**SOLUTION – 72.**

Démontrer que dans le système de numération de base $\boldsymbol{b} \geq 2$ quelconque on a :

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \frac{1}{111} + \frac{1}{1111} + \ldots\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{1100} + \frac{1}{111000} + \frac{1}{11110000} + \ldots\ldots$$

Si $m$ désigne le chiffre maximal de la base $b$ $(m = b - 1)$ alors :

$10^n - 1 = m\,m\,m \ldots m$ [$n$ fois le chiffre $m$] et $10 - 1 = m$ donc : $111\ldots1 = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$

Le membre de gauche s'écrit donc : $G = \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{10-1}{10^n - 1}$

Le membre de droite s'écrit : $D = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{10-1}{10^n(10^n - 1)} = (10 - 1) \times \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n - 1} - \frac{1}{10^n}$

Ou encore $D = (10 - 1) \times \left[\dfrac{1}{10-1} + \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{10^n - 1} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n}\right]$

Or le dernier $\Sigma$ est une somme géométrique donc

$D = (10 - 1) \times \left[\dfrac{1}{10-1} + \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{10^n - 1} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right]$ c'est à dire G C.Q.F.D.

En base 10 par exemple : G = D = 0,1009181908362007…