SOLUTION – 012.

Dans l'ensemble des réels strictement positifs, démontrer que :

$$\frac{a}{b}+2\frac{b}{c}+4\frac{c}{a}=6 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=5$$

Posons $x=\frac{a}{b} \quad y=2\frac{b}{c} \quad z=4\frac{c}{a}$

On a $xyz = 8$ donc la moyenne géométrique de (x, y, z) est 2.

Mais on sait que la moyenne arithmétique est au moins égale à la moyenne géométrique, avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

C'est le cas ici, puisque la moyenne arithmétique vaut $\frac{x+y+z}{3}=\frac{6}{3}=2$.

On est dans le cas d'égalité, donc $x = y = z$ soit $\frac{a}{b}=2\frac{b}{c}=4\frac{c}{a}$ d'où l'on tire :

$2\,b^2 = ac$ et $2\,c^2 = ab$. D'où $2\,b^3 = abc = 2\,c^3$.

Ainsi $b = c$ ce qui entraîne $a = 2\,b = 2\,c$.

C'est facile de terminer : $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{8c^3+c^3+c^3}{2c^3}=5$.