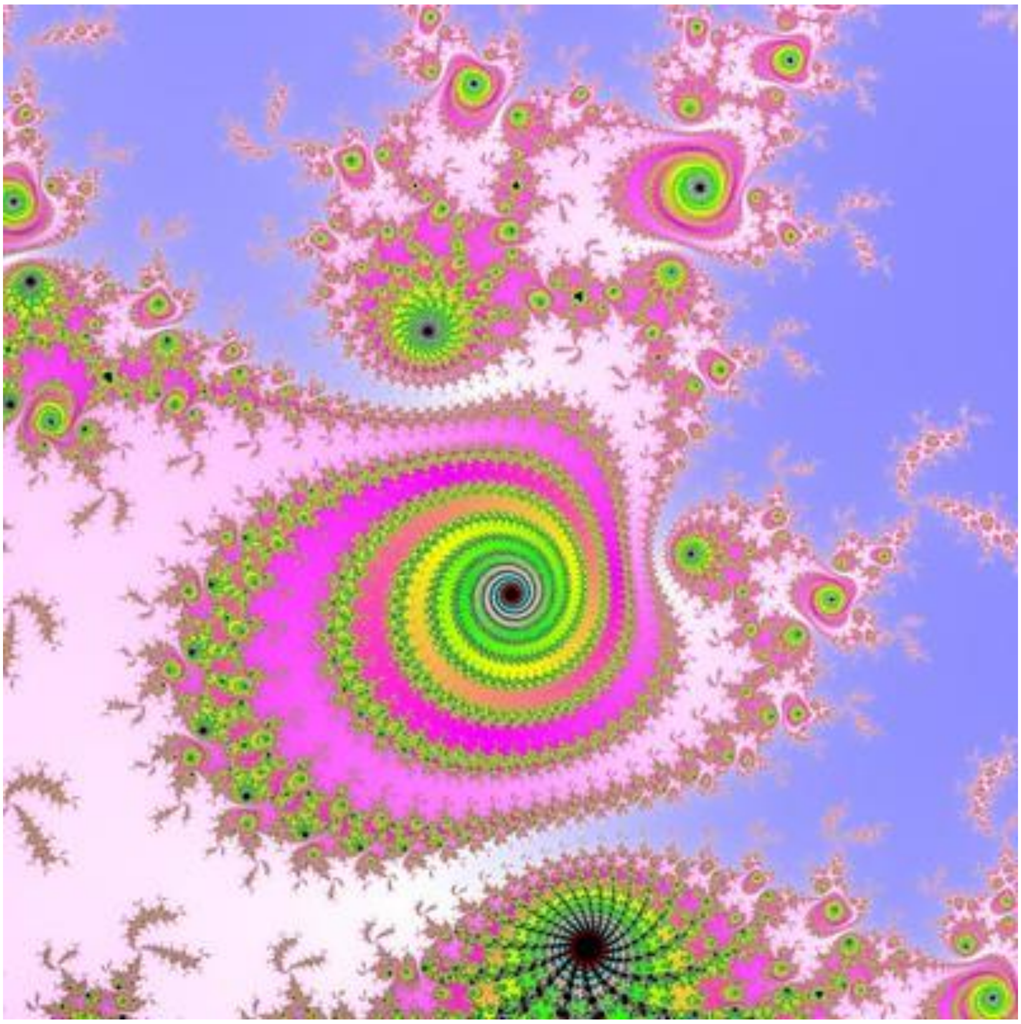
RALLYE MATHEMATIQUE

DE BOURGOGNE

2020 : 38^{e} rallye



Avec l'aimable autorisation de Sébastien Raymond (https://www.flickr.com)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://irem.u-bourgogne.fr

Malgré la complexité du contexte sanitaire que nous traversons depuis plusieurs mois maintenant et des nombreuses conséquences qui en découlent, le traditionnel « Rallye mathématique » demeure un rendez-vous attendu, un moment pivot qui jalonne l'année scolaire. C'est un évènement qui offre une belle occasion aux lycéennes et aux lycéens de travailler en équipe, dans une approche divertissante et vivante.

Ce rallye est le fruit d'un investissement important et constant de la part de nombreux acteurs et actrices dont le succès est à mettre à l'actif des équipes éducatives des lycées. Ce résultat ne serait pas possible sans le soutien de nos différents partenaires institutionnels et privés, toujours présents. Le déroulement des épreuves du rallye, sa pérennité et son ampleur, tiennent aussi à la qualité de son organisation, à laquelle l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'université de Bourgogne consacre une énergie irremplaçable.

Je remercie chaleureusement toutes celles et tous ceux qui ont contribué à cette édition. Ils démontrent que la coopération entre les établissements du secondaire, les services académiques, les collectivités, les entreprises et l'université est un facteur de réussite et de visibilité collective.

Au nom de l'université de Bourgogne, je félicite les lycéennes et les lycéens qui ont participé à cette édition du « Rallye mathématique ». Pratiquer cette discipline et apprendre à l'apprécier favorise incontestablement la réussite dans les études. C'est en effet une matière importante mais aussi un support, un complément à d'autres disciplines.

Au cœur de la recherche et de l'innovation, les mathématiques nous entourent au quotidien sans que nous n'y prêtions attention. Ce « Rallye mathématique » contribue à donner aux jeunes une image moderne de cette discipline.

Souhaitons que cette initiative pourra donner envie à certains d'entre eux de poursuivre leurs études supérieures dans cette voie au sein de notre université.

Vincent THOMAS
Président de l'université de Bourgogne

Chaque année, le rallye mathématique des lycées de Bourgogne fédère toujours autant, si ce n'est davantage, de classes et d'établissements autour de la résolution de problèmes.

Le cru 2020, n'a pas déçu par la qualité, l'originalité et l'attractivité de ses énoncés, parfois fantasques mais toujours aussi passionnants.

Si le prix Nobel de physique Eugène Wigner évoquait en 1960 « la déraisonnable efficacité des mathématiques », le rallye mathématique prouve « l'efficacité de ces déraisonnables mathématiques » qui mélangent des nains de jardin avec des escargots ou des caméléons !

Tout cela pour le plus grand plaisir de tous les participants et participantes.

Les mathématiques ne sont pas seulement un outil servant à accomplir des calculs tous plus compliqués les uns que les autres, c'est aussi une formation à la pensée rationnelle, malheureusement mise à mal en ces derniers temps.

C'est dans cette perspective que les jeux de l'esprit, tels que les rallyes mathématiques, trouvent leur place pour donner aux pratiquants des ressorts de motivation pour penser, comprendre, imaginer, chercher ... et parfois trouver.

Ils développent auprès des jeunes le goût des sciences et le plaisir de chercher ensemble en mettant à profit les contributions de tous, mêmes modestes.

Il faut donc se réjouir de son essor et de sa vitalité auprès des lycéens pour rompre avec l'image d'une discipline trop abstraite et rébarbative.

Mais que l'on ne s'y trompe pas, derrière l'apparente futilité de ces énoncés se cache une véritable activité mathématique : c'est à la faculté d'expérimenter, d'observer mais aussi de raisonner qu'il est fait appel chez chacun des concurrents. Faire des mathématiques, c'est comprendre un problème, le transformer, le rendre accessible, imaginer des pistes, construire une solution pour enfin atteindre la preuve qui est le terme de toute quête mathématique.

Je remercie, félicite et encourage tous les acteurs de cette action collective. Merci à l'IREM, à ses partenaires et à tous ses relais dans les établissements ; merci et bravo aux concepteurs de sujets ; merci surtout aux professeurs qui réussissent, toujours plus nombreux, à motiver leurs élèves ; merci enfin à tous les organisateurs qui, de près ou de loin, dans les établissements scolaires, concourent à la bonne marche du rallye.

Enfin, il faut féliciter les 687 participants répartis en 212 équipes issues de 26 lycées, et se réjouir d'une hausse significative de la participation au rallye depuis plusieurs années.

Bravo à tous, filles et garçons, lauréats et simples participants et rendez-vous en 2021 pour la 39^e^édition du rallye mathématique des lycées de Bourgogne.

Francis CORTADO
IA-IPR de mathématiques

Joies et peines

Il n'est pas d'usage dans la préface du compte rendu du Rallye mathématique de Bourgogne d'évoquer des événements tristes, car le Rallye est conçu comme un moment joyeux, dynamique et promoteur de plaisir dans la recherche et la résolution de problèmes.

La situation sanitaire très particulière de cette année 2020 a retardé la publication de cette brochure, qui est réalisée à l'automne alors que nous venons d'apprendre la disparition brutale de Michel Lafond, survenue au début du mois de septembre.

