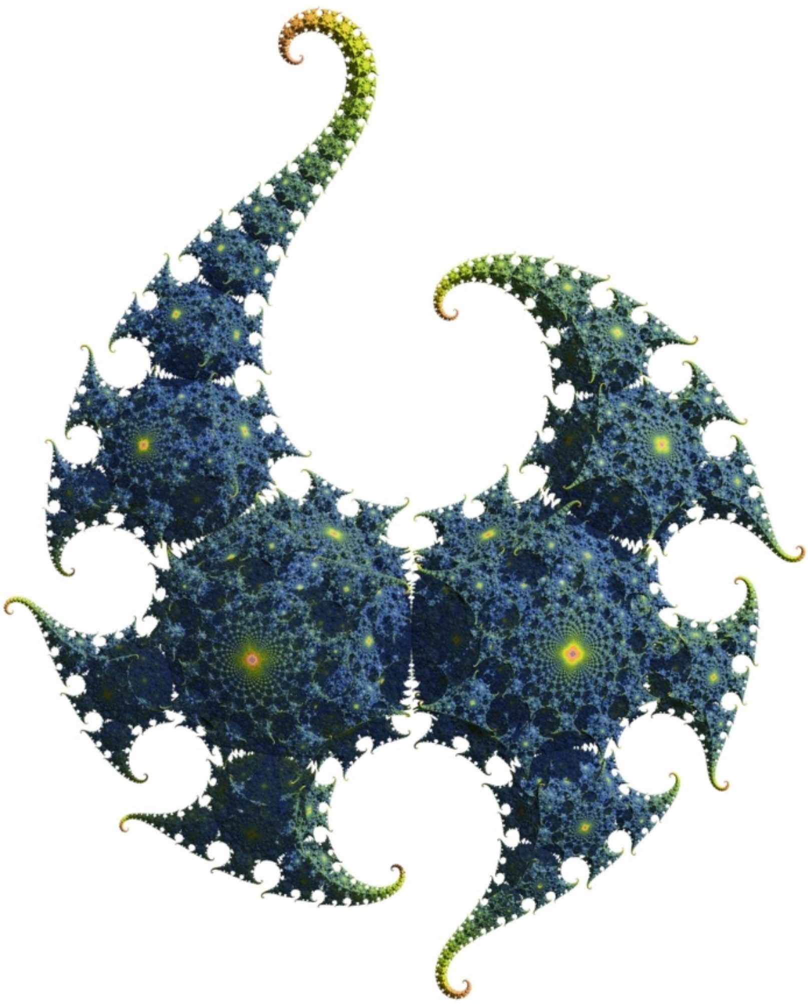
RALLYE MATHEMATIQUE

DE BOURGOGNE

2019 : 37e rallye



Avec l'aimable autorisation de Jos Leys (http://www.josleys.com)

Institut de Recherche Sur L'Enseignement des Mathématiques

Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39

e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://irem.u-bourgogne.fr

Le « Rallye mathématique » est un rendez-vous reconnu et attendu dans l'année scolaire. Elément structurant, il est un évènement qui donne chaque année une occasion aux lycéennes et aux lycéens de travailler en équipe dans une approche divertissante, captivante et vivante.

C'est toujours l'alliage de plusieurs facteurs qui permet de rassembler les conditions du succès. Issu(e)s de nombreux lycées de notre Académie, regroupé(e)s dans plusieurs centaines d'équipes, les participant(e)s du cru 2019 sont le reflet de la diversité des établissements et de la qualité remarquable des réponses apportées. L'importance de la participation donne à cet évènement toute l'envergure qu'il mérite et permet d'offrir aux mathématiques une visibilité incontestable.

Fruit d'un lourd investissement de la part de nombreux acteurs, ce nouveau succès est indéniablement à mettre à l'actif des équipes éducatives des lycées. Il n'aurait aussi pas été possible sans le soutien des différents partenaires institutionnels et privés. Je sais que la pérennité et le bon déroulement des épreuves du Rallye tiennent aussi à la qualité de son organisation, à laquelle l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'université de Bourgogne consacre une forte énergie.

Je remercie sincèrement toutes celles et tous ceux qui ont contribué à cette édition. Ils démontrent que la coopération, entre les établissements du secondaire, les services académiques, les collectivités, les entreprises et l'université de Bourgogne, est un facteur de réussite collective.

Je tiens à féliciter les lycéennes et les lycéens qui ont participé à cette édition du « Rallye mathématique ». Pratiquer cette discipline et apprendre à l'apprécier favorise la réussite dans les études. C'est en effet une matière importante et complémentaire à d'autres.

Au cœur de la recherche et de l'innovation, les mathématiques nous entourent au quotidien. Ce « Rallye » contribue à en donner aux jeunes une image moderne et je souhaite que cette initiative suscitera l'envie auprès de certain(e)s qui poursuivront ainsi leurs études supérieures dans cette voie à l'université de Bourgogne.

Alain BONNIN
Président de l'université de Bourgogne

L'édition de l'année dernière était un carré (36), celle de cette année un nombre premier (37), nous avons donc un nombre premier de la forme $n^2 + 1$.

Tout à coup, les mathématicien(ne)s, qui semblaient en sommeil au fond de la salle, se réveillent : « Tiens ? Est-ce le seul cas possible ? Si non, sont-ils du même type ? Et y en a-t-il beaucoup ? », ainsi qu'une multitude d'autres questions engendrées par leur naturelle curiosité. Seront vite trouvés : 17, 101 et 197, qui fournissent une réponse immédiate à la première question.

Puis on remarque que (presque)[1] toutes les solutions ont pour chiffre des unités 1 ou 7. Est-ce bien étonnant ? Un examen rapproché des carrés des nombres entiers suffit pour découvrir qu'ils se terminent toujours par 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Parmi ces terminaisons, éliminons celles qui sont impaires (elles donneraient un $n^2 + 1$ pair, donc forcément non premier), ne restent plus que 0, 4 et 6, qui engendrent des $n^2 + 1$ se terminant par 1, 5 ou 7. On élimine le chiffre 5, qui rendrait le nombre $n^2 + 1$ divisible par 5, donc non premier en général, et nous voilà avec la démonstration de ce que nous avons constaté : les nombres qui nous préoccupent peuvent se terminer par 1 ou 7.

