SOLUTION – 016.

On donne **7** entiers naturels $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.
Démontrer qu'on peut en extraire **4** dont la somme est un multiple de **4**.

Prenons 3 entiers quelconques. Chacun d'eux est pair ou impair.
Il y a donc parmi eux deux entiers de même parité. Leur somme est paire, donc soit de la forme $4k$ soit de la forme $4k + 2$.

A fortiori, on est sûr de trouver parmi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ deux entiers disons a_1, a_2 tels que leur somme soit $S = a_1 + a_2 = 4k$ ou $4k + 2$.
On recommence avec les 5 entiers restants a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 pour arriver à la conclusion que parmi eux on peut trouver deux entiers disons a_3, a_4 tels que leur somme soit $S' = a_3 + a_4 = 4k'$ ou $4k' + 2$.
On termine avec les 3 entiers restants a_5, a_6, a_7 pour arriver à la conclusion que parmi eux on peut trouver deux entiers disons a_5, a_6 tels que leur somme soit $S'' = a_5 + a_6 = 4k''$ ou $4k'' + 2$.
Enfin, parmi S, S', S'' il y en a deux de même "nature" modulo 4, disons S et S'.
Autrement dit, on a soit $S = 4k$ et $S' = 4k'$ soit $S = 4k + 2$ et $S' = 4k' + 2$.

Dans les deux cas, S + S' est la somme de 4 entiers (parmi ceux proposés), et cette somme est un multiple de 4.