Michel avait été l'un des fondateurs du Rallye, en 1979, avec entre autres partenaires, Roland Durier, directeur de l'IREM, et Daniel Reisz, professeur au lycée Jacques-Amyot d'Auxerre et qui allait devenir IPR de l'Académie de Dijon. Après une pause entre 1986 et 1989, Michel relançait le Rallye en 1990 avec Robert Ferachoglou. Leur binôme publiera deux fameux ouvrages de récréations mathématiques aux éditions Ellipses[1]. Figure tutélaire et amicale, Michel continuait à travailler avec le groupe Rallye après son départ à la retraite, retraite qui ne fut jamais oisive pour ce passionné de mathématiques, d'informatique et de jeux. Il avait également tenu la rubrique « Jeux et problèmes » de la *Feuille de Vigne*, périodique publié par l'IREM jusqu'en 2016 ; cette rubrique faisait la joie de nombre de collègues d'un peu partout et avait valu à Michel une grande estime de la part d'acteurs éminents du monde des jeux mathématiques. Nous sommes particulièrement fiers d'avoir hébergé dans nos colonnes ses rendez-vous réguliers. Michel va nous manquer terriblement.

Revenons maintenant aux joies du Rallye. Comme nous l'écrivions plus haut, la situation sanitaire a bouleversé l'organisation de l'IREM depuis mars 2020 et empêché la tenue d'une cérémonie de récompenses, mais l'équipe ne s'est pas avouée battue et vous avez en main le compte-rendu de cette édition. La 38^e^, que le temps passe vite !

Une bonne preuve du fait que les Rallyes sont même utiles à la recherche mathématique, c'est l'exemple des nombres brésiliens. Un nombre brésilien est un entier naturel n pour lequel il existe une base b (avec $b < n - 1$) dans laquelle il s'écrit avec des chiffres tous identiques, autrement dit : $n = \overline{aa...a}^{\,b}$. La dénomination de « nombres brésiliens » a été donnée à ces nombres car ils faisaient l'objet du premier exercice des Olympiades ibéro-américaines de mathématiques en 1994.

Eh bien, figurez-vous que 38 est un nombre brésilien[2], étonnant, non ? À vous de le prouver !

Frédéric Métin, Directeur de l'IREM.

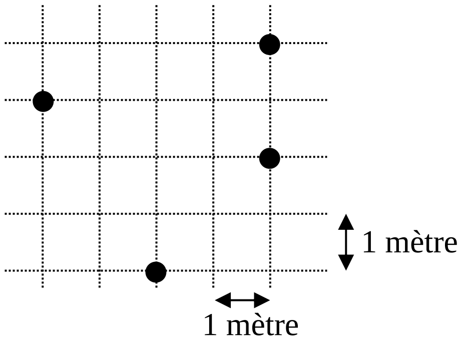
---

[1] Respectivement *100 friandises mathématiques* en 2010 et *100 gourmandises mathématiques* en 2010.
[2] Il est aussi égal à la somme des carrés des trois premiers nombres premiers.

1. ÉNONCÉS 2020

Exercice 1 : NAINS DE JARDIN

Gaston avait **6** nains de jardin disposés selon un motif ayant un axe de symétrie.



On lui a volé 2 nains distants de 3 mètres. Où étaient-ils exactement ?

Exercice 2 : L'ESCARGOT DE BOURGOGNE

On écrit la suite des nombres entiers comme ci-dessous :

1	2	9	10	25	26
4	3	8	11	24	---
5	6	7	12	23	
16	15	14	13	22	
17	18	19	20	21	

Quel est le nombre écrit à l'intersection de la 100^e ligne et de la 100^e colonne ?

Exercice 3 : DES SOUS EN POCHE

Avec ce que j'ai en poche, je peux m'acheter
10 caramels et 11 sucettes
ou 7 caramels et 16 sucettes.
Ai-je de quoi m'acheter 8 caramels et 14 sucettes ?

Exercice 4 : TACCIDENT

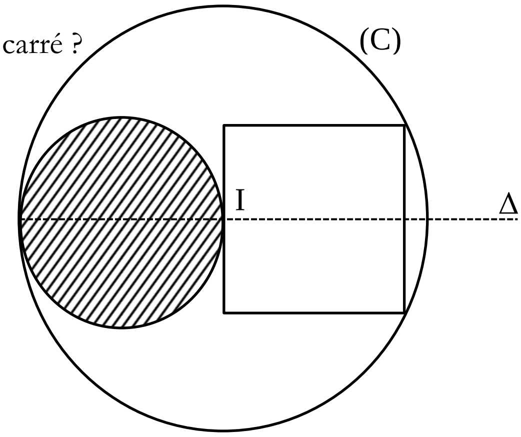
Dans une ville, il y a moins de 100 taxis, numérotés de 1 à *n*.
À la suite d'un accident entre deux taxis portant des numéros consécutifs, la moyenne des numéros restants a diminué de 0,24.
Quels sont les numéros des taxis accidentés ?

Exercice 5 : PLACEMENT HASARDEUX

Placer dans chaque case d'un carré 8×8 un des entiers 0, 1 ou 2 de sorte que les 16 sommes obtenues en lignes et en colonnes soient toutes différentes.

Exercice 6 : LE POINT CENTRAL

Un logo est représenté par un disque hachuré et un carré de même aire, tangents au point I et ayant un axe de symétrie Δ. Le tout est inscrit dans un cercle (C).
Le centre du cercle (C) est-il dans le disque hachuré ou dans le carré ?

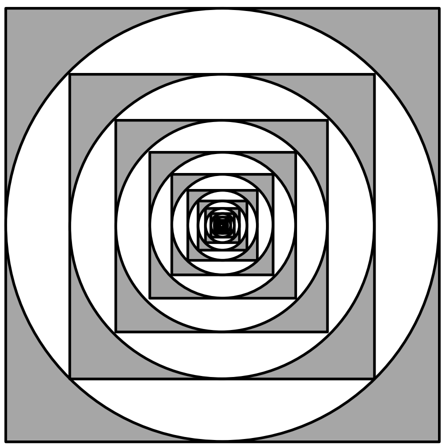


Exercice 7 : LES BILLES

6 enfants ont chacun un effectif de 20 billes. Ils jouent au jeu suivant : à chaque tour, l'un des enfants donne une bille aux 5 autres.
Combien faut-il de tours **au minimum** pour qu'à la fin du jeu, les 6 effectifs soient tous différents ?

Exercice 8 : PROPORTION

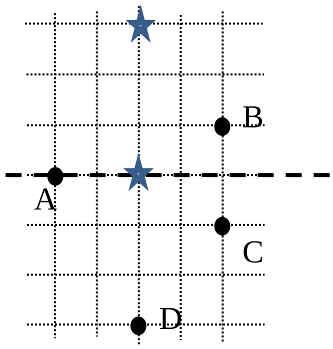
Dans la figure ci-dessous, quelle est la proportion de l'aire grisée dans le grand carré ?



Exercice 9 : LES CAMÉLÉONS

Il y a sur une île, 7 caméléons jaunes, 10 caméléons rouges et 5 caméléons verts.
Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur.
Lorsque deux caméléons de même couleur se rencontrent, il ne se passe rien.
Au bout d'un certain temps, les caméléons sont tous de la même couleur. Laquelle ?

Solutions succinctes

<table>
<tr><th>Exercice</th><th>Solution</th></tr>
<tr><td>1. Les nains de jardin</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. L’escargot de Bourgogne</td><td>9901</td></tr>
<tr><td>3. Des sous en poche</td><td>J’ai de quoi acheter 8 caramels et 14 sucettes.</td></tr>
<tr><td>4. T-accident</td><td>Il y a 52 taxis et les taxis accidentés sont les 32 et 33.</td></tr>
<tr><td>5. Placement hasardeux</td><td>
<table>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>14</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6. Le point central</td><td>Le centre I est à l’intérieur du disque hachuré.</td></tr>
<tr><td>7. Les billes</td><td>Il faut au minimum 15 tours.</td></tr>
<tr><td>8. Proportion</td><td>La proportion de l’aire grisée est $\frac{4-\pi}{2} \approx 0,429$ soit environ 42,9 %.</td></tr>
<tr><td>9. Les caméléons</td><td>Les caméléons sont tous verts à la fin.</td></tr>
</table>

2. LA PARTICIPATION

Le **38**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 05 février 2020.
Il a concerné :

26 lycées **212 équipes** **687 participants**.