Voilà le genre d'aventures intellectuelles dans lesquelles se lancent les mathématicien(ne)s, toujours émerveillé(e)s d'un rien. Un peu comme Jean-Christophe, auquel il suffisait d'un bâton pour s'amuser toute un après-midi[2]…

Prenons maintenant le cas des *Jeunes*. Comme on le sait bien, les Jeunes ne savent plus s'émerveiller, c'est pourquoi leur première réaction sera de chercher sur Internet une solution à ces questions, pour découvrir qu'il s'agit du quatrième problème de Landau, dont il n'existe pas de solution à l'heure actuelle.

En fait, les *Jeunes* peuvent encore s'émerveiller. Tous ceux qui ont participé à cette 37e édition du Rallye mathématique des lycées de Bourgogne ont accepté de travailler en groupe et sans recours à Wikipedia, pendant plusieurs heures et dans l'enthousiasme ! Une fois encore l'existence du Rallye montre que les mathématiques restent attractives au lycée et qu'il faut décidément renoncer aux arguments nostalgiques du type : « c'était mieux avant ».

Merci à tous les participants de cette édition, en souhaitant revoir prochainement ces jeunes amateurs de mathématiques. Sans oublier les professeurs des lycées qui les ont motivés.

Et aussi un grand merci à toute l'équipe des organisateurs pour leur efficacité et leur fidélité.

Frédéric Métin
Directeur de l'IREM

[1] Saurez-vous trouver les deux exceptions ?
[2] Romain Rolland, Jean-Christophe, Première partie : l'Aube, chapitre 1. Paris, Albin Michel, 2007.

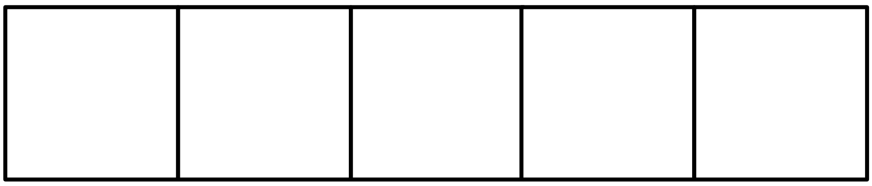
ÉNONCÉS 2019

Exercice 1 : À LA PUISSANCE 20
Obtenir 10^{20} en multipliant des entiers tous distincts et tous strictement inférieurs à 500.

Exercice 2 : À PERDANT, PERDANT ET DEMI
Trois joueurs disposent en début de partie d'un certain nombre de pièces d'un euro.
A chaque tour, celui qui a le plus d'euros double le nombre d'euros d'un de ses adversaires et triple le nombre d'euros de l'autre. Au bout de 7 tours, les joueurs ont respectivement 18, 21 et 3 euros.
De quelles sommes disposaient les joueurs en début de partie ?

Exercice 3 : GASTON REMPILE
Gaston a un grand nombre de pièces identiques.
S'il les entasse par piles de 38 pièces, il lui reste une pile incomplète dont le nombre de pièces est égal au $\frac{3}{4}$ du nombre de piles entières.
S'il les entasse par piles de 49 pièces, il lui reste une pile incomplète dont le nombre de pièces est exactement égal au nombre de piles entières.
Combien Gaston a-t-il de pièces au total ?

Exercice 4 : COUPER-COLLER
On dispose d'une bande formée de cinq carrés consécutifs.

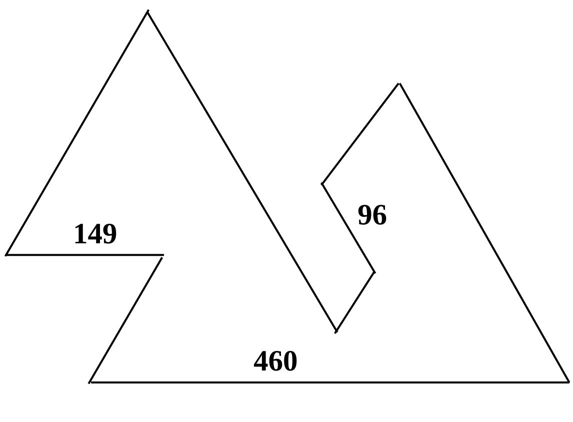


Comment découper cette bande afin que tous les morceaux puissent reconstituer un seul carré ?
On demande le **moins de traits de coupe possibles**, sans pliage, sans superposition de pièces, avec uniquement des traits de coupe rectilignes.

Exercice 5 : LE LIVRE DE LA BÊTE
Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à N.
Toutes les pages dont le numéro est multiple de 5 ou de 7 comportent un dessin.
Il y a en tout 209 dessins dont un en avant-dernière page.
Que vaut N ?

Exercice 6 : PARCOURS ANGULEUX
Tous les angles de la figure ci-contre ont des mesures multiples de 60°.
Trois segments ont des mesures connues.
Quel est le périmètre de la figure ?

(Figure approximative)



Exercice 7 : LE DRAGON

Un dragon a 50 têtes. Un chevalier peut, au choix :

- Couper 10 têtes ; il en repousse alors une dans la minute qui suit.
- Couper 11 têtes ; il en repousse alors 5 dans la minute qui suit.
- Couper 2 têtes ; il en repousse alors 14 dans la minute qui suit.

Si le dragon reste sans tête ou avec une seule tête pendant plus d'une minute, il meurt.
Le chevalier peut-il tuer le dragon ?

Exercice 8 : PARTAGE NON ÉQUITABLE

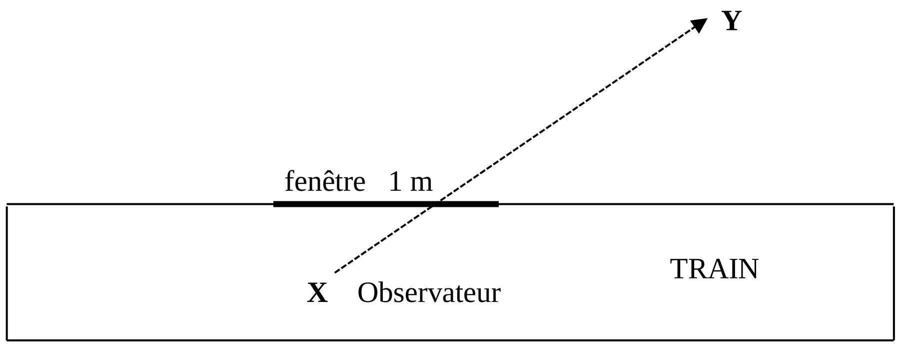
Un champ rectangulaire a été partagé en 9 rectangles par 4 clôtures (Figure ci-contre).

