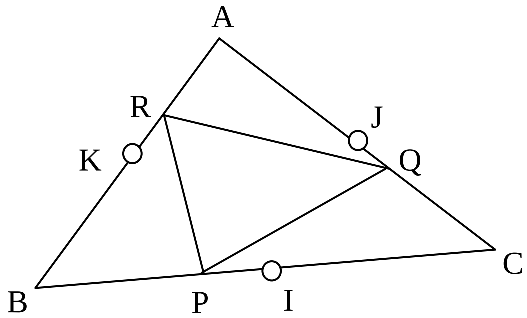
SOLUTION – 62.

Sur les côtés d'un triangle (ABC), on donne P ∈ [BC], Q ∈ [CA], R ∈ [AB].

Démontrer que l'un des 3 triangles (ARQ), (BPR), (CQP) a une aire inférieure ou égale au quart de celle de (ABC).

Soient I le milieu de [BC], J celui de [AC] et K celui de [AB].
Par symétrie, on peut supposer P ∈ [BI].
Posons α = aire (BIK) = aire (CJI) = aire (AKJ) = $\frac{1}{4}$ aire (ABC)
Si R ∈ [BK] on a aire (BPR) ≤ aire (BIK) = α
On peut donc supposer R ∈ [AK].
Si Q ∈ [AJ] on a aire (ARQ) ≤ aire (AKJ) = α
On peut donc supposer Q ∈ [JC] (schéma).

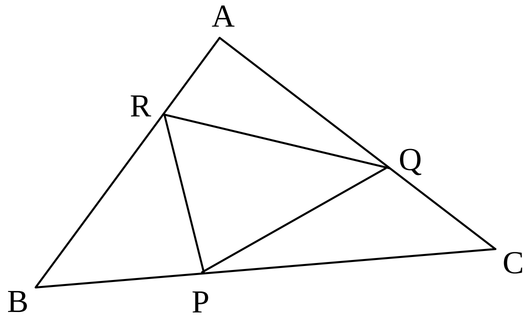


On a alors α = aire (IJK) = aire (PJK) ≤ aire (PQK) ≤ aire (PQR)

Mais si l'aire de (PQR) est supérieure ou égale à α c'est qu'il ne reste pas plus de 3 α pour la somme des aires des 3 autres triangles, soit aire (BPR) + aire (CQP) + aire (ARQ) ≤ 3 α.
D'après le "lemme des tiroirs", l'un des 3 triangles a une aire inférieure ou égale à α, ce qu'il fallait démontrer.

• Voici une autre solution proposée par J.C. ANDRIEUX et indépendamment par R. BECKOWSKI :

On peut toujours supposer que aire (ABC) = 1.



Notons $\frac{BP}{BC} = a$ $\quad \frac{CQ}{CA} = b$ $\quad \frac{AR}{AB} = c$ avec $a \in [0\,,1]$ $\quad b \in [0\,,1]$ $\quad c \in [0\,,1]$.

On a : aire (ARQ) = $\frac{1}{2}\, AR \times AQ \times \sin(A)$ et aire (ABC) = $\frac{1}{2}\, AB \times AC \times \sin(A)$.

D'où $\frac{\text{aire}(ARQ)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{AR}{AB} \times \frac{AQ}{AC}$ soit aire (ARQ) = $c\,(1 - b)$.

De la même façon on obtient : aire (CQP) = $b\,(1 - a)$ et aire (BPR) = $a\,(1 - c)$.

On en tire alors aire (ARQ) × aire (CQP) × aire (BPR) = $a\,(1-a)\,b\,(1-b)\,c\,(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$

L'inégalité provenant du résultat bien connu : $x\,(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour $x \in [0\,,\,1]$.

Si chacun des trois triangles avait une aire strictement supérieure à $\frac{1}{4}$, le produit des aires serait strictement supérieur à $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ ce qui contredit le résultat précédent. CQFD.