Voici l'évolution de la participation ces sept dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**Total des participants**
2014	263	131	148	39	**589**
2015	309	198	149	49	**705**
2016	365	180	154	72	**771**
2017	427	172	180	69	**848**
2018	288	156	166	65	**675**
2019	319	133	166	43	**661**
2020	304	45	273	65	**687**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.
Niveau I : secondes et premières générales (non spécialité mathématiques)
Niveau II : premières technologiques et terminales non-scientifiques
Niveau III : premières générales (spécialité mathématiques)
Niveau IV : terminales S

	Nombre de candidats				Nombre d'équipes			
Niveau	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	8	0	2	4	2	0	1	1
21 - Lycée Boivin	0	0	0	6	0	0	0	2
21 - Lycée Carnot	14	0	9	8	4	0	3	2
21 - Lycée Charles de Gaulle	17	0	16	20	6	0	6	6
21 - Lycée Eiffel	29	2	15	29	9	1	5	9
21 - Lycée Le Castel	6	13	8	0	2	4	3	0
21 - Lycée Montchapet	15	0	4	4	5	0	1	1
21 - Lycée Prieur	4	0	4	2	1	0	1	1
21 - Lycée Simone Weill	0	7	0	0	0	2	0	0
21 - Lycée Stephen Liégeard	18	8	15	17	5	2	4	5
58 - Lycée Alain Colas	18	15	0	4	5	5	0	2
58 - Lycée Notre-Dame - Nevers	2	0	0	6	1	0	0	2
71 - Lycée Gabriel Voisin	8	0	0	0	2	0	0	0
71 - Lycée Henri Parriat	10	3	4	9	3	1	1	3
71 - Lycée Henri Vincenot	0	0	0	3	0	0	0	1
71 - Lycée Julien Wittmer - Charolles	8	0	2	3	3	0	1	1
71 - Lycée La Prat's - Cluny	2	0	2	3	1	0	1	1
71 - Lycée Léon Blum	81	15	58	26	23	4	17	7
71 - Lycée militaire d'Autun	14	0	0	3	4	0	0	1
71 - Lycée Niepce	5	0	0	0	2	0	0	0
71 - Lycée Ozanam	14	0	0	0	5	0	0	0
89 - Lycée Chevalier d'Eon	1	0	2	3	1	0	1	1
89 - Lycée Parc des Chaumes	4	0	1	4	1	0	1	1
89 - Lycée Fourier - Auxerre	29	0	0	0	8	0	0	0
89 - Lycée Jacques Amyot	14	0	1	4	4	0	1	1
89 - Lycée Pierre Larousse	0	0	2	0	0	0	1	0
Total	321	63	145	158	97	19	48	48

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Michel LAFOND, Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Quatre autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Laurent BANDERIER, Thomas BUREL, Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame la Rectrice de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Irène Bros, Francis Cortado et Frédéric Lemasson, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au rallye des lycées.
Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Jessy DELPIERRE, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 687 Bourguignons qui ont travaillé durement…

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Les nains de jardin	116	94 %	62,4 %
2. L'escargot de Bourgogne	116	93,1 %	53,7 %
3. Des sous en poche	116	91,4 %	81,1 %
4. T-accident	212	67 %	25,4 %
5. Placement hasardeux	212	92 %	80 %
6. Le point central	212	71,2 %	39,1 %
7. Les billes	96	94,8 %	84,6 %
8. Proportion	96	77,1 %	31,1 %
9. Les caméléons	96	83,3 %	81,3 %

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes et premières générales (non spécialité mathématiques))

L'équipe : [CHAINE Elisabeth – CHAUVELOT Élise – CORNELIS Noor – LEMAITRE Lou]
du lycée Anna Judic de Semur-en-Auxois avec 51 points sur 60.

Niveau II (premières technologiques et terminales non-scientifiques)

L'équipe : [DESROCHES Oscar – DI FIORE Sarah – GODARD Argine – GOUTARBE Salomé]
du lycée Léon Blum du Creusot avec 42 points sur 60.

Niveau III (premières générales (spécialité mathématiques))

L'équipe : [CHOLLET René – RAMILLON Thomas]
du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre avec 51 points sur 60.

Niveau IV (terminales S)

L'équipe : [BUENO-MIRANDA Pauline – DROUET Sarah – MARTIN Joris]
du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre avec 60 points sur 60.

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2020

BUENO-MIRANDA Pauline – DROUET Sarah – MARTIN Joris
du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre

5. LE PALMARÈS

Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées

Secondes et premières générales (non spécialité mathématiques)

1	CORNELIS Noor	CHAINE Elisabeth	CHAUVELOT Elise	LEMAITRE Lou	Lycée Anna Judic
2	TRILLO William	DUTAUD Lukas	MOREAU Jules	GAUDERON Léo	Lycée Eiffel
3	WENDLING Joël	SIMONNET Romain			Lycée Fourier - Auxerre
4	MEUNIER Valentine	LEBONNOIS Simon	GREHANGE Tom		Lycée Charles de Gaulle
5	FURLANETTO Camille	MILLOT Aurèle	ORY Alex	HITIER Philémon	Lycée du Parc des Chaumes
6	MATHIAS Cloé	GOMEZ Alexandre	LAMOTTE Amandine	VOILLOT Camille	Lycée Alain Colas
7	CHAUVEL Sarah	GERARD DUCHESNE Merlin	LORIOT Ambre	SEMGHOUNI Mustapha	Lycée Anna Judic
8	PIAT-MARCHAND Mickaël	POÇAS Yonni	MATHIEU Arthur	COQUILLION Orian	Lycée Stephen Liégeard
9	AJOUID Sanaa	BOURGEOIS Nino	GARCIA Maud	GUILLAUMOT Fannie	Lycée militaire d'Autun
10	EDY Gautier	TISSIER Antoine			Lycée Charles de Gaulle
11	SARNIN Olyana	PITA Mathis	THOMAS Mathias	PELAMOURGUES Romain	Lycée Julien Wittmer - Charolles
12	GATOUILLAT Paul	RAPPENEAU Charlène	PLESSY Hugo	KAZAZ Maxence	Lycée Jacques Amyot
13	DUBOST Romain	FLEUREY Tom			Lycée Eiffel
14	LOTTIER Lila	PARRA Lilian	SCHMIT Léon	MORAUX Thomas	Lycée Stephen Liégeard

Premières technologiques et terminales non-scientifiques

1	GODARD Argine	GOUTARBE Salomé	DI FIORE Sarah	DESROCHES Oscar	Lycée Leon Blum - Le Creusot
2	NKOUANKAM Shaïna	ROSIER Lisa	BOUCHARD Noémie		Lycée Henri Parriat - Montceau
3	HENNEBOIS Manon	PRICE Louise	BROCQUET Anaïs	CHATER Ikram	Lycée Alain Colas

Premières générales (spécialité mathématiques)

1	RAMILLON Thomas	CHOLLET René			Lycée Chevalier d'Eon
2	CASTELOA Adrien	MICOREK GREGULSKI Sacha	HOCQUET Marine	TORRENTS Matéo	Lycée Henri Parriat - Montceau
3	CASAS Gabriel	FRAIZIER Jules	DESCHAMPS Owen	EYMERY Lohan	Lycée Eiffel
4	RENIAUD Eliot	RAMALHOSA Milo			Lycée La Prat's - Cluny
5	GIRAULT Romain	BADON Léopold	MIKOLAJSKI Léo	SEDDIKI Sany	Lycée Leon Blum - Le Creusot
6	PELLERIN Oscar	BOURGEOIS Manon	HOURI Ryan	METAIS Nicolas	Lycée Leon Blum - Le Creusot
7	DEMANGEOT Hugo	MARTIN Norah	MIGNON Matthieu	FROISSARD Léna	Lycée Montchapet
8	DUCHESNE-MATHIS Romane	GEHANNO Emeline	BAR Maya	NASCIMENTO Clara	Lycée Leon Blum - Le Creusot
9	MENASSA Alice	RALAIMIRANA Liantsoa			Lycée Charles de Gaulle