671		**672**
	673	
674		

Quatre parcelles ont pour périmètre 671, 672, 673, 674 m.
Quel est le périmètre du champ ?

Exercice 9 : PAR LA FENÊTRE DU TRAIN

Assis dans un wagon, je regarde par la fenêtre d'1 m de large et constate qu'un arbre situé à 20 m des rails reste visible 1 s tandis qu'une maison située à 495 m des rails reste visible 24 s.
À quelle vitesse roule le train ?



Exercice	Solution
1. À la puissance 20	8 solutions avec des facteurs positifs.
2. À perdant, perdant et demi	1, 22, 19 euros.
3. Gaston rempile	1550 pièces.
4. Couper-Coller	Trois découpes au minimum.
5. Le livre de la Bête	666 pages.
6. Parcours anguleux	Le périmètre est égal à 2019.
7. Le dragon	Le chevalier ne peut pas tuer le dragon.
8. Partage non équitable	Le périmètre est égal à 2019.
9. Par la fenêtre du train	La vitesse du train est égale à 114 km/h.

2. LA PARTICIPATION

Le **37**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 23 janvier 2019.
Il a concerné :

26 lycées **203 équipes** **661 participants**.

Voici l'évolution de la participation ces sept dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**Total des participants**
2013	298	134	84	34	**550**
2014	263	131	148	39	**589**
2015	309	198	149	49	**705**
2016	365	180	154	72	**771**
2017	427	172	180	69	**848**
2018	288	156	166	65	**675**
2019	319	133	166	43	**661**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.

Niveau I : secondes
Niveau II : premières et terminales non scientifiques
Niveau III : premières S
Niveau IV : terminales S

		Nombre d'élèves				Nombre d'équipes			
	Niveaux 1 à 4	1	2	3	4	1	2	3	4
9 lycées de Côte d'Or	Lycée Anna Judic	9	0	7	2	3	0	2	1
	Lycée Carnot	19	0	12	15	6	0	3	4
	Lycée Charles de Gaulle	8	0	29	9	3	0	8	3
	Lycée Clos-Maire	3	0	0	0	1	0	0	0
	Lycée Eiffel	46	2	27	22	14	1	8	6
	Lycée Le Castel	15	0	12	1	5	0	3	1
	Lycée Les Arcades	0	0	18	0	0	0	5	0
	Lycée Montchapet	12	0	4	4	4	0	1	1
	Lycée Stephen Liégeard	13	3	17	10	4	1	5	3
6 lycées de la Nièvre	Lycée Alain Colas	19	6	0	21	6	2	0	6
	Lycée Gabriel Voisin	6	0	0	4	2	0	0	1
	Lycée Jules Renard	5	0	27	0	2	0	8	0
	Lycée Notre Dame - Nevers	2	0	0	2	1	0	0	1
	Lycée Raoul Follereau	2	0	8	3	1	0	2	1
	Lycée Romain Rolland	13	0	7	8	4	0	2	2
7 lycées de Saône-et-Loire	Lycée Camille Claudel	0	3	8	2	0	1	3	1
	Lycée Julien Wittmer - Charolles	7	0	1	7	3	0	1	2
	Lycée La Prat's - Cluny	6	0	5	0	2	0	2	0
	Lycée Léon Blum	25	4	45	18	7	1	12	5
	Lycée militaire d'Autun	15	0	0	8	4	0	0	2
	Lycée Niepce	0	0	3	5	0	0	1	2
	Lycée Pontus de Tyard	0	0	0	4	0	0	0	2
4 lycées de l'Yonne	Lycée Chevalier d'Eon	2	0	1	1	1	0	1	1
	Lycée Parc des Chaumes	0	0	7	2	0	0	2	1
	Lycée Fourier - Auxerre	18	0	0	0	5	0	0	0
	Lycée Jacques Amyot	3	0	9	0	1	0	3	0
	TOTAL	**248**	**18**	**247**	**148**	**79**	**6**	**72**	**46**

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.
Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le rectorat.
L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Michel LAFOND, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.
Cinq autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Laurent BANDERIER, Thomas BUREL, Robert FERACHOGLOU, Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame la Rectrice de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.
Robert FERACHOGLOU, IA-IPR de mathématiques, qui a accepté de cobayer le sujet.
Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.
Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.
Jessy DELPIERRE, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.
Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.
Et bien évidemment les 661 Bourguignons qui ont travaillé durement…

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. À la puissance 20	85	82,4 %	68,6 %
2. À perdant, perdant et demi	85	68,2 %	41,4 %
3. Gaston rempile	85	77,6 %	60,6 %
4. Couper-Coller	203	86,7 %	3,4 %
5. Le livre de la Bête	203	97,5 %	60,6 %
6. Parcours anguleux	203	64 %	44,6 %
7. Le dragon	118	95,8 %	78,8 %
8. Partage non équitable	118	85,6 %	74,3 %
9. Par la fenêtre du train	118	62,7 %	14,9 %

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes)

L'équipe : [DE BROUX Gaëlle – FOUCHER Maylis – GASPARD Charline – RAVIER Manon]
du lycée Romain Rolland de Clamecy avec 47 points sur 60.

Niveau II (premières et terminales non scientifiques)

L'équipe : [FEDON Camille – GALVIN Arnaud – RAVASSON Maëva – ROUX Éloïse]
du lycée Alain Colas de Nevers avec 35 points sur 60.

Niveau III (premières S)

L'équipe : [BIZOT Hadrien – GARRETA Clément]
du lycée Stephen Liégeard de Brochon avec 56 points sur 60.

Niveau IV (terminales S)

L'équipe : [SEROUL Alan]
du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre avec 58 points sur 60.

