

SOLUTION – 022.

Soit un triangle de côtés a, b, c non nuls. Démontrer que l'un au moins des rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ appartient à l'intervalle $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$.

Notons I l'intervalle $[w, w']$ où $w = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $w' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

On raisonne par l'absurde :

Si les trois rapports étaient extérieurs à I, au moins deux d'entre eux seraient inférieurs à w .

(Ou au moins deux d'entre eux seraient supérieurs à w' , mais cela revient au même en inversant les rapports puisque $w' = 1/w$.)

On aurait donc par exemple $a/b < w$ et $b/c < w$ ce qui entraînerait $b < cw$; $a < bw < cw^2$.

Mais alors on aurait $c \leq a + b < cw^2 + cw = c(w^2 + w) = c$ puisque $w^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ceci ($c < c$) est absurde, d'où le résultat.