

Si $n = 5$ voici le détail, avec en gras : le gagnant.



Le calcul des probabilités s'effectue de proche en proche avec les règles habituelles de la manipulation des arbres, sachant que la probabilité de chaque branche vaut ½ :
En identifiant les bilans et les évènements correspondants, le début du calcul est :

P(1 ; 0) = P(0 ; 1)) = ½. puis P(2 ; 0) = P(1 ; 1) = ¼.

Ensuite :
P(3 ; 0) = 1/8 P(2 ; 1) = ½ P(2 ; 0) +1/2 P(1 ; 1) = 1/8 + 1/8 = ¼ P(1 ; 2) = 1/8 etc.

On arrive à :

P_5 (A) = P(5 ; 0)+P(5 ; 1)+P(5 ; 2)+P(5 ; 3)+P(5 ; 4) = $\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{9}{128}+\frac{7}{128}+\frac{7}{256}=\frac{63}{256}\approx 0{,}256$.

P_5 (B) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{9}{16}+\frac{5}{128}+\frac{7}{256}=\frac{193}{256}\approx 0{,}754>\frac{3}{4}$.

Il y a un gros avantage pour B qui gagne plus de 3 fois sur 4.

V. Généralisations

a) Si l'objectif du jeu est d'obtenir n, alors, avec la stratégie ci-dessus, on montre que :

P_n (A) = $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ [On retrouve bien P_5 (A) = $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\frac{9}{10}=\frac{63}{256}$]

P_n (B) = 1-$\prod_{k=1}^{k=n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$.

La démonstration est difficile et fait appel aux nombres de Catalan.

Comme ln P_n (A) = $\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ équivaut à $-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2k}$ qui tend vers - ∞, on en déduit que

$\lim_{n\to+\infty} P_n(A)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(B)=1$.

Conclusion si n est grand, le second joueur est presque sûr de gagner. [déjà P_{32} (B) > 0,9]

b) Si 3 joueurs jouent avec les mêmes règles [A parle d'abord, B ensuite et enfin C] avec tirage au sort entre les gagnants ex æquo éventuels, le problème devient extrêmement compliqué, (même pour n = 2 !) et les meilleures stratégies de B et C ne sont pas connues. Cela dépend d'une éventuelle coopération entre B et C, si la coopération n'est pas interdite par la règle. La seule chose claire est que le jeu est défavorable au premier joueur.

Bibliographie : Mathématics magazine, Vol 78 n°1, Février 2005, pages 15 à 25.