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2019

SEROUL Alan
du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre

5. LE PALMARÈS

Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées

Secondes

1	GASPARD Charline	FOUCHER Maylis	RAVIER Manon	DE BROUX Gaëlle	Lycée Romain Rolland - Clamecy
2	BAR Maya	DUCHESNE--MATHIS Romane	NASCIMENTO Clara	GEHANNO Emeline	Lycée Leon Blum - Le Creusot
3	FRAIZIER Jules	DESCHAMPS Owen	CASAS Gabriel	EYMERY Lohan	Lycée Eiffel
4	GIRAULT Romain	SEDDIKI Samy	BADON Léopold	MIKOLAJSKI Léo	Lycée Leon Blum - Le Creusot
5	DÖME Michal	SELMANI Aldrin			Lycée Carnot
6	CHOLLET René	RAMILLON Thomas			Lycée Chevalier d'Eon
7	THÉPÉNIER Chloé	LOUIS-DEULNIAU Julime	FERREIRA Léia	RATEAU Marion	Lycée Romain Rolland - Clamecy
8	TOKAREK Lenny	KOKOT Hugo	FOUCHET Gabriel	CAIRON-COURRET Mathieu	Lycée Leon Blum - Le Creusot
9	DURAND Alexandre	BAUSSART Mattéo	HENRY Marie-Salomé	SCHAEFER Lisa	Lycée militaire d'Autun
10	ROGER Enora	SIERRA Maïtena	HOUZEL Jeanne		Lycée Carnot
11	BONDIER Merlin	GOISQUE Solène	ELHADRI Mehdi		Lycée Le Castel
12	LÖCHEN Juliette	BADET Annaëlle	MICHALET Lucie	ANGONIN Sidonie	Lycée Charles de Gaulle
13	DENIS-WURTH Mélissa	PRULIÈRE Inès	CHASSARD Léa	SPINDLER Maëly	Lycée Eiffel
14	ASTESIANO Aurélien	AUBERT Mathis	AUBERTIN Alexandre	ROUSSEAU Bastien	Lycée Carnot
15	NICOT Alaïs	FROISSARD Léna	MARTIN Norah		Lycée Montchapet
16	VIELLARD Quentin	VOLATIER Clément	MANIÈRE Baptiste		Lycée Clos-Maire
17	GASCARD Elise	GOURTAY Guillaume	BASELY Thibeau		Lycée Jules Renard

Premières et terminales non scientifiques

1	ROUX Éloïse	RAVASSON Maëva	GALVIN Arnaud	FEDON Camille	Lycée Alain Colas
2	CAPOSIENA Julien	GUENARD Anthony	BARBIÈRE Alan	GOUTORBE Salomé	Lycée Leon Blum - Le Creusot

Premières scientifiques

1	BIZOT Hadrien	GARRETA Clément			Lycée Stephen Liégeard
2	REVOL Camille	BOURAKBA Yanis	LOONES Victor	COSTE Elio	Lycée Montchapet
3	CHAREWICZ Lucie	KOELSCH Félicien	PAOLETTI Anthony	LABILLE Maaike	Lycée Leon Blum - Le Creusot
4	BAULARD Nathan	BAYLE Gaspard	HUREZ Quentin	DENIS Ilona	Lycée Carnot
5	GOFFIN Augustin	COIFFETEAU Marcel	MOIROUX Laszlo	PISO Tom	Lycée Romain Rolland - Clamecy
6	BEAUCHAMPS Mattéo	TREMEAUD Valentin	OLIANA Aubin	VIEIRA RIBEIRO Barbara	Lycée Leon Blum - Le Creusot
7	GERMAIN Denis	JIMENEZ Tom	MICHOT Julien		Lycée Jacques Amyot
8	CRUCHAUDET Gautier	BOSSU Gaël	MORET Pierre-Louis	LAFOND Mathilde	Lycée Carnot
9	BAY-LAPLANTE Louis	BAUDIN Louis	NECTOUX Judith	LEROY Emeline	Lycée Leon Blum - Le Creusot
10	FROCHOT Nathan	ALEXANDRE-MARTIN Samuel	LHOMMÉDÉ Deison		Lycée Eiffel
11	GARNIER Paul	THOMAS Louis	DUFUT Clément		Lycée Eiffel
12	MARTIN Joris				Lycée Chevalier d'Eon
13	DUTHU Augustin	RICHOU Eve	CARRELET DE LOISY Aude	KLINGELSCHMITT Emma	Lycée Charles de Gaulle

Terminales scientifiques

1	**SEROUL Alan**				Lycée Chevalier d'Eon
2	GARDET Axelle	DEMONCEAUX Mathis	BLASZCZYK Evan	NOGUE Maxime	Lycée Leon Blum - Le Creusot
3	BAROLLET Sam	EDY Donatien	GUENOT Enzo	TRANSLER Nathan	Lycée Eiffel
4	GHEERAERT Thomas	OUBOUDA Marie-Thérèse	DANCETTE Clara	STEVENS Romain	Lycée Eiffel
5	MAGNIEN Lucas	MENDES Nicolas	TO VAN TRANG Nicolas	DUCHESNE--MATHIS Sylvestre	Lycée Leon Blum - Le Creusot
6	DI SPIRITO Federico	DA ROCHA Kevin	BADON Arthur	LAFOUGE Thibaut	Lycée Leon Blum - Le Creusot
7	CHAINE Loris	MASSON Hugo			Lycée Anna Judic
8	MERLE Antoine	GIRARD Loan	GONFALONE Benjamin	GONFALONE Antoine	Lycée Carnot
9	FOUQUIN Sullivan	LENOIR Noé	BULTEL Pierre	HILPERT Sébastien	Lycée Stephen Liégeard
10	FAHLI Aziz	GUERIN Marianne	TRÉOVAN Nolan	BARBE Jules	Lycée Eiffel

Élèves cités, non récompensés.

