SOLUTION – 42.

Dans R^3 démontrer que si A,B,C,D sont des points quelconques, on a

$$AB^2 + CD^2 \leq AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2$$

Choisissons un repère orthonormé tel que les coordonnées du tétraèdre soient :

A (0, 0, 0) B (1, 0, 0) C $(a, b, 0)$ D (c, d, e)

D'après Pythagore, $AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2ac - 2bd + 1$.

$AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a - c + 1)$.

Donc l'inégalité proposée équivaut à :

$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2a - 2c + 1 + 2ac + 2bd$

ou encore à $0 \leq (a + c - 1)^2 + (b + d)^2 + e^2$ C Q F D

On voit qu'il n'y a égalité que si (ADBC) dans cet ordre est un parallélogramme.

M. FERACHOGLOU propose une solution utilisant le produit scalaire.
M. BECZKOWSKI propose une solution utilisant le théorème de la médiane.