SOLUTION – 034.

Démontrer qu'on ne peut pas en général trouver le volume d'un tétraèdre connaissant seulement les aires des 4 faces.

Le tétraèdre dont deux côtés opposés sont égaux à 1 et les quatre autres côtés égaux à 2 a ses 4 faces de même aire : $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ et un volume de $\frac{1}{12}\sqrt{14}$ soit environ 0,312.

Le tétraèdre dont les quatre côtés sont égaux à $5^{\frac{1}{4}}$ a ses 4 faces de même aire : $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ et un volume de $\frac{1}{12}5^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}$ soit environ 0,394.

Pour ces deux tétraèdres, les aires des 4 faces sont les mêmes, mais les volumes diffèrent.

<u>Annexe</u> :

1) L'aire d'un triangle de côtés *a, b, c* est donnée par la formule de Héron :
Aire (*a, b, c*) = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p=\frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.
2) Le volume d'un tétraèdre T connaissant les longueurs des 6 côtés est plus compliqué :

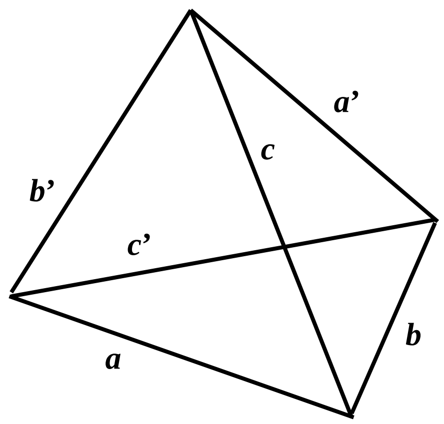

Figure 1

On désigne par (a, a') ; (b, b') ; (c, c') les trois couples des mesures d'arêtes opposées. (Figure 1)

Pour simplifier, on note :

S1 = $a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$ la somme des carrés des longueurs des 6 arêtes.
S2 = $a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + c^2 c'^2$
S3 = $(a^2 + a'^2)\, a^2 a'^2 + (b^2 + b'^2)\, b^2 b'^2 + (c^2 + c'^2)\, c^2 c'^2$.
S4 = $a^2 b^2 c'^2 + a'^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + a^2 b'^2 c^2$
(la somme des carrés des produits des longueurs des 4 faces.)

On a alors 144 Volume ^{2} (T) = S1 S2 – 2 S3 – S4 ou encore Volume (T) = $\frac{1}{12}\sqrt{S1S2-2S3-S4}$