Adrien-Marie Legendre, *Éléments de Géométrie*, 2e édition, Paris, Firmin-Didot, 1799→1844.

[p. 120]

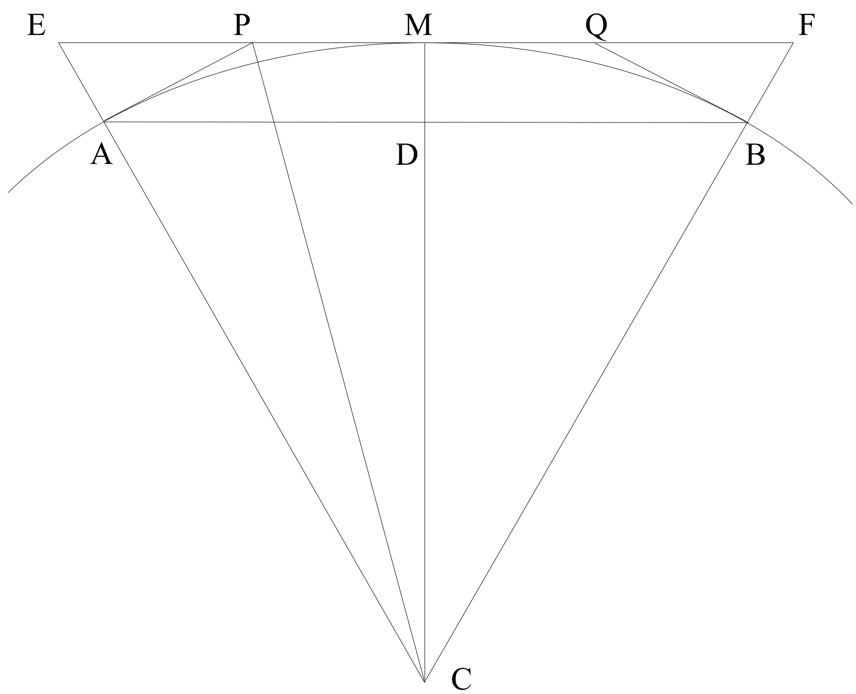
Proposition XII.

THÉORÈME. *L'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.*

[p. 123]

Proposition XIII

PROBLÈME *Étant données les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit de côtés double.*



Soit AB le côté du polygone donné inscrit, EF parallèle à AB, celui du polygone semblable circonscrit, C le centre du cercle ; si on tire la corde AM et les tangentes AP, BQ, la corde AM sera le côté du polygone inscrit d'un nombre de côtés double, et PQ double de PM sera celui du polygone semblable circonscrit. Cela posé, comme la même construction aura lieu dans les différents angles égaux à ACM, il suffit de considérer l'angle ACM seul, et les triangles qui y sont contenus seront entre eux comme les polygones entiers. Soit A la surface du polygone inscrit dont AB est un côté, B la surface du polygone semblable circonscrit, A' la surface du polygone dont AM est un côté, B' la surface du polygone semblable circonscrit; A et B sont connus, il s'agit de trouver A' et B'.

1° Les triangles ACD, ACM dont le sommet commun est A, sont entre eux comme leurs bases CD, CM ; d'ailleurs ces triangles sont comme les polygones dont ils font partie ; donc A:A'::CD:CM. Les triangles CAM, CME, dont le sommet commun est M, sont entre eux comme leurs bases CA, CE ; ces mêmes triangles sont comme les polygones A' et B dont ils font partie ; donc A':B::CA:CE. Mais à cause des parallèles AD, ME, on a CD:CM::CA:CE ; donc A:A'::A':B, donc le polygone A', l'un de ceux que l'on cherche, est moyen proportionnel entre les deux polygones connus A et B, et on a par conséquent $A' = \sqrt{A \times B}$.

2° A cause de la hauteur commune CM, le triangle CPM est au triangle CPE comme PM est à PE ;

mais la ligne CP divisant en deux parties égales l'angle MCE, on a PM:PE::CM:CE::CD:CA::A:A' ; donc CMP:CPE::A:A', et par suite , CPM:CPM+CPE, ou CME::A:A+A'. Mais CMPA ou 2CMP et CME sont entre eux comme les polygones B' et B dont ils font partie ; donc B':B::2A:A+A'. On a déjà déterminé A' ; cette nouvelle proportion déterminera B', et on aura $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}$; donc, au moyen des polygones A et B, il est facile de trouver les polygones A' et B' qui ont deux fois plus de côtés.

[p. 125]

Proposition XIV

PROBLÈME *Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre..*

Soit le rayon du cercle = 1, le côté du quarré inscrit sera $\sqrt{2}$, celui du quarré circonscrit sera égal au diamètre 2 ; donc la surface du quarré inscrit = 2, et celle du quarré circonscrit = 4. Maintenant, si on fait A = 2 et B = 4, on trouvera par le problème précédent l'octogone inscrit $A'=\sqrt{8}=2{,}8284271$, et l'octogone circonscrit $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3{,}3137085$. Connaissant ainsi les octogones inscrit et circonscrit, on trouvera par leur moyen les polygones d'un nombre de côtés double; il faudra de nouveau supposer A = 2,8284271 et B = 3,3137085 et on aura $A'=\sqrt{A\times B}=3{,}0614674$, et $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3{,}1825979$. Ensuite ces polygones de 16 côtés serviront à connaître ceux de 32, et on continuera ainsi jusqu'à ce que le calcul ne donne plus de différence entre les polygones inscrit et circonscrit, au moins dans l'ordre de décimales auquel on s'est arrêté, qui est le septième dans cet exemple. Arrivé à ce point, on conclura que le cercle est égal au dernier résultat car le cercle doit toujours être compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit ; donc si ceux-ci ne diffèrent point entre eux jusqu'à un certain ordre de décimales, le cercle n'en différera pas non plus jusqu'au même ordre.

Voici le calcul de ces polygones prolongé jusqu'à ce qu'ils ne diffèrent plus dans le septième ordre de décimales.

Nombre des côtés	Polygone inscrit.	Polygone circonscrit.
4.	2,0000000	4,0000000
8.	2,8284271	3,3135085
16.	3,0614674	3,1825979
32.	3,1214451	3,1517249
64.	3,1365485	3,1441184
128.	3,1403311	3,1422236
256.	3,1412772	3,1417504
512.	3,1415138	3,1416321
1024.	3,1415729	3,1416025
2048.	3,1415877	3,1415951
4096.	3,1415914	3,1415933
8192.	3,1415923	3,1415928
16384.	3,1415925	3,1415927
32768.	3,1415926	3,1415926

De là, je conclus que la surface du cercle = 3,1415926. On pourrait avoir du doute sur la dernière décimale à cause des erreurs qui viennent des parties négligées ; mais le calcul a été fait avec une décimale de plus, pour être sûr du résultat que nous venons de trouver jusque dans la dernière décimale.

Puisque la surface du cercle est égale à la demi-circonférence multipliée par le rayon, le rayon étant 1, la demi-circonférence est 3,141526 ; ou bien le diamètre étant 1, la circonférence est 3,1415926 ; donc le rapport de la circonférence au diamètre désigné ci-dessus par π = 3,1415926.