SOLUTION – 70.

Démontrer que si $a, b, c, d,$ N sont des entiers naturels non nuls tels que N $= a \times b = c \times d$ alors pour tout entier naturel k : $a^k + b^k + c^k + d^k$ est un entier composé [non premier].

Soit PGCD $(d, a) = m$. On a donc $d = m\,q$ et $a = m\,p$ avec PGCD $(p, q) = 1$.

d divise $a\,b \Rightarrow m\,q$ divise $m\,p\,b \Rightarrow q$ divise $p\,b \Rightarrow q$ divise $b \Rightarrow b = n\,q$ avec n entier.
$a\,b = m\,p\,n\,q = c\,d = c\,m\,q \Rightarrow c = n\,p$.

Donc $a = m\,p$ $\quad b = n\,q$ $\quad c = n\,p$ $\quad d = m\,q$.

On en déduit $a^k + b^k + c^k + d^k = m^kp^k + n^kq^k + n^kp^k + m^kq^k = (m^k + n^k)\,(p^k + q^k)$.

C’est un produit de 2 facteurs au moins égaux à 2 C Q F D.