SOLUTION – 79.

On partage les entiers de 1 à 20 en deux sous-ensembles quelconques de 10 éléments :

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots.. < a_{10}$, et $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots.. > b_{10}$.

Montrer que $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \ldots + |a_{10} - b_{10}| = 100$.

Soit $A = \{ a_1 ; a_2 ; a_3 ; \ldots.. ; a_{10}\}$ et $B = \{ b_1 ; b_2 ; b_3 ; \ldots.. ; b_{10}\}$

Parmi les 10 entiers inférieurs ou égaux à 10, il y en a k dans A et $10 - k$ dans B.

Le nombre d'entiers de B supérieurs à 10 est égal à 10 moins le nombre d'entiers de B inférieurs ou égaux à 10 c'est à dire $10 - (10 - k) = k$. On a donc la situation suivante :

Entiers de A $\leq$ 10					Entiers de A > 10				
a_1	a_2	a_3	….	a_k	a_{k+1}	a_{k+2}	a_{k+3}	….	a_{10}
b_1	b_2	b_3	….	b_k	b_{k+1}	b_{k+2}	b_{k+3}	….	b_{10}
Entiers de B > 10					Entiers de B $\leq$ 10				

Ainsi :

$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \ldots + |a_{10} - b_{10}|$

$S = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_k - a_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) + \ldots + (a_{10} - b_{10})$

$S = - a_1 - a_2 \ldots - a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 \ldots + b_k - b_{k+1} - b_{k+2} \ldots b_{10}$

$S = a_1 + a_2 \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 \ldots + b_{10} - 2(a_1 + a_2 \ldots + a_k + b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_{10})$

Or $a_1 + a_2 \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 \ldots + b_{10}$ est la somme des entiers de 1 à 20, et

$a_1 + a_2 \ldots + a_k + b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_{10}$ est la somme des entiers de 1 à 10 donc :

$$S = \frac{20\times 21}{2} - 2\times\frac{10\times 11}{2} = \frac{20\times 10}{2} = 100 \qquad \text{CQFD.}$$

<u>Remarque</u> : on généralise facilement :

Si on partage les entiers de 1 à $2n$ en deux sous-ensembles quelconques de n éléments :

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots.. < a_n$, et $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots.. > b_n$.

Alors : $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2$.

En effet : $\dfrac{2n\times(2n+1)}{2} - 2\times\dfrac{n\times(n+1)}{2} = \dfrac{2n\times n}{2} = n^2$.