Terminales scientifiques

1	MARTIN Joris	BUENO-MIRANDA Pauline	DROUET Sarah		Lycée Chevalier d'Eon
2	BAULARD Nathan	GACHON Vincent	HUREZ Quentin	PARIZE Germain	Lycée Carnot
3	BENOIT Romain	DOUBEZ Natan			Lycée Boivin
4	CLINARD Rémi	COSSART Mathis	BIZOT Adrien	GARETTA Clément	Lycée Stephen Liégeard
5	GERMAIN Denis	CIRY Arnaud	JIMENEZ Tom	MICHOT Julien	Lycée Jacques Amyot
6	KEGREISZ Clément	GAUTHE Corentin	PERRAUDIN Samuel	NUGUES Frédéric	Lycée Henri Parriat - Montceau
7	BOURAKBA Yanis	COSTE Elsa	LOONES Victor	REVOL Camille	Lycée Montchapet
8	TRILLO Baptiste	LEVRINO Samuel	MONIOT Lucas	LADUGUIE Alexandra	Lycée Eiffel
9	THONG SOUM Claire	COMELLO Agate	CLÉMENT Hugo	CHAFFARD Florian	Lycée Charles de Gaulle

Élèves cités, non récompensés

Secondes et premières générales (non spécialité mathématiques)

WILKINSON-RIDDLE Thomas	BOURGEOIS Mia	BUISARD Sarah		Lycée Charles de Gaulle
BOUHAMED Mehdi	MONTAPA Jules	BERGER Arno	MOREAU-SUM Victor	Lycée Montchapet
PROST Anatole	MENCONNI Mathis	RAZNIEWSKI Samuel	THIANT Gabriel	Lycée Alain Colas
JACQUIOT Léo	FROMAIN-GARDAZ Martin	DALOZ Thibaut	FRANÇOIS Thomas	Lycée Gabriel Voisin
OUDIN Florian	EL HADEF Yanis	KARRAM Anass		Lycée Fourier - Auxerre
BENARD Clara	DELBOS Antoine	BAGLIN Aaron	DE FREITAS Mattéo	Lycée Fourier - Auxerre
BESANCON Lucas	COUTIN Gabriel	BELLOT Maxime	ORDONEZ GOMEZ Océane	Lycée Fourier - Auxerre
EL MOURTADI Hamza	CHANUSSOT Théo	CHABRIDON Augustin	BATILLE Thibault	Lycée Gabriel Voisin
ROLIN Marion	PERRAUD Matis			Lycée Montchapet
COLLOT Anne	CLEON Adrien	LE Émilie	BOUVOT-GINHOUX Léa	Lycée Prieur - Auxonne
ANDRE François-Charles	DONDAINE Maëlle	CHENU Gaspard	FROM Flavien	Lycée Fourier - Auxerre
DODANE Sacha	GERMANN Nino	NAUDET Jean	MULLER Titouan	Lycée Eiffel
SEGAUD Roman	MESSOUSSA Iliane	MILEK Gaspard	PERRAULT Florian	Lycée Leon Blum - Le Creusot
DURUPT Alex	BERNARD Adrien			Lycée Ozanam - Macon
GENDRE Théodore	PELLETIER Jean	MARMOND Colin		Lycée Ozanam - Macon
GLISE Romane	MENARD Ilonna	MARTINS Clarisse	LOURY Eva	Lycée Fourier - Auxerre

Premières technologiques et terminales non-scientifiques

BELIN Maya	KAUTZMANN Fanny			Lycée Alain Colas
COLLIN Lina	HENRY Alix	JARNY Lucas	MERGEY Emeline	Lycée Simone Weil
JANNAIRE Bérénice	LORTAT Julie	VITTI Cassandra		Lycée Le Castel
JOURAVLENKO Luka	COURAULT Lemry	BARTCZAK Antoine	DAMINE Wassil	Lycée Leon Blum - Le Creusot
DE ALMEIDA Mathéo	POPLASY Léo	PICHON Florian	MOINE Adrien	Lycée Leon Blum - Le Creusot
DUJOUX GARANCE	AUBRY Bérénice	FLANDRIN Angèle		Lycée Alain Colas
AMAR BENSABER Meinar	MAÏZI Jacques	GAUTIER--MARTINS Enzo		Lycée Leon Blum - Le Creusot

Premières générales (spécialité mathématiques)

GILLET Andéol	DEL REY-SEGOVIA Denis	JANNIER Geoffrey		Lycée Eiffel
ASTESIANO Aurélien	ROUSSEAU Bastien	LEGUY Gaston	PITOIS Tom	Lycée Carnot
VAIRET Clara	APITHY Jehida	PLUCHOT Léna		Lycée Stephen Liégeard
PINTO Laurine	DUQUE Maëlys	LORENZON Elena	ANNUNZIATA Vanessa	Lycée Leon Blum - Le Creusot
KOKOT Hugo	CHARLES Romain	MILIONE Julie	CHAÂBANE Sirine	Lycée Leon Blum - Le Creusot
DEGRANGE Amélie	MATROT Céleste			Lycée Le Castel
BERTHIER Louis	BEAUVAIS Arthur	ALAUX Florian	GENOUËL Edgar	Lycée Stephen Liégeard
NEVEU Sidonie	ROUANET Alix	DECOSNE Rémi	LANAUD Lucas	Lycée Stephen Liégeard
DELAUNAY Chloé	MANIÈRE Lise	ENGEL Gabrielle		Lycée Charles de Gaulle

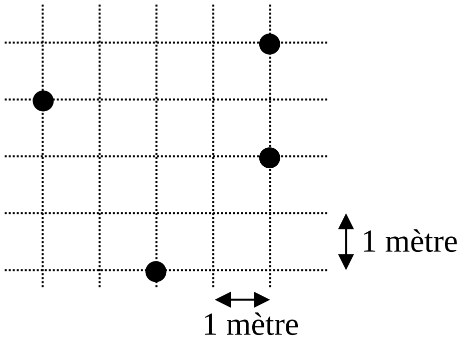
Terminales scientifiques

GUILLEMOT Emenie	ESCOLAR Nicolas			Lycée Henri Parriat - Montceau
JARMUZEK Jean	CHORYNSKI Ewan	MOOR Ruben		Lycée Henri Parriat - Montceau
MINA-PASSI Hugo	LECAT Margot	DENIS Ilona	FARRUGIA Elena	Lycée Carnot
OPTASANU Mara	DUTHU Augustin	MONTALBETTI Tristan		Lycée Charles de Gaulle
DUMONT Valère	THOMAS Louis	GARNIER Paul	DUFUT Clément	Lycée Eiffel
PAOLETTI Anthony	BRETON Raphaël	BRIANT Clara	DUCLOS Maxime	Lycée Notre Dame - Nevers
BRAYOTEL Agathe	CONREUX-GIORGETTI Amandine	DE LA BOURDONNAYE Léa	SANCIER Anaïs	Lycée Charles de Gaulle
FERREIRA ANTABLI Benjamin	FROCHOT Nathan	ALEXANDRE-MARTIN Samuel		Lycée Eiffel
QUEAU Théophile	VERVIER Lucas	BROCARD Romain		Lycée Charles de Gaulle
PICHAUD Edith	MAZILLE Léa	FLEURY Paul		Lycée Eiffel
MOUATADIR Mohamed-Amine	ROTSART Ryan	WERNER Eliot		Lycée Eiffel
ACIER Flavie	CHAREWICZ Lucie	KOELSCH Félicien	LABILLE Maaike	Lycée Leon Blum - Le Creusot
LOGEROT Balia	DE SIMINI Giacomo			Lycée Charles de Gaulle
SOUVERAIN David	LEGENDRE Yohann	SHI Jianlong	LEBRETON Clément	Lycée du Parc des Chaumes

6. LE CORRIGÉ

<u>Exercice 1 : NAINS DE JARDIN</u>

Gaston avait **6** nains de jardin disposés selon un motif ayant un axe de symétrie.

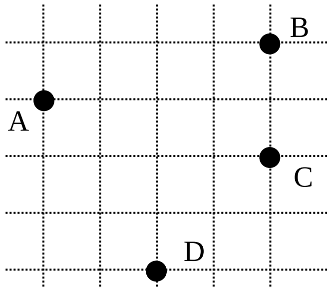


On lui a volé 2 nains distants de 3 mètres. Où étaient-ils exactement ?

Solution

Désignons par A, B, C, D les 4 emplacements restants.

Parmi les points A, B, C, D au moins deux se correspondent par symétrie, sinon il y en aurait 3 sur l'axe de symétrie, donc 3 alignés ce qui n'est pas le cas.