Secondes

CHOLLEY Lucile	BOUABANE Iliana	PERRIN Manon		Lycée Montchapet
MOURON Albane	DOUSSET DE WAZIÈRES Charlène	DUMONT Jeanne		Lycée Romain Rolland - Clamecy
DEMAIZIERE Maëlle	MESSAOUD Linda	KONÉ Adjra	LAMALLE Rose	Lycée Leon Blum - Le Creusot
PLANEILLE Albin	JOURAVLENKO Luka	ANTONINI Louis	DAMINE Wassil	Lycée Leon Blum - Le Creusot
FRITSCH Armelle	PERIGAULT Jade			Lycée Carnot
VINCENT Jean-Philippe	PERROT Nicolas	ASTRUBAL Tom		Lycée Le Castel
DRURE Maëlle	GASPARD Octave			Lycée Raoul Follereau - Nevers
PARFAIT Baptiste	LANDRIER Paul	MOUILLON Nicolas	JANNIER Geoffrey	Lycée Eiffel
GÉRARDIN Julien	FORTIN Léo	PELLERIN Oscar		Lycée Leon Blum - Le Creusot
GAUCHET Merlin	PAULIN Augustin	MONTENOT Joséphine	BURJADE Camille	Lycée militaire d'Autun

Premières et terminales non scientifiques

BELIN Maya	KAUTZMANN Fanny		Lycée Alain Colas
LUCAS Xavier	ALGLAVE Cindy	KAWALEC Léa	Lycée Stephen Liégeard

Premières scientifiques

MONVILLE-LATOUR Pierre	MASTERNAK Joris	ROUSSEAU Hippolyte	AITELCADI Yanis	Lycée Jules Renard
ELEZI Kessy	CHARROIN Camille	DEROCHE Rémi		Lycée Camille Claudel - Digoin
SHAHRIAR Tahmida	MONTALBETTI Tristan	CERVATIUC Andrei-Tudor	OPTASANU Mara	Lycée Charles de Gaulle
BRAYOTEL Agathe	CONREUX--GIORGETTI Amandine	SANCIER Anaïs	DE LA BOURDONNAYE Léa	Lycée Charles de Gaulle
MARTOS Eva	VERVIER Lucas	QUÉAU Théophile	RONGET Béryl	Lycée Charles de Gaulle
LEVRINO Samuel	TRILLO Baptiste	DUMONT Valère	MONIOT Lucas	Lycée Eiffel
JANQUIN Éléonore	LATRASSE Arthur	DE LA BROSSE Garance	BOUDIGUET Nafissa	Lycée Le Castel
FRANCOIS Esteban	ROUSSET Siloé	POUCHAT Charlotte		Lycée Jules Renard
CLEMENT Hugo	CARLE Pauline	MAINGAULT Jaelle	VOLOT Léa	Lycée Charles de Gaulle
RENAULT Emilien	POUCHAIN Olivia	VUAROQUEAUX Juliette		Lycée Romain Rolland - Clamecy
BIGI Emilie	DAMIS Emma	SLAMA Morjane	RIBEIRO Maëlys	Lycée Leon Blum - Le Creusot
ACIER Flavie	JIANG Mélissa	MANSOURI Salim		Lycée Leon Blum - Le Creusot
GAIOLA-HAINAUD Callista	NAKADA Léa	VILLE Xavier		Lycée Charles de Gaulle

Terminales scientifiques

COCHARD Alec	KÖLLER Yann-Edouard	PATAILLE Etienne	WALTER Tillmann	Lycée Eiffel
JACOB Suzie	BAUDOUIN Amélina	DACLIN Jules	COLLIN Sacha	Lycée Montchapet
CHAMBRU Margaux	MESNARD Alizée	STEMMELIN Célia	VERPAUX Audrey	Lycée Carnot
GACHET Vivien				Lycée Charles de Gaulle
KULLAJ Arsela	GATETE Sandra	FROGÉ Lucie	BONNY Kateline	Lycée Romain Rolland - Clamecy
MORIZE Léo	MORIN Maël	DEVILLERS Arnaud	BERTIN Arthur	Lycée Eiffel
SEROUART Thibault	COLINOT Paul	MONTCHARMONT Mathieu	MAIRA Alexandre	Lycée Leon Blum - Le Creusot
PERRAUD Louis	MERIGOT-LOMBARD Matthieu	GEOFFRAY Inès		Lycée Julien Wittmer - Charolles
LESAVRE Antonin	HAMAÏDI Oussam			Lycée Leon Blum - Le Creusot
GARREAU Enzo	GUYNOT Robin	LOUISET Clara	BILLARD Jean-Baptiste	Lycée Alain Colas

6. LE CORRIGÉ

Exercice 1. À LA PUISSANCE 20.
Obtenir 10^{20} en multipliant des entiers tous distincts et tous strictement inférieurs à 500.

Solution :
Puisque $10^{20} = 2^{20}\,5^{20}$, les seuls facteurs acceptables sont ceux dont la décomposition en facteurs premiers est de la forme $2^a\,5^b$.
Une recherche exhaustive à la main ou par un programme, dans laquelle on se limite aux facteurs plus grands que 1, donne 8 solutions dans lesquelles on constate que les facteurs 16, 32, 64, 128 et 256 sont toujours absents alors que les facteurs 5, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 400 sont toujours présents.

2	**4**	**5**	**8**	**10**	**20**	**25**	**40**	**50**	**80**	**100**	**125**	**160**	**200**	**250**	**320**	**400**	
		5			20	25	40	50	80	100	125		200	250		400	Dans chaque ligne, le produit est égal à **10^{20}**
		5		10		25	40	50		100	125	160	200	250		400	
		5		10	20	25		50		100	125		200	250	320	400	
		5	8	10	20	25	40	50		100	125		200	250		400	
	4	5		10	20	25		50	80	100	125		200	250		400	
2		5		10		25	40	50	80	100	125		200	250		400	
2		5		10	20	25		50		100	125	160	200	250		400	
2	4	5		10	20	25	40	50		100	125		200	250		400	

Mais il n'est pas interdit d'utiliser de facteurs négatifs (qui sont bien inférieurs à 500) !
On a ainsi bien d'autres solutions [auxquelles les concepteurs n'avaient pas songé mais qui n'ont pas échappé à certains élèves astucieux] comme

$$10^{20} = (-1)(-10^{20})$$

Exercice 2. A PERDANT, PERDANT ET DEMI.

Trois joueurs disposent en début de partie d'un certain nombre de pièces d'un euro.
À chaque tour, celui qui a le plus d'euros double le nombre d'euros d'un des adversaires et triple le nombre d'euros de l'autre. Au bout de 7 tours, les joueurs ont respectivement 18, 21, et 3 euros.
De quelles sommes disposaient les joueurs en début de partie ?

Solution :
À la fin de la manche 7, la situation est " 18 euros, 21 euros et 3 euros" que nous noterons (18, 21, 3).
À la fin de la manche 6, il y a deux possibilités correspondant aux deux multiples de 3 :
Ou bien 21 a été triplé et 18 a été doublé, ou bien 3 a été triplé et 18 a été doublé.

