SOLUTION – 44

Trouver tous les triplets d'entiers naturels a, b, c qui vérifient :

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2.$$

Il est évident que a, b, c sont au moins égaux à 2. On peut donc supposer $\mathbf{2 \leq a \leq b \leq c}$.

Le plus grand des 3 facteurs de l'équation est au moins égal à $2^{\frac{1}{3}}$

Donc $\frac{1}{a} \geq 2^{\frac{1}{3}}-1 \approx 0{,}2599$ ce qui implique $\mathbf{2 \leq a \leq 3.}$

Si $a = 2$ alors on doit résoudre $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = \frac{4}{3}$.

Comme ci-dessus pour a, on montre qu'on doit avoir $\mathbf{4 \leq b \leq 6.}$
On obtient 3 possibilités : ($b = 4$ $c = 15$) ($b = 5$ $c = 9$) ($b = 6$ $c = 7$)

Si $a = 3$ alors on doit résoudre $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{2}$.

Comme ci-dessus pour a, on montre qu'on doit avoir $\mathbf{3 \leq b \leq 4.}$
On obtient 2 possibilités : ($b = 3$ $c = 8$) ($b = 4$ $c = 5$)

Finalement, à l'ordre près on a les 5 triplets solutions :
(2 , 4 , 15) - (2 , 5 , 9) - (2 , 6 , 7) - (3 , 3 , 8) - (3 , 4 , 5)

(avec les permutations possibles de a,b,c cela donne en fait 27 solutions)