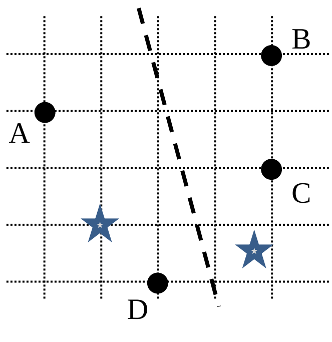


Soit Δ l'axe de symétrie (en pointillé). Étudions toutes les possibilités :

<u>Δ est la médiatrice de [AB]</u> :

Dans ce cas, les 2 nains manquants C'et D' (étoiles grises) seraient les symétriques de C et D, mais

C'D' = CD = $\sqrt{8} \approx 2{,}828 \neq 3$

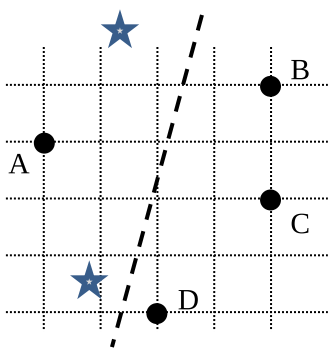


<u>Δ est la médiatrice de [AC]</u> :

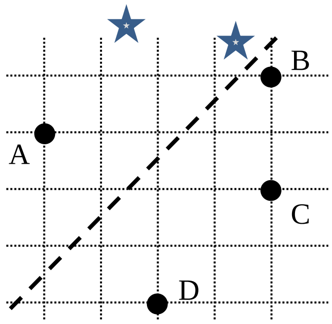
Dans ce cas, les 2 nains manquants B' et D' (étoiles grises)

seraient les symétriques de B et D, mais

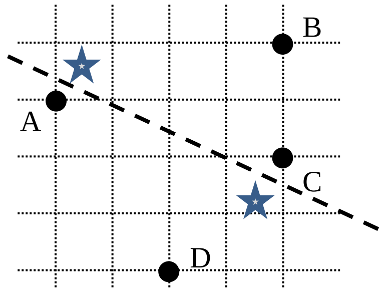
B'D' = BD = $\sqrt{20} \approx 4{,}472 \neq 3$



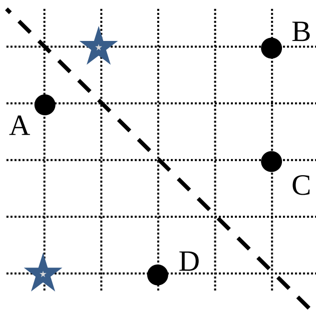
Δ est la médiatrice de [AD] :
Dans ce cas, les 2 nains manquants B’ et C’ (étoiles grises) seraient les symétriques de B et C, mais B’C’ = BC = $2 \neq 3$



Δ est la médiatrice de [BD] :
Dans ce cas, les 2 nains manquants A’ et C’ (étoiles grises) seraient les symétriques de A et C, mais
A’C’ = AC = $\sqrt{17} \approx 4,123 \neq 3$

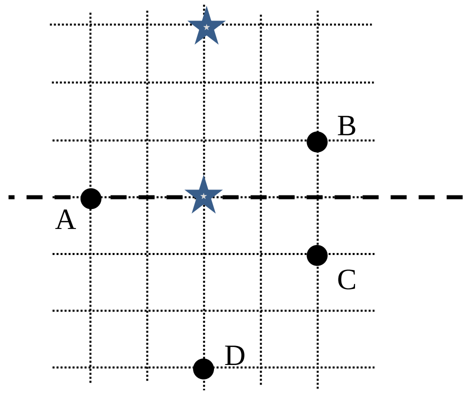


Δ est la médiatrice de [CD] :
Dans ce cas, les 2 nains manquants A’ et B’ (étoiles grises) seraient les symétriques de A et B, mais
A’B’ = AB = $\sqrt{17} \approx 4,123 \neq 3$



Il ne reste qu’un cas : **Δ est la médiatrice de [BC]** :

Dans ce cas, les 2 nains volés (étoiles grises) forment bien avec A, B, C, D un motif symétrique.
De plus leur distance est égale à 3.



Exercice 2. L’ESCARGOT DE BOURGOGNE.
On écrit la suite des nombres entiers "en spirale" comme ceci :

1	2	9	10	25	26
4	3	8	11	24	
5	6	7	12	23	
16	15	14	13	22	
17	18	19	20	21	

Quel est le nombre écrit à l'intersection de la $100^{\text{ième}}$ ligne et de la $100^{\text{ième}}$ colonne ?

Solution

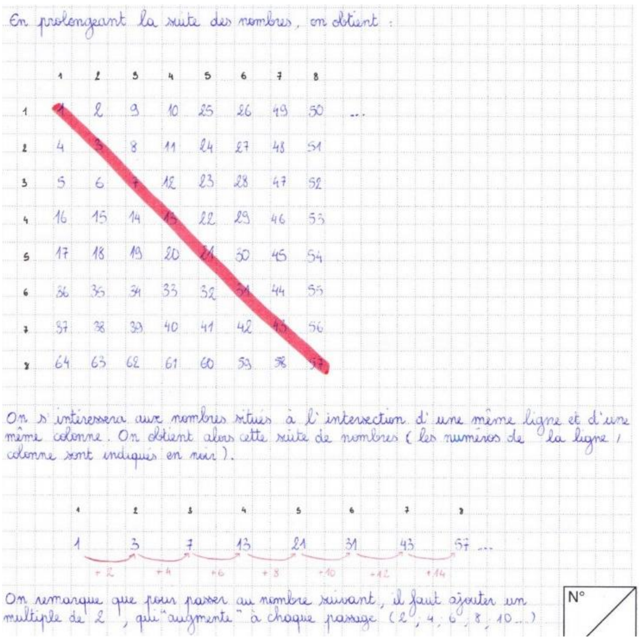
1	2	**9**	10	**25**	26
4	3	8	11	24	
5	6	7	12	23	
16	15	14	13	22	
17	18	19	20	21	

Lors de l'écriture des nombres, toutes les fois qu'on arrive à la ligne du haut, on a rempli un carré complet (de côté impair). Ainsi, quand on écrit 25, on a rempli un carré de côté 5.
Donc le nombre $(2n+1)^2$ est écrit en ligne 1, et en colonne $2n+1$.
En ligne 1 et colonne 99 on écrira donc $99^2 = 9801$.
Juste à droite, on écrira 9802, puis 99 cases plus bas, c'est-à-dire en ligne100, colonne 100, on écrira

9802 + 99 = **9901**.

				colonne 99	colonne 100
ligne 1				**9801**	**9802**
ligne 99					
ligne 100					**9901**

Citons cette très belle rédaction de l'équipe « Bouvot-Ginhoux, Cleon, Collot, Le » du lycée Prieur d'Auxonne :



En prolongeant la suite des nombres, on obtient :

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	2	9	10	25	26	49	50	...
2	4	3	8	11	24	27	48	51	
3	5	6	7	12	23	28	47	52	
4	16	15	14	13	22	29	46	53	
5	17	18	19	20	21	30	45	54	
6	36	35	34	33	32	31	44	55	
7	37	38	39	40	41	42	43	56	
8	64	63	62	61	60	59	58	57	

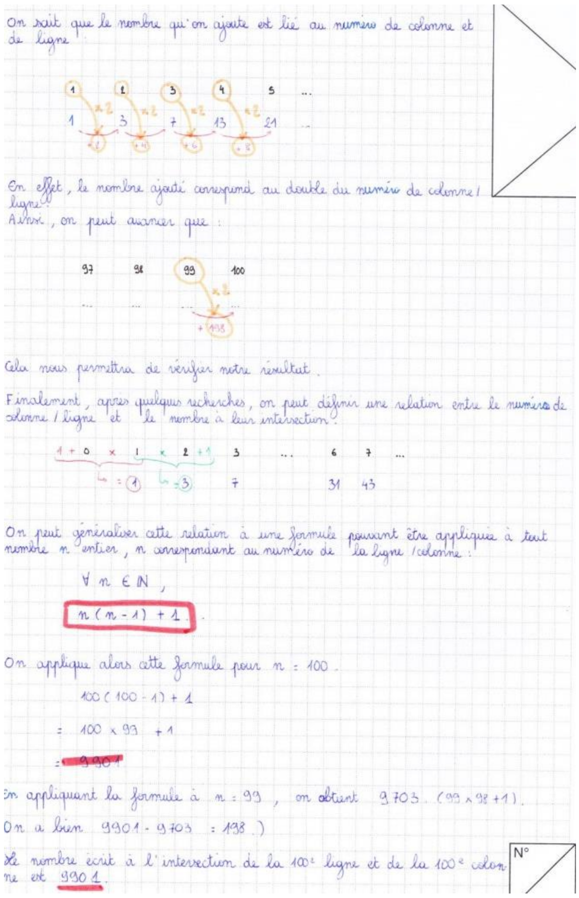
On s'intéressera aux nombres situés à l'intersection d'une même ligne et d'une même colonne. On obtient alors cette suite de nombres (les numéros de la ligne / colonne sont indiqués en noir).