En remontant la partie, on a l'arbre ci-dessous :

(18, 21, 3)		Fin du tour 7
(9, 7, **26**)	(9, **32**, 1)	Fin du tour 6
(3, **26**, 13)	(3, 16, **23**)	Fin du tour 5
(1, 13, **28**)	(1, 8, **33**)	Fin du tour 4
	(**27**, 4, 11)	Fin du tour 3
	(9, 2, **31**)	Fin du tour 2
	(3, 1, **38**)	Fin du tour 1
	(1, **22**, 19)	Début

Le gagnant de chaque tour a son montant indiqué en gras.
Dans la partie gauche de l'arbre, la fin du tour 4 : (1, 13, **28**) est impossible car il n'y a aucun multiple de 3 présent, susceptible d'avoir été triplé par le gagnant du tour 3.
Dans la partie droite de l'arbre, à chaque fois on a un seul multiple de 3 et un seul nombre pair, donc on peut déduire celui dont le montant a été triplé et celui dont le montant a été doublé et par conséquent le gagnant du tour.

Au début de la partie, les joueurs avaient 1, 22, et 19 €.

Exercice 3. GASTON REMPILE.

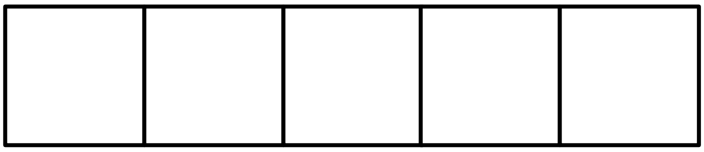
Gaston a un grand nombre de pièces identiques.
S'il les entasse par piles de 38 pièces, il lui reste une pile incomplète dont le nombre de pièces est égal au $\frac{3}{4}$ du nombre de piles entières.
S'il les entasse par piles de 49 pièces, il lui reste une pile incomplète dont le nombre de pièces est exactement égal au nombre de piles entières.
Combien a-t-il de pièces au total ?

Solution :
Soit N le nombre de pièces.
Dans le premier cas, s'il y a p piles, on a $N = 38\,p + \frac{3}{4}p = \frac{155}{4}p \quad (1)$
Donc p est multiple de 4, et $\frac{3}{4}p \leq 37$ puisque la dernière pile est incomplète.
D'où $p \leq 48$ et d'après (1), $N \leq 1860$.
Dans le second cas, s'il y a q piles, on a $N = 49\,q + q = 50\,q \quad (2)$

D'après (1) et (2), N est multiple de 155 et multiple de 50 donc multiple de leur PPMC 1550.
Comme $N \leq 1860$ seul $N = 1550$ convient.

Exercice 4. COUPER-COLLER.

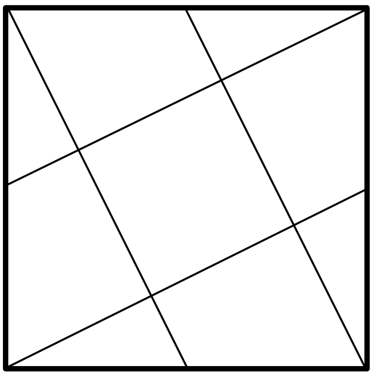
On dispose d’une bande formée de cinq carrés consécutifs.

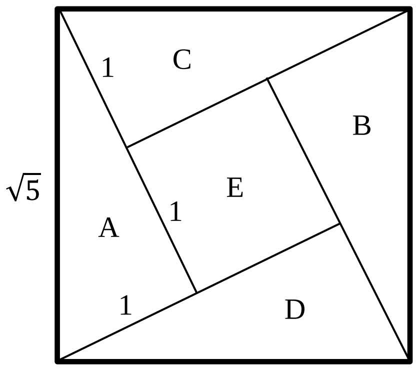


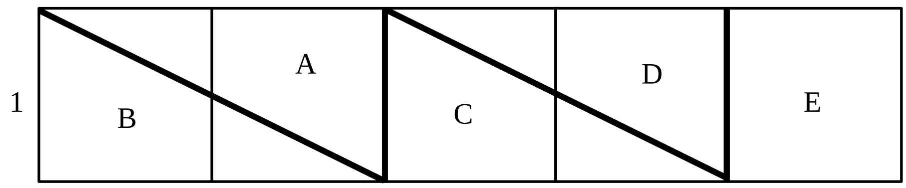
Comment découper cette bande afin que tous les morceaux puissent reconstituer un seul carré ?
On demande le moins de traits de coupe possibles, sans pliages, sans superposition de pièces, avec uniquement des traits de coupe rectilignes.

Solution :

Si on prend comme unité le côté d’un carré, l’aire de la bande est 5, donc le côté du carré est $\sqrt{5}$
Quatre découpes suffisent :

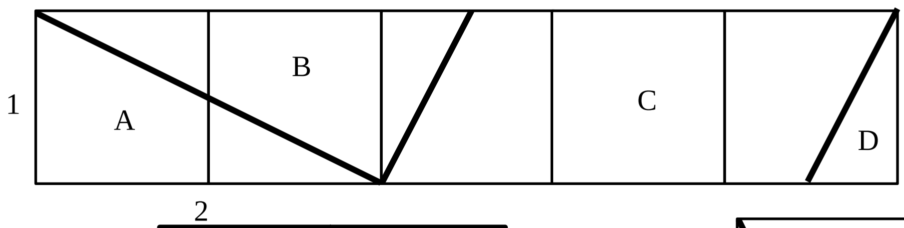


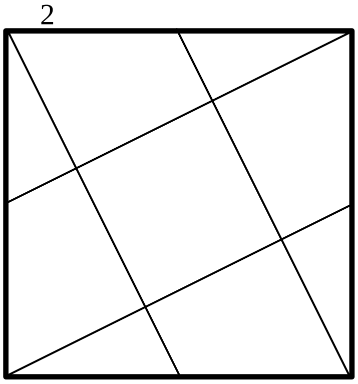


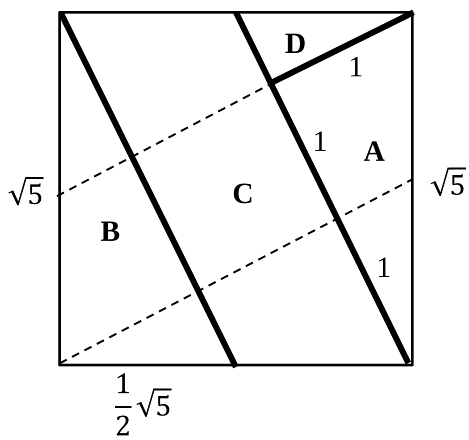


Les découpes sont en gras

Mais on peut faire mieux en **3 découpes** (en gras ci-dessous).







