SOLUTION – 018.

Soit une statistique à une variable X, soit (x_i, n_i) dont les modalités x_i appartiennent toutes à l'intervalle $[a, b]$.
Démontrer que si $\overline{x}$ et V désignent la moyenne et la variance, on a la majoration :

$$V \leq (\overline{x} - a)(b - \overline{x}).$$

Soit n l'effectif total.

- Démontrons d 'abord la propriété lorsque $a = 0$ et $b = 1$.

x_i est dans [0, 1] donc $x_i^2 \leq x_i$.

On a alors $V = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \overline{x}^2 \leq \frac{1}{n}\sum n_i x_i - \overline{x}^2 = \overline{x} - \overline{x}^2 = \overline{x}(1 - \overline{x})$

On a bien $V \leq (\overline{x} - 0)(1 - \overline{x}) = (\overline{x} - a)(b - \overline{x})$.

- Dans le cas général, il suffit de poser $y = \frac{x-a}{b-a}$.

x_i est dans $[a, b]$ donc y_i est dans [0, 1] et on peut appliquer le résultat précédent à la statistique Y :

$V(y) \leq \overline{y}(1 - \overline{y})$. (1)

Or, d'après les propriétés bien connues de la variance et le la moyenne :

$V(y) = \frac{1}{(b-a)^2} V(x-a) = \frac{1}{(b-a)^2} V(x)$ et $\overline{y} = \frac{\overline{x}-a}{b-a}$ d'où $1 - \overline{y} = \frac{b-\overline{x}}{b-a}$.

En remplaçant dans (1), on obtient :

$\frac{1}{(b-a)^2} V(x) \leq \frac{\overline{x}-a}{b-a}\frac{b-\overline{x}}{b-a} = \frac{(\overline{x}-a)(b-\overline{x})}{(b-a)^2}$ d'où $V(x) \leq (\overline{x}-a)(b-\overline{x})$ ce qu'il fallait démontrer.