SOLUTION – 020.

Quel est le dernier chiffre non nul de **100 !** ?

Rappel **100 ! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × … × 99 × 100.**

La réponse est 4, mais ce n'est pas si simple :
Examinons tous les facteurs multiples de 5 rencontrés dans 100 !
Ce sont : 5, 2×5, 3×5, …, 19×5 et $2^2 \times 5^2$.
Un compte précis des exposants donne pour leur produit : $2^{18} \times 5^{24} \times 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$.
Multiplions par le facteur $64 = 2^6$.
On obtient ; $2^{24} \times 5^{24} \times 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 10^{24}$.
Remarquons que $3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$ se termine par 1.
Regroupons les facteurs restants ainsi :
$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9) \times (11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19) \times (21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29) \times$ etc. jusqu'à $(91 \times 92 \times 93 \times 94 \times 96 \times 97 \times 98 \times 99)$.
Attention le facteur 64 ayant déjà été pris, on a pour la soixantaine le bloc tronqué :
$(61 \times 62 \times 63 \times 66 \times 67 \times 68 \times 69)$.
Il est facile de voir que chaque bloc parenthésé se termine par 6 sauf le bloc de la soixantaine qui se termine par 4.
Il n'y a plus qu'à regrouper : 10^{24} fournit les 24 zéros terminaux, et pour le reste, on a :
Un facteur qui se termine par 1, un facteur qui se termine par 4 et 8 blocs qui se terminent par 6.
Il n'y a plus de doute, 100 ! se termine par **4**000000000000000000000000.

Remarque : En notant D (n) le dernier chiffre non nul de n, on montre que :
Si $n = 5k + r$ alors D (n !) = D (2^k k ! r !)

Ainsi : puisque 100 = 5 × 20 + 0 et 20 = 5 × 4 + 0 on a :

D (100 !) = D (2^{20} 20 !) = D (2^{20} × D (20 !)) = D (6 D (2^4 4 !) = D (6 × 4) = 4.

Attention, on n'a pas toujours D (m n) = D(D (m) × D (n)).

Par exemple : D (24 × 25) = D (100) = 1 alors que D (24) × D (25) = 4 × 5 = 20 et D (20) = 2.

Et si vous n'êtes pas convaincu, voici in extenso 100 ! :

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000.