SOLUTION – 64.

A, B, C sont des entiers naturels non nuls.
Démontrer que si A.B = A.C + B.C alors PGCD (A,B) = PGCD (A,C) + PGCD (B,C).

Posons u = PGCD (A,B,C) et $a = A / u$ $b = B / u$ $c = C / u$.
Ainsi : $\boldsymbol{a\,b = a\,c + b\,c}$ et PGCD $(a, b, c) = 1$.

Posons r = PGCD (a, c) et s = PGCD (b, c) donc PGCD $(r, s) = 1$.

On a : $\boldsymbol{a = r\,x}$ $\boldsymbol{c = r\,y}$ PGCD $(x, y) = 1$
$\boldsymbol{b = s\,\alpha}$ $\boldsymbol{c = s\,\beta}$ PGCD $(\alpha, \beta) = 1$

or $c = r\,y = s\,\beta$ implique $\dfrac{r}{s} = \dfrac{\beta}{y}$ donc $\boldsymbol{\beta = r\,t}$ et $\boldsymbol{y = s\,t}$ car r / s est irréductible.

On a donc $\boldsymbol{a = r\,x}$ $\boldsymbol{b = s\,\alpha}$ $\boldsymbol{c = r\,s\,t}$
$a\,b = a\,c + b\,c$ implique $r\,x\,s\,\alpha = r^2\,x\,s\,t + s^2\,\alpha\,r\,t$ qui divisé par $r\,s$ donne
$x\,\alpha = r\,x\,t + s\,\alpha\,t = x\,\beta + \alpha\,y$ donc $\boldsymbol{x\,(\alpha - \beta) = \alpha\,y}$

$\alpha \neq \beta$ sinon $\alpha\,y$ serait nul, donc $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}$ ces fractions étant irréductibles.

Donc $\boldsymbol{x = \alpha}$ et $\boldsymbol{y = \alpha - \beta}$ soit $\boldsymbol{\alpha = y + \beta = s\,t + r\,t = t\,(r + s)}$.
Finalement : $a = r\,x = r\,\alpha = r\,t\,(r + s)$
$b = s\,\alpha = s\,t\,(r + s)$
$c = r\,s\,t$

t divise a, b, c et PGCD $(a, b, c) = 1$ donc $t = 1$.
Il reste :
$a = r\,(r + s)$ $b = s\,(r + s)$ $c = r\,s$ avec PGCD $(r, s) = 1$.
Donc PGCD $(a, b) = r + s$ = PGCD (a, c) + PGCD (b, c) qui en multipliant par u^2 donne
PGCD (A,B) = $r + s$ = PGCD (A,C) + PGCD (B,C) CQFD.

Ce problème faisait l'objet d'une question au concours général 2001 !