SOLUTION – 78.

Trouver un ensemble E d'entiers naturels tous impairs, tel que chaque élément de E divise la somme de tous les autres.

Soit E = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots. a_p\}$ et posons S = $\sum a_i$

[Dans toute la suite, i varie de 1 à p]

Par hypothèse, pour tout i a_i divise S - a_i donc pour tout i a_i divise S.

On peut donc poser : pour tout i S = $a_i b_i$ (1)

Puisque tous les a_i sont impairs (1) montre que tous les b_i sont congrus à S modulo 2, donc tous les b_i sont congrus modulo 2.

De plus on a : S = $\sum a_i = \sum \frac{S}{b_i}$ donc $\sum \frac{1}{b_i} = 1$ (2)

Réciproquement, soient p nombres impairs $b_1, b_2, b_3, \ldots. b_p$ vérifiant (2)

Prenons S = PPMC(b_i) et posons pour tout i : S = $a_i b_i$

On a d'après (2) : S = $\sum \frac{S}{b_i} = \sum a_i$ et tous les a_i sont impairs puisque S et les b_i le sont.

Par ailleurs chaque a_i divise S, donc chaque a_i divise S − a_i c'est à dire la somme de tous les autres.

Le problème se ramène donc à trouver des b_i impairs vérifiant $\sum \frac{1}{b_i} = 1$.

On essaie avec le moins possible de facteurs premiers pour minimiser S :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}=\frac{4624}{4725} \quad \text{il manque} \quad \frac{101}{4725} \approx \frac{1}{46,78}$$

donc on essaie d'ajouter $\frac{1}{49}$ (plutôt que $\frac{1}{47}$ à cause des facteurs premiers) :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{49}=\frac{33043}{33075} \qquad \text{il manque} \quad \frac{32}{33075}$$

Or $\frac{32}{33075} = \frac{25}{33075}+\frac{7}{33075} = \frac{1}{1323}+\frac{1}{4725}$ C'est fini !

On prendra $\{ b_i \}$ = {3, 5, 7, 9, 15, 21, 25, 27, 49, 1323, 4725}

Alors S = PPMC (b_i) = 33075 d'où les $a_i = \frac{S}{b_i}$ formant un ensemble solution :

E = {7, 25, 675, 1225, 1323, 1575, 2205, 3675, 4725, 6615, 11025}

La somme des 11 éléments de E vaut 33075 et comme chacun d'eux divise 33075, nécessairement chacun d'eux divise la somme des 10 autres.

Remarque : Il y a des solutions plus simples obtenues par le même procédé, par exemple:

E = {11, 15, 165, 231, 315, 385, 495, 693, 1155}