

SOLUTION – 006.

10 patates pèsent ensemble 500 grammes. Démontrer qu'en utilisant tout ou partie des patates mais sans les couper, il est possible de faire deux tas non vides, dont les poids sont égaux à 1 gramme près.

- S'il y a au moins deux patates pesant 1g ou moins, c'est terminé, elles forment les deux tas voulus.

- Sinon, c'est qu'il y a 9 patates pesant plus de 1g.

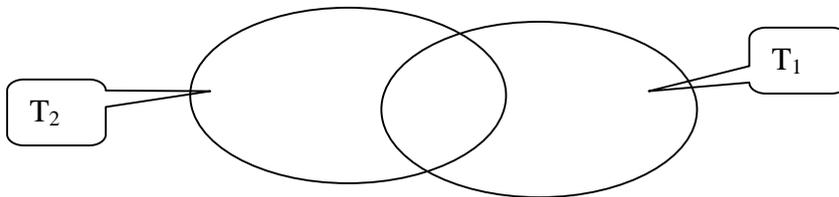
Avec ces 9 patates on peut faire $2^9 - 1 = 511$ tas non vides distincts.

Notons $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_{511}$ les masses de ces tas, p_{511} étant inférieur à 500 par hypothèse.

La somme $p_{511} - p_1 = (p_{511} - p_{510}) + (p_{510} - p_{509}) + (p_{509} - p_{508}) + \dots + (p_2 - p_1)$ est a fortiori inférieur à 500. Or cette somme comprend 510 termes, donc l'un d'eux est nécessairement inférieur à 1.

Soit par exemple $p_{i+1} - p_i < 1$.

Soient T_{i+1} le tas de masse p_{i+1} , T_i le tas de masse p_i et T_1, T_2 ces tas privés de leur intersection éventuelle :



On ne peut pas avoir T_1 et T_2 vides car $T_{i+1} \neq T_i$.

On ne peut même pas avoir un tas vide, disons T_1 car alors T_2 serait non vide et contiendrait donc au moins une patate de plus de 1g. Mais alors la différence de masse entre T_1 et T_2 (la même qu'entre T_{i+1} et T_i) serait supérieure à 1g alors qu'elle vaut $p_{i+1} - p_i < 1$.

Donc ni T_1 ni T_2 n'est vide, et ces deux tas conviennent.