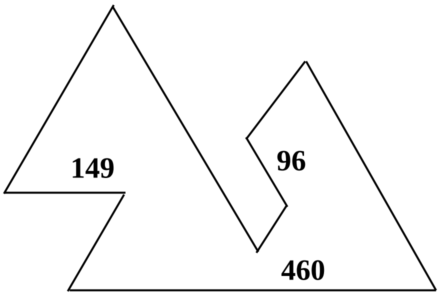
Exercice 5. LE LIVRE DE LA BÊTE.
Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à N.
Toutes les pages dont le numéro est multiple de 5 ou de 7 comportent un dessin.
Il y a en tout 209 dessins dont un en avant-dernière page.
Que vaut N ?

Solution :
Parmi les numéros des pages, il y a environ $\frac{N}{5}$ multiples de 5, $\frac{N}{7}$ mltiples de 7 et $\frac{N}{35}$ mltiples de 35.
Quand on ajoute les multiples de 5 et les multiples de 7, les multiples de 35 sont comptés deux fois.
Donc le nombre de pages ayant un dessin est environ $\frac{N}{5}+\frac{N}{7}-\frac{N}{35}=\frac{11\,N}{35}$.
On a donc à peu près $\frac{11\,N}{35}=209$ soit $N\approx 665$.
Avec N = 664 on a 132 multiples de 5, 94 multiples de 7 et 18 multiples de 35 soit 132 + 94 – 18 = 208 dessins
Avec N = 670 on a 134 multiples de 5, 95 multiples de 7 et 19 multiples de 35 soit 134 + 95 – 19 = 210 dessins
Ainsi, N est compris entre 665 et 669.
Or 665 est multiple de 35.
Donc, la présence d'un dessin en avant-dernière page n'est possible que si N = 666

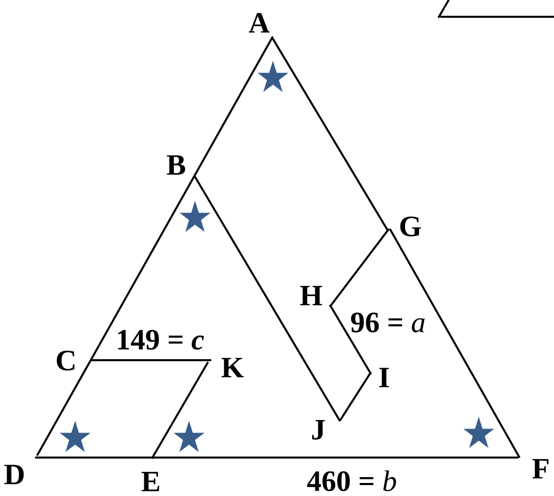
Le livre a 666 pages.

Exercice 6. PARCOURS ANGULEUX.
Tous les angles de la figure ci-dessous ont des mesures multiples de 60°.
Trois segments ont des mesures connues.
Quel est le périmètre de la figure ?

(Figure approximative)



Solution :



Prolongeons certains segments pour obtenir le triangle de la figure ci-dessus.
Ce triangle est équilatéral puisque ses trois angles mesurent 60°
(Les étoiles désignent des angles de 60°)
Soit L le côté de ce triangle.
On a DF = DE + EF = CK + EF = c + b = L (1)
Il est clair que AB = GH + IJ et CD = KE.
Or AD = L = b + c. Donc AD = AB + BC + CD = (GH + IJ) + BC + KE = b + c = L (2)
Il est clair que BJ = AG + HI.
Donc BJ + HI + GF = (AG + HI) + HI + GF = AG + GF + 2 HI = AF + 2 HI = L+ 2 a (3)
D'après (1) (2) et (3) on a
CK + EF = L ; GH + IJ + BC + KE = L ; BJ + HI + GF = L + 2 a.
Par addition on obtient :
CK + EF + GH + IJ + BC + KE + BJ + HI + GF = 3L + 2 a = 3 (b + c) + 2 a = 3 (460 + 149) + 2 (96) = 2019.
Le périmètre de la figure est 2019.

Exercice 7. LE DRAGON.

Un dragon a 50 têtes. Un chevalier peut, au choix :
Couper 10 têtes. Il en repousse alors une dans la minute qui suit.
Couper 11 têtes. Il en repousse alors 5 dans la minute qui suit.
Couper 2 têtes. Il en repousse alors 14 dans la minute qui suit.
Si le dragon reste sans tête ou avec une seule tête pendant plus d'une minute, il meurt.
Le chevalier peut-il tuer le dragon ?

Solution :

Dans le premier cas, le nombre de têtes diminue de 9 ;
Dans le deuxième cas, le nombre de têtes diminue de 6 ;
Dans le troisième cas, le nombre de têtes augmente de 12.
À chaque fois, le nombre de têtes varie de $3\,k$ avec k entier positif ou négatif.
Donc, à tout moment, le nombre de têtes sera égal à $50 + 3\,k = 16\ \times 3 + 2 + 3\,k = 2 + (16 + k) \times 3$.
Si le chevalier pouvait tuer le dragon, il parviendrait à un nombre de têtes nul ou égal à 1, c'est à dire

- $2 + (16 + k) \times 3 = 0.$ Cela entraînerait $2 = 3K$ ce qui est impossible car 2 n'est pas un multiple de 3.
- ou $2 + (16 + k) \times 3 = 1$ qui entraînerait $1 = 3K$ ce qui est impossible car 1 n'est pas un multiple de 3.

Le chevalier ne peut pas tuer le dragon.

Exercice 8. PARTAGE NON EQUITABLE.

Un champ rectangulaire a été partagé en 9 rectangles par 4 clôtures perpendiculaires (Figure ci-jointe).

671		**672**
	673	
674		

Quatre parcelles ont pour périmètres 671, 672, 673, 674 m.
Quel est le périmètre du champ ?

