SOLUTION - 002.

1) Peut-on trouver des signes + ou – pour avoir l'égalité :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm 99 \pm 100 = \mathbf{1994}\ ?$$

2) Que doivent vérifier les entiers naturels S et n pour qu'on puisse écrire :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm n = \mathrm{S}\ ?$$

Commençons par la question 2) :

Soit l'égalité (E) $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm n = \mathrm{S}$.

Puisque $x \equiv -x \mod 2$, on a $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm n \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \mod 2$.

(E) entraîne donc $\mathrm{S} \equiv \frac{n(n+1)}{2} \mod 2$.

Il est aussi nécessaire que S soit compris entre :

$-1 - 2 - 3 - \dots - n = -\frac{n(n+1)}{2}$ et $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ces deux conditions sont aussi suffisantes, car si

$\mathrm{S} \equiv \frac{n(n+1)}{2} \mod 2$ avec S compris entre $-\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2}$, alors, en soustrayant membre à membre

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm n = \mathrm{S}$, on obtient :

$2\,(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p) = \frac{n(n+1)}{2} - \mathrm{S}$ où les x_i sont les termes du membre de gauche de (E) qui sont précédés du signe -.

Quant à $S' = \frac{n(n+1)}{2} - \mathrm{S}$, il est compris entre $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$, c'est à dire entre 0 et $n\,(n + 1)$.

(E) est donc équivalente à (E') $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p = s$ où s est compris entre 0 et $\frac{n(n+1)}{2}$,

les x_i étant des entiers distincts compris entre 1 et n.

Pour montrer que (E') a une solution, on remarque que c'est évident si s est inférieur à n et que si s est supérieur ou égal à n, $s = n + s'$. Alors en prenant $x_p = n$ dans (E'), il reste :

(E'') $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{p-1} = s'$ où s' est compris entre 0 et $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ les x_i étant des entiers distincts compris entre 1 et n - 1.

On passe de E' à E'' en remplaçant n par $n – 1$, ce qui fournit un procédé explicite de construction.

> Le voici : on remplace l'équation $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm n = \mathrm{S}$ par l'équation équivalente et très facile à résoudre : $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{p-1} = s'$ où $s' = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - S\right)$.
>
> Les x_i étant des entiers distincts compris entre 1 et n.
> Les valeurs ainsi trouvées pour les x_i seront prises avec le signe +, toutes les autres avec le signe -.

Appliquons ce procédé à la construction de la solution de 1) : $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ \dots\ \pm 99 \pm 100 = \mathbf{1994}$.
C'est possible puisque :

$\mathrm{S} = 1994 \equiv \frac{100\,(101)}{2} = 5050 \mod 2$ et S = 1994 est compris entre $-1 - 2 - 3 - \dots - 100 = -5050$ et $+5050$.

(E') est ici $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = s' = \frac{1}{2}\left(\frac{100(101)}{2} - 1994\right) = 1528$ où les x_i étant des entiers distincts compris entre 1 et 100.

On choisit 100, puis 99, puis 98 etc. autant de fois que c'est possible sans dépasser 1528 :

$100 + 99 + 98 + \ldots + 85 = 1480$ donc (E') est satisfaite par $100 + 99 + 98 + \ldots + 85 + 48 = 1528$.

Pour réaliser $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm 99 \pm 100 = 1994$, il suffit donc de prendre les signes + pour les 17 entiers 48, 85, 86, 87, … 100 et le signe – pour tous les autres.