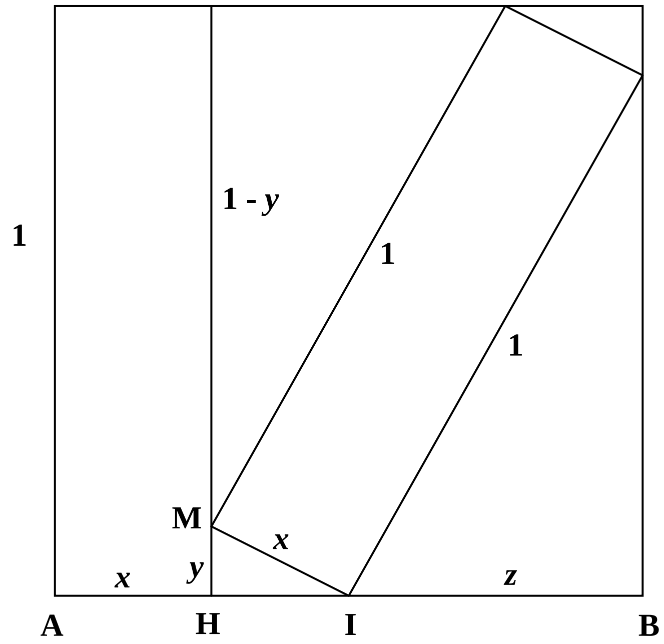
**SOLUTION – 74.**

Dans la figure ci-dessous, deux rectangles **égaux** sont inscrits dans un **carré**.
Démontrer que **I** est milieu de [**AB**].




Supposons que le côté du carré mesure 1.
Avec les notations ci-dessus et en utilisant les triangles semblables on a :

$$\frac{HI}{MI} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{1-y}{1} = 1-y \Rightarrow x^2 - y^2 = x^2(1-y)^2 = x^2 - 2x^2 y + x^2 y^2.$$

D'où l'on tire facilement $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ (1)

Cela entraîne $x^2 - y^2 = x^2 - \dfrac{4x^4}{(1+x^2)^2} = x^2\left(1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\left((1+x^2)^2 - 4x^2\right)$

Donc $x^2 - y^2 = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\left((1+x^2-2x)-(1+x^2+2x\right) = \dfrac{x^2(1-x)^2(1+x)^2}{(1+x^2)^2}$

D'où $\sqrt{x^2 - y^2} = \dfrac{x(1-x^2)}{1+x^2}$ (2)

Mais $\dfrac{z}{1} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x}{1+x^2}$ d'après (1) entraîne $z = \dfrac{2x}{1+x^2}$ (3)

De plus AB = 1 donc $x + \sqrt{x^2 - y^2} + z = 1$

D'après (2), (3) cela donne $x + \dfrac{x(1-x^2)}{1+x^2} + \dfrac{2x}{1+x^2} = 1$

d'où on tire en développant : $x^2 - 4x + 1 = 0$ soit $x = 2 - \sqrt{3}$ (4)

[ $x$ étant plus petit que 1, on ne peut avoir $x = 2 + \sqrt{3}$ ]

On tire enfin de (1) et (3) : $y = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = \dfrac{1}{2}$. CQFD.

**Remarque** : l'angle (HIM) mesure 30°.