SOLUTION – 66.

Démontrer que pour tout entier naturel n $n^{309} - n$ est un multiple de 2001.

Remarquons que **2001 = 3 × 23 × 29**.
On peut toujours écrire $n = 3^{\alpha} \times 23^{\beta} \times 29^{\gamma} \times p$ avec PGCD (p, 2001) = 1
α, β, γ étant des entiers positifs ou nuls.

Posons $\mathbf{G = n^{309} - n = n\,(n^{308} - 1)}$

$G = 3^{\alpha} \times 23^{\beta} \times 29^{\gamma} \times p \times (3^{308\alpha} \times 23^{308\beta} \times 29^{308\gamma} \times p^{308} - 1)$

Distinguons 4 cas :

- Si α, β, γ sont tous nuls alors $G = p \times (p^{308} - 1)$
  Or d'après le petit théorème de Fermat

$p^2 \equiv 1 \mod 3$ $p^{22} \equiv 1 \mod 23$ et $p^{28} \equiv 1 \mod 29$ puisque PGCD (p, 3 × 23 × 29) = 1.
Mais $308 = 2 \times 22 \times 28$ donc $p^{308} \equiv 1 \mod 3$ $p^{308} \equiv 1 \mod 23$ et $p^{308} \equiv 1 \mod 29$
d'où $p^{308} \equiv 1 \mod 2001$ et par suite $G \equiv 0 \mod 2001$ CQFD.

- Si 2 exposants sont nuls et pas le troisième, par exemple $\alpha \neq 0$ $\beta = \gamma = 0$ alors
  $G = 3^{\alpha} \times \mathrm{p} \times (3^{308\alpha} \times p^{308} - 1)$
  G est multiple de 3 puisque $\alpha \neq 0$.

Comme précédemment, $p^{308} \equiv 1 \mod 23$ $p^{308} \equiv 1 \mod 29$ implique $p^{308} \equiv 1 \mod 23 \times 29$.
De plus $3^{308} \equiv 1 \mod 23 \times 29$ donc
$3^{308\alpha} \times p^{308} - 1$ est multiple de 23 × 29.
$G = 3^{\alpha} \times p \times (3^{308\alpha} \times p^{308} - 1)$ est donc multiple de 3 × 23 × 29 = 2001 CQFD.

- Si 1 exposant est nul et pas les 2 autres, par exemple $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ $\gamma = 0$ alors on procède de même : $G = 3^{\alpha} \times 23^{\beta} \times p \times (3^{308\alpha} \times 23^{308\beta} \times p^{308} - 1)$
  G est multiple de 3 × 23 puisque $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$.

Comme précédemment, $p^{308} \equiv 1 \mod 29$
De plus $3^{308} \equiv 1 \mod 29$ et $23^{308} \equiv 1 \mod 29$
donc $3^{308\alpha} \times 23^{308\beta} \times p^{308} - 1$ est multiple de 29.
$G = 3^{\alpha} \times 23^{\beta} \times p \times (3^{308\alpha} \times 23^{308\beta} \times p^{308} - 1)$ est donc multiple de 3 × 23 × 29 = 2001 CQFD.