

SOLUTION – 030.

Trouver une suite finie d'entiers relatifs de longueur maximale telle que :

- toutes les sommes de **5** termes consécutifs soient strictement négatives,
- toutes les sommes de **8** termes consécutifs soient strictement positives.

La suite **(5, -8, 5, 5, -8, 5, -8, 5, 5, -8, 5)** convient. Elle est de longueur 11, et on ne peut pas faire plus long, car si on avait une suite de longueur 12 : $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l)$ avec :

$$a + b + c + d + e < 0 \quad b + c + d + e + f < 0 \quad c + d + e + f + g < 0 \quad d + e + f + g + h < 0$$

$$e + f + g + h + i < 0 \quad f + g + h + i + j < 0 \quad g + h + i + j + k < 0 \quad h + i + j + k + l < 0$$

et

$$a + b + c + d + e + f + g + h > 0 \quad b + c + d + e + f + g + h + i > 0$$

$$c + d + e + f + g + h + i + j > 0 \quad d + e + f + g + h + i + j + k > 0 \quad e + f + g + h + i + j + k + l > 0$$

Alors, par sommation des 8 premières inégalités, on aurait :

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 5f + 5g + 5h + 4i + 3j + 2k + l < 0.$$

et par sommation des 5 dernières inégalités, on aurait :

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 5f + 5g + 5h + 4i + 3j + 2k + l > 0.$$

Ceci est manifestement absurde.

Remarquons l'usage astucieux d'une propriété de la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 etc. qui permet le choix des nombres 5 et 8 pour ce problème.

La propriété (valable pour 4 termes consécutifs quelconques de la suite) est

$$[3 \times 5 - 2 \times 8 = -1 \text{ et } 5 \times 5 - 3 \times 8 = +1] \quad \text{ou} \quad [8 \times 8 - 5 \times 13 = -1 \text{ et } 5 \times 8 - 3 \times 13 = +1] \text{ etc.}$$