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	7	13	21	31	43	57	...

+2 +4 +6 +8 +10 +12 +14

On remarque que pour passer au nombre suivant, il faut ajouter un multiple de 2, qui "augmente" à chaque passage (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ...)

N°



On sait que le nombre qu'on ajoute est lié au numéro de colonne et de ligne.

1 2 3 4 5 ...

×2 ×2 ×2 ×2

1 3 7 13 21 ...

+2 +4 +6 +8

En effet, le nombre ajouté correspond au double du numéro de colonne / ligne.
Ainsi, on peut avancer que :

97 98 99 100

×2

... ...

+198

Cela nous permettra de vérifier notre résultat.

Finalement, après quelques recherches, on peut définir une relation entre le numéro de colonne / ligne et le nombre à leur intersection :

1 + 0 × 1 × 2 + 1 3 ... 6 7 ...

= 1 = 3 7 31 43

On peut généraliser cette relation à une formule pouvant être appliquée à tout nombre n entier, n correspondant au numéro de la ligne / colonne :

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{n(n-1)+1}$.

On applique alors cette formule pour $n = 100$.

$100(100-1)+1$

$= 100 \times 99 + 1$

$= 9901$

En appliquant la formule à $n = 99$, on obtient 9703. ($99 \times 98 + 1$).

On a bien $9901 - 9703 = 198$.)

Le nombre écrit à l'intersection de la 100e ligne et de la 100e colonne est 9901.

N°

Exercice 3. DES SOUS EN POCHE.
Avec ce que j'ai en poche, je peux m'acheter
10 caramels et 11 sucettes
ou 7 caramels et 16 sucettes.
Ai-je de quoi m'acheter 8 caramels et 14 sucettes ?

Solution
Soit *c* le coût d'un caramel et *s* celui d'une sucette.
La somme *X* que j'ai en poche vérifie par hypothèse :
$X \geq 10\,c + 11\,s$ et $X \geq 7\,c + 16\,s$
Multiplions la première inéquation par 3 et la seconde par 5. On obtient

$$3X \geq 30\,c + 33\,s \quad \text{et} \quad 5X \geq 35\,c + 80\,s$$

Par addition membre à membre on a

$$8\,X \geq 65\,c + 113\,s$$

En divisant par 8 il vient

$$X \geq 8{,}125\,c + 14{,}125\,s$$

Ce qui me laisse largement **de quoi me payer 8 caramels et 14 sucettes.**

Exercice 4. T-ACCIDENT.
Dans une ville, il y a moins de 100 taxis, numérotés de 1 à *n*.
À la suite d'un accident entre deux taxis portant des numéros consécutifs, la moyenne des numéros restants a diminué de 0,24.
Quels sont les numéros des taxis accidentés ?

Solution
La moyenne des numéros avant l'accident est $m_1 = \frac{n\,(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.
Soient *a* et *a*+1 les numéros des taxis accidentés.
La moyenne des numéros après l'accident est

$$m_2 = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - (2*a+1)}{n-2} = \frac{n(n+1)-4a-2}{2(n-2)} = m1 - 0{,}24 = \frac{n+1}{2} - 0{,}24.$$

On a donc $\frac{n(n+1)-4a-2}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2} - 0{,}24$ d'où après simplifications

$$1{,}24\,n = 2a + 0{,}48 \quad \text{ou en multipliant par 25} \quad 31\,n = 50\,a + 12$$

Ainsi, *n* est pair et inférieur à 100 par hypothèse.

$$50\,a + 12 = 31n \leq 3100 \quad \text{donc } a \leq 61$$

Une recherche exhaustive montre que $50\,a + 12$ n'est multiple de 31 que pour
a = 1 Mais alors *n* = 2 ; il n'y aurait que 2 taxis, c'est impossible.
ou *a* = 32 (et *n* = 52)
Il y a donc 52 taxis, et les numéros des taxis accidentés sont 32 et 33.
On vérifie que la moyenne des numéros qui était de 26,5 avant l'accident est passée à 26,26 après l'accident. Elle a bien diminué de 0,24.

Citons cette belle rédaction de l'équipe « Bueno-Miranda, Drouet, Martin » du lycée Chevalier d'Eon de Tonnerre. Cette équipe a résolu une équation diophantienne comme proposé dans le cadre du programme de spécialité mathématiques en TS :

Grâce à l'énoncé, on trouve : $4 < n < 100$
car si il y a moins de 4 taxis, il n'y aurait pas d'accident ($n = 1$) ou on ne pourrait pas faire de moyenne après l'accident ($n = 2$ ou 3)

On pose : n = le nombre de taxi
x = le nombre du taxi accidenté le plus petit
m_0 = la moyenne avant l'accident
m_1 = —— après ——

$$m_0 = \frac{n^2+n}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$m_1 = \frac{\left(\frac{n^2+n}{2} - (2x+1)\right)}{n-2} = \frac{n(n+1)-4x-2}{2} \times \frac{1}{n-2}$$
$$= \frac{n(n+1)-4x-2}{2(n-2)}$$

D'après l'énoncé : $m_1 = m_0 - 0{,}24$

$$m_1 = \frac{n(n+1)-4x-2}{2(n-2)}$$

$$\frac{n(n+1)-4x-2}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2} - 0{,}24$$
$$= \frac{n+0{,}52}{2}$$

$$\frac{n(n+1)-4x-2}{2(n-2)} = \frac{n+0{,}52}{2}$$

$$\frac{n(n+1)-4x-2}{n-2} = n+0{,}52$$

$n^2+n-4x-2 = n^2-1{,}48n-1{,}04$

$2{,}48n - 4x = 0{,}96$ $\quad \times 100$

$248n - 400x = 96$ $\quad \div 8$

$31n - 50x = 12$

Avec la calculatrice, on trouve un couple-solution $(n_0 ; x_0) = (2 ; 1)$.

$31n_0 - 50x_0 = 12$
$31n - 50x = 12$
$31n - 50x = 31n_0 - 50x_0$
$31n - 31n_0 = -50x_0 + 50x$
$31(n - n_0) = 50(x - x_0)$
$31(n-2) = 50(x-1)$
$PGCD(31 ; 50) = 1 \rightarrow 31$ et 50 sont premiers entre eux.
31 divise $50(x-1)$
$\rightarrow$ D'après Gauss : 31 divise $x-1$.
$x - 1 = 31k$ où $k \in \mathbb{Z}$
$x = 31k + 1$
de même, 50 divise $n-2$ $\rightarrow n = 50k+2$.
donc $n = 2$ ($k = 0$) ou $n = 52$ ($k = 1$)
or n est supérieur à 4 donc $n = 52$ et $k = 1$.
donc $x = 31 \times 1 + 1 = 32$
x étant le plus petit des deux taxis accidentés, $x + 1 = 33$.

Exercice 5. PLACEMENT HASARDEUX.

Placer dans chaque case d'un carré 8×8 un des entiers 0, 1 ou 2 de sorte que les 16 sommes obtenues en lignes et en colonnes soient toutes différentes.

Solution

Examinons le problème pour un carré 2×2 puis pour un carré 4×4. La solution se généralise aisément à un carré ayant un nombre pair de cases.

0	**1**	1
2	**2**	4
2	3	

0	**0**	**0**	**1**	1
0	**0**	**1**	**2**	3
0	**2**	**2**	**2**	6
2	**2**	**2**	**2**	8
2	4	5	7	

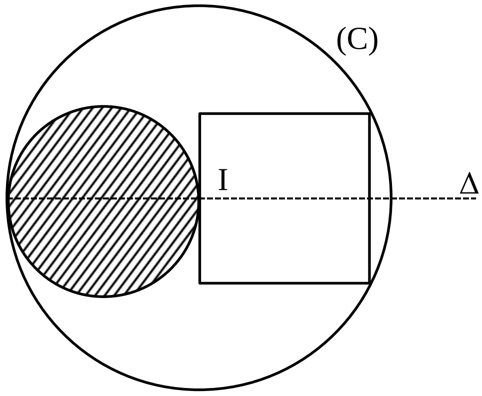
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	1
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	3
0	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	5
0	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**	8
0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	10
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	12
2	4	6	7	9	11	

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**3**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**5**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**2**	**7**
0	**0**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**10**
0	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**12**
0	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**14**
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**16**
2	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**13**	**15**	

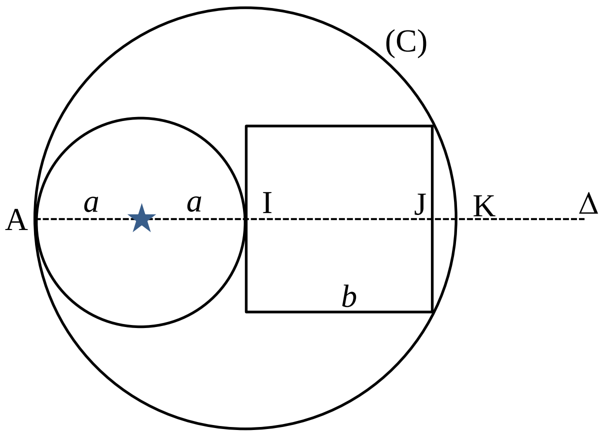
Exercice 6. LE POINT CENTRAL.

