SOLUTION – 010.

Si E et D désignent respectivement les fonctions partie entière et partie décimale, démontrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x\,E\left(\dfrac{1}{1 + D(1/x)}\right)}$$ est une bijection de] 0 ; 1] dans] 0 ; 1 [

Déterminer la bijection réciproque.

Soit x appartenant à] 0 ; 1].

- Ou bien x est l'inverse d'un entier n : $x = \dfrac{1}{n}$.

Dans ce cas $D(1/x) = D(n) = 0$, donc dans l'expression de $f(x)$ la partie entière vaut 1 et par suite $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(x) = \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1/n}{1+1/n} = \dfrac{1}{n+1}$.

- Ou bien x n'est pas l'inverse d'un entier n.

Dans ce cas $D(1/x)$ est strictement positif, donc dans l'expression de $f(x)$ la partie entière vaut 0 et par suite $f(x) = x$.

f ne fait donc qu'envoyer [1 ; 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 …] vers [1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5 ; 1/6…] sans toucher au reste. La bijection est alors évidente.

La bijection réciproque est définie par : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - x\,E\left(\dfrac{1}{1 + D(1/x)}\right)}$.