Solution :

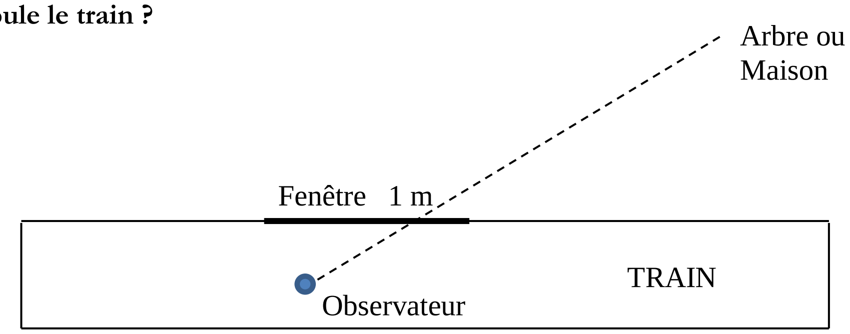
	a	***b***	***c***
d	**671**		**672**
e		**673**	
f	**674**		

Notons *a, b, c, d, e, f* les côtés des parcelles [Voir la figure ci-dessus].
On a $2\,(a + d) = 671 \quad 2\,(c + d) = 672 \quad 2\,(b + e) = 673 \quad 2\,(a + f) = 674$
Par addition on obtient $2\,(2a + b + c + 2d + e + f) = 2690$
Ou encore $2\,(a + b + c + d + e + f) + 2\,(a + d) = 2690$
C'est-à-dire $2\,(a + b + c + d + e + f) = 2690 -\ 2\,(a + d)$
Le périmètre demandé est donc $P = 2\,(a + b + c + d + e + f) = 2690 - 671 = \mathbf{2019}$.

Exercice 9. PAR LA FENETRE DU TRAIN.

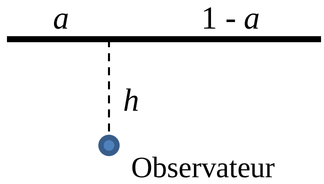
Assis dans un wagon, je regarde par la fenêtre d'1 m de large et constate qu'un arbre situé à 20 m des rails reste visible 1 s tandis qu'une maison située à 495 m des rails reste visible 24 s.
À quelle vitesse roule le train ?

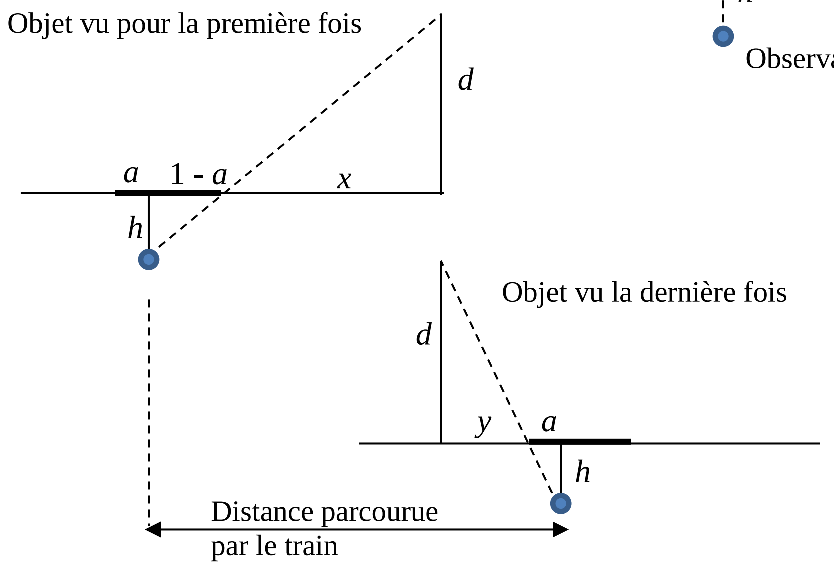
Solution :



Les unités sont le mètre et la seconde.
Soit h la distance de l'observateur à la fenêtre, d la distance entre l'objet visé et le train.et v en m/s la vitesse du train.
L'objet visé est un arbre ou une maison.

La position de l'observateur par rapport à la fenêtre (en gras) est représentée ci-contre.





D'après Thalès, $\frac{a}{h} = \frac{y}{d}$ et $\frac{1-a}{h} = \frac{x}{d}$. On tire $x = d\frac{1-a}{h}$ et $y = d\frac{a}{h}$ d'où $x + y = \frac{d}{h}$.

La distance parcourue par le train pendant la vision de l'objet est

$$1 - a + x + y + a = 1 + x + y = 1 + \frac{d}{h}.$$

Lorsque l'objet visé est l'arbre on a $d = 20$ donc $1.v = 1 + \frac{20}{h} = \frac{h+20}{h}$

Lorsque l'objet visé est la maison on a $d = 495$ donc $24.v = 1 + \frac{495}{h} = \frac{h+495}{h}$

Par division membre à membre on obtient $24 = \frac{h+495}{h+20}$. D'où on tire $h = \frac{15}{23}$. [environ 65 cm]

La vitesse du train est donc $v = 1 + \frac{20}{h} = \frac{95}{3}\ m/s$

Si on convertit en $km\ /\ h$ on trouve $\frac{95}{3} \times \frac{3600}{1000} =$ **114 $km\ /\ h$.**

7. PROGRAMMATION (💻)

Dans cette rubrique du corrigé, nous ferons la part belle aux programmes proposés par certaines équipes. Dans cette édition 2019, deux exercices ont été traités sous Python : « Le livre de la Bête » et « Partage non équitable ».

Vous trouverez ci-dessous les programmes sous Python de l'équipe « BIZOT Hadrien et GARRETA Clément » du lycée Stephen Liégeard de Brochon.

Le livre de la Bête :

```
nb_dessin=0
i=1
while nb_dessin<209:
    if i%5==0 or i%7==0:
        nb_dessin+=1
    i+=1
print(i)
```

Partage non équitable :

```
for a in range (1640,1700,5):
    for b in range (1640,1700,5):
        for c in range (1640,1700,5):
            for d in range (1640,1700,5):
                for e in range (1640,1700,5):
                    for f in range (1640,1700,5):
                        if 2*a+2*d==6710 and 2*a+2*f==6740 and 2*b+2*e==6730 and 2*c+2*d==6720:
                            print(2*(a+b+c+d+e+f)/10)
```

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://irem.u-bourgogne.fr/