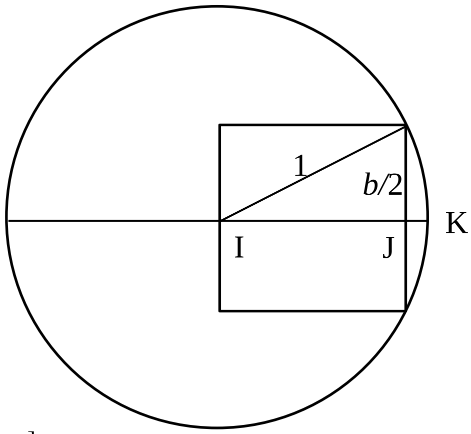
Un logo est représenté par un disque hachuré et un carré de même aire, tangents au point I et ayant un axe de symétrie Δ. Le tout est inscrit dans un cercle (C)

Le centre du cercle (C) est-il dans le disque hachuré ou dans le carré ?



Solution 1. (Compliquée)





Soient *a* le rayon du disque hachuré et *b* le côté du carré. [Figure ci-dessus]

Soit O le centre du grand disque.

On peut toujours supposer que le rayon du grand disque est égal à 1.

On a par hypothèse $\pi a^2 = b^2$ donc $b = a\sqrt{\pi}$.

De plus, $IJ = \sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$ donc $JK = 1 - \sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$

Puisque AK = 2 on a AI + IJ + JK = 2 donc

$$2a + b + 1 - \sqrt{1-\frac{b^2}{4}} = 2 \quad \text{ou} \quad 2a + b - 1 = \sqrt{1-\frac{b^2}{4}}$$

En élevant au carré et en simplifiant, il reste

$$4a^2 + \frac{5}{4}b^2 + 4ab - 4a - 2b = 0 \qquad (1)$$

En utilisant $b = a\sqrt{\pi}$ (1) devient

$$4a^2 + \frac{5}{4}\pi a^2 + 4a^2\sqrt{\pi} - 4a - 2a\sqrt{\pi} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$a^2\left[4 + \frac{5}{4}\pi + 4\sqrt{\pi}\right] = 2a\,(\sqrt{\pi} + 2)$$

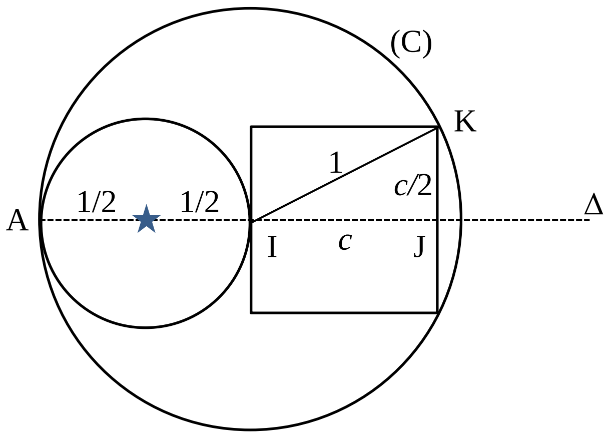
On tire

$$a = \frac{2\,(\sqrt{\pi}+2)}{4 + \frac{5}{4}\pi + 4\sqrt{\pi}} \approx 0{,}5024$$

Donc 2*a* est légèrement supérieur à 1, le rayon du grand disque.

Cela prouve que **O est à l'intérieur du petit disque.**

Solution 2. (Simple)



Regardons ce qui se passe lorsque I est le centre du cercle (C)
Soient *a* le rayon du disque hachuré et *c* le côté du carré. [Figure ci-dessus]
L'aire du disque hachuré est $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$
L'aire du carré est c^2 avec dans le triangle (IJK) $c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 1$ d'où $c^2 = \frac{4}{5} = 0{,}8$
L'aire du disque est inférieure à l'aire du carré lorsque I est au centre.
Pour avoir l'égalité des aires, il faut légèrement "grossir le disque hachuré" ce qui amène
le centre I à l'intérieur du disque hachuré.

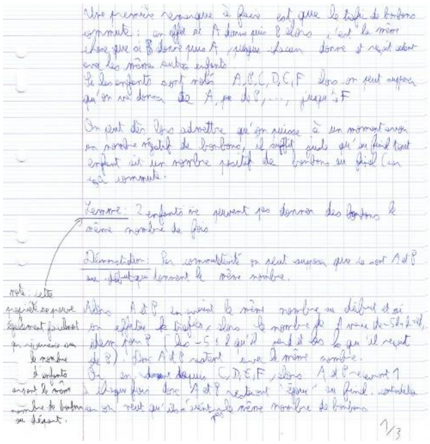
Exercice 7. LES BILLES.
6 enfants ont chacun un effectif de 20 billes. Ils jouent au jeu suivant :
À chaque tour, un des enfants donne une bille aux 5 autres enfants.
Combien faut-il de tours **au minimum** pour qu'à la fin, les 6 effectifs soient tous différents ?

Solution
Si les enfants A1, A2, …, A$_6$ ont donné des billes respectivement $a_1, a_2, \dots, a_6$ fois aux autres, alors
en notant $S = a_1 + a_2 + \dots + a_6$ le nombre de tours, l'enfant A$_i$ a donné en tout $5\,a_i$ billes et en a reçu $S - a_i$.
Il lui en reste $20 - 5\,a_i + S - a_i = 20 + S - 6\,a_i$
Puisque les restes doivent être tous différents, il faut que les a_i soient tous différents, et on ne peut pas faire mieux pour minimiser leur somme que de prendre pour les a_i les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5 [Dans n'importe quel ordre].

Une solution en **15 tours** est la suivante :

		effectif de billes par joueur					
		A1	A2	A3	A4	A5	A6
tour (s)	donneur	20	20	20	20	20	20
1	A1	15	21	21	21	21	21
2, 3	A2	17	11	23	23	23	23
4, 5, 6	A3	20	14	8	26	26	26
7, 8, 9, 10	A4	24	18	12	6	30	30
11, 12, 13, 14, 15	A5	**29**	**23**	**17**	**11**	**5**	**35**

Citons cette rédaction complétée par une généralisation à n enfants, de l'équipe « Baulard, Gachon, Hurez, Parize » du lycée Carnot de Dijon :



Une première remarque à faire est que le trafic de bonbons commute : en effet si A donne puis B donne, c'est la même chose que si B donne puis A, puisque chacun donne et reçoit autant avec les mêmes autres enfants.
Si les enfants sont notés A, B, C, D, E, F alors on peut supposer qu'on ne donne de A, puis de B, …, jusqu'à F

On peut d'ailleurs admettre qu'on puisse à un moment avoir un nombre négatif de bonbons, il suffit juste qu'au final tout enfant ait un nombre positif de bonbons au final (car ça commute.

Lemme : 2 enfants ne peuvent pas donner des bonbons le même nombre de fois

Démonstration : Par commutativité on peut supposer que ce sont A et B qui donnent le même nombre.

note : cette propriété se prouve également facilement par récurrence sur le nombre d'enfants ayant le même nombre de bonbons au départ.

