SOLUTION - 004.

Soient deux entiers strictement positifs m et n tels que $\dfrac{m}{n} < \sqrt{7}$.

Démontrer que $\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn} < \sqrt{7}$.

$\dfrac{m}{n} < \sqrt{7}$ implique $m^2 < 7\,n^2$ donc $m^2 \leq 7\,n^2 - 1$.

Or $m^2 = 7\,n^2 - 1$ est impossible car sinon on aurait $m^2 \equiv -1 \equiv 6$ mod 7 alors que les résidus modulo 7 sont 0, 1, 2 et 4.

Pour la même raison, $m^2 = 7\,n^2 - 2$ est impossible car sinon on aurait $m^2 \equiv -2 \equiv 5$ mod 7.

Ainsi $m^2 \leq 7\,n^2 - 3$ soit $m^2 + 3 \leq 7\,n^2$ d'où $m^4 + 3\,m^2 \leq 7\,m^2\,n^2$.

Mais $(m^2 + 1)^2 = m^4 + 2\,m^2 + 1 \leq m^4 + 3\,m^2$ car m m'est pas nul.

Donc par transitivité $(m^2 + 1)^2 \leq 7\,m^2\,n^2$ d'où en divisant par m^2n^2 :

$\left(\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn}\right)^2 \leq 7$ qui entraîne $\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{m} < \sqrt{7}$ l'égalité étant impossible du fait de l'irrationalité de $\sqrt{7}$.

Remarque, on peut affiner le résultat en démontrant $\dfrac{m}{n} + \dfrac{k}{m} < \sqrt{7}$ avec $k = 2\left(\sqrt{7} - 2\right) \approx 1{,}3$.