SOLUTION – 038.

Démontrer que $\left(\sqrt{2}-1\right)^{1998}$ peut s'écrire $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ avec n entier.

Si on développe $\left(\sqrt{2}-1\right)^{1998}$ par la formule du binôme, les puissances paires de $\sqrt{2}$ donneront des entiers et les puissances impaires donneront un entier multiplié par $\sqrt{2}$.

Donc on peut poser $\left(\sqrt{2}-1\right)^{1998} = a - b\sqrt{2}$. (1) a et b entiers relatifs.

Il est alors évident que $\left(\sqrt{2}+1\right)^{1998} = a + b\sqrt{2}$. (2)

Par addition ou soustraction membre à membre de (1) et (2) il est clair que a et b sont des entiers <u>positifs</u>.

Si on multiplie membre à membre (1) et (2), on obtient $1^{1998} = a^2 - 2b^2$ soit $a^2 = 2b^2 + 1$. (3)

Finalement, (1) et (3) donnent $\left(\sqrt{2}-1\right)^{1998} = a - b\sqrt{2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2} = \sqrt{2b^2+1} - \sqrt{2b^2}$ qui est bien de la forme voulue.

Remarquons que $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{b^2} = b$ sont justifiés parce que a et b sont positifs.