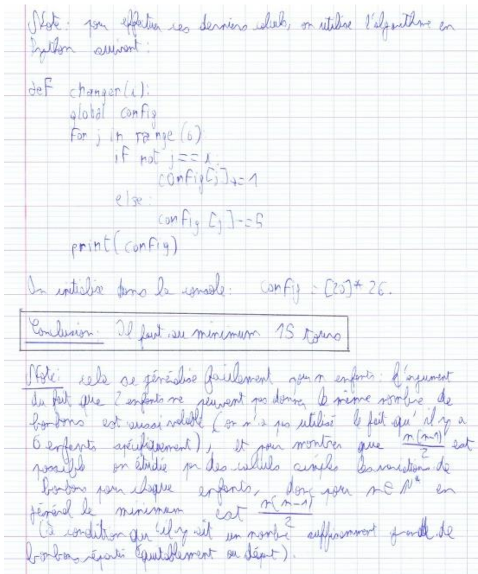
Alors A et B ont le même nombre au début et si on effectue le trafic, alors le nombre de A varie de −5k + k …, idem pour B (le −5 c'est ce qu'il perd et les le ce qu'il reçoit de B). Donc A et B restent avec le même nombre.
Or en donnant depuis C, D, E, F, alors A et B reçoivent 1 à chaque fois donc A et B restent "égaux" au final. contradiction car on veut qu'ils n'aient pas le même nombre de bonbons

1/3

Conséquence : on répète au total au moins :
$\underset{A}{0} + \underset{B}{1} + \underset{C}{2} + \underset{D}{3} + \underset{E}{4} + \underset{F}{5} = 15$

Réciproquement, si A donne 0 fois,
B donne 1 fois,
C donne 2 fois,
D donne 3 fois,
E donne 4 fois,
F donne 5 fois
alors on vérifie par un calcul simple qu'au final ils ont un nombre différent de bonbons.

	A	B	C	D	E	F	
0	20	20	20	20	20	20	B donne
1	21	15	21	21	21	21	C donne
2	22	16	16	22	22	22	C
3	23	17	11	23	23	23	D
4	24	18	12	18	24	24	D
5	25	19	13	13	25	25	D
6	26	20	14	8	26	26	E
7	27	21	15	9	21	27	E
8	28	22	16	10	16	28	E
9	29	23	17	11	11	29	E
10	30	24	18	12	6	30	F
11	31	25	19	13	7	25	F
12	32	26	20	14	8	20	F
13	33	27	21	15	9	15	F
14	34	28	22	16	10	10	F
15	35	29	23	17	11	5	



Note : pour effectuer ces derniers calculs, on utilise l'algorithme en Python suivant :

```
def changer(i):
    global config
    for j in range(6):
        if not j==i:
            config[j]+=1
        else:
            config[j]-=5
    print(config)
```

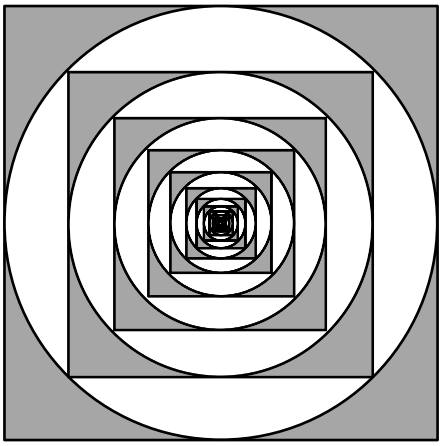
On initialise dans la console : config = [20]*26.

Conclusion : Il faut au minimum 15 tours

Note : cela se généralise facilement pour n enfants : l'argument du fait que 2 enfants ne peuvent pas donner le même nombre de bonbons est aussi valable (on n'a pas utilisé le fait qu'il y a 6 enfants spécifiquement), et pour montrer que $\frac{n(n-1)}{2}$ est possible on étudie par des calculs simples les variations de bonbons pour chaque enfant, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ en général le minimum est $\frac{n(n-1)}{2}$
(à condition qu'il y ait un nombre suffisamment grand de bonbons répartis équitablement au départ).

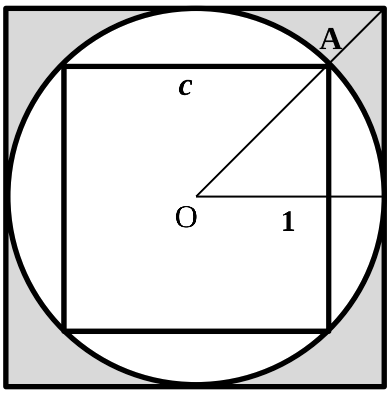
Exercice 8. PROPORTION.

Dans la figure ci-contre, quelle est la proportion de l'aire grisée dans le carré initial ?



Solution

Soit 2 le côté du grand carré dans la figure ci-contre.
Le rayon du disque est égal à 1, donc l'aire en gris est égale à $4 - \pi$.
Soit c le côté du carré inscrit dans le disque.
On a $c = OA\sqrt{2} = \sqrt{2}$.]
L'aire de la "couronne" entre les deux carrés est $4 - c^2 = 2$.
Donc, la proportion d'aire grise dans la couronne est $\frac{4-\pi}{2}$.
Cette proportion est la même dans toutes les parties réduites de la figure.
La proportion de l'aire grisée est $\frac{4-\pi}{2} \approx 0{,}429$
soit environ **42,9 %.**



Citons cette belle rédaction de l'équipe « Benoit, Goubez » du lycée Jean-Marc Boivin de Chevigny-Saint-Sauveur :

On note c_n le côté du n-ième carré (du plus grand au plus petit).

Le cercle inscrit dans ce carré a donc un diamètre de longueur c_n.

Le carré inscrit dans ce cercle a donc des diagonales de longueur c_n.

On applique le théorème de Pythagore pour trouver son côté c_{n+1} :

$$c_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_n}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2c_n^2}{4}} = \frac{c_n}{\sqrt{2}}$$

(car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu).

On considère que l'aire du plus grand carré est de 1 (afin de trouver un proportion) donc $c_0 = 1$

c_n est une suite géométrique que l'on peut donc définir par :

$$c_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

On note A_n la partie grise délimitée par le n-ième carré, on a :

$$A_n = c_n^2 - \pi\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 = c_n^2 - \frac{\pi}{4}c_n^2 = c_n^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

donc $A_n = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

On note $S_n = \sum_{i=0}^{n} A_i = \left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$$S_n = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

La figure est fractale donc on cherche la limite de S_n en $+\infty$:

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

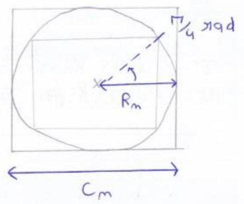
donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2 - \frac{\pi}{2}(1 - 0) = 2 - \frac{\pi}{2}$

La proportion de l'aire grisée dans la figure est donc de $2 - \frac{\pi}{2}$, soit environ 0,4292 (soit 42,92 %).

Citons aussi cette belle rédaction de l'équipe « Miret-Fernandes Kilian et Kévan » du lycée Alain Colas de Nevers :

EXERCICE 5 Soient A_m, C_m, R_m et B_m les variables suivantes :

- A_m est l'aire du carré
- C_m est la longueur du côté du carré
- R_m est le rayon du cercle inscrit dans le carré
- B_m est l'aire du cercle inscrit.



$R_m = \frac{C_m}{2}$

$A_m = C_m^2$ et $B_m = \Pi R_m^2$

On cherche le côté du carré inscrit dans le cercle, on le note C_{m+1}.

$C_{m+1} = C_m \times \cos\frac{\pi}{4} = C_m \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \sqrt{A_{m+1}} = \sqrt{A_m} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ on considère le carré le plus large de côté 2.

$\iff A_{m+1} = A_m \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\iff A_{m+1} = A_m \times 1/2$ avec $A_0 = 2^2 = 4$

On cherche le rayon du cercle inscrit dans ce carré :

On a : $R_m = \frac{C_m}{2}$

donc : $C_{m+1} = C_m \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff 2R_{m+1} = 2\left(R_m \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\iff R_{n+1} = R_m \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff (R_{n+1})^2 = \left(R_m \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ on considère le plus large cercle de côté 1.

$\iff \Pi (R_{n+1})^2 = \Pi R_m^2 \times 1/2$

$\iff B_{n+1} = B_m \times 1/2$. avec $B_0 = \Pi \times 1^2 = \Pi$.

On a donc les suites (A_m) et (B_m) telles que :

$A_m = 4 \times 1/2^m$

$B_m = \Pi \times 1/2^m$

Soit (D_n) la suite représentant l'aire en gris à chaque étape.

On a : $D_m = A_m - B_m$.

$\iff D_m = 4 \times 1/2^m - \Pi \times 1/2^m$

$\iff D_m = 1/2^m (4 - \Pi)$ avec $D_0 = 4 - \Pi$.

On étudie la limite de la somme de (D_m) lorsque m tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{m \to +\infty} \sum_0^m D_m = \lim\limits_{m \to +\infty} \sum_0^m (1/2)^m (4 - \Pi)$

$= \lim\limits_{m \to +\infty} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

TB $= \lim\limits_{m \to +\infty} (4 - \Pi) \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1/2}$

On a : $\lim\limits_{m \to +\infty} (1/2)^{m+1} = 0$ car $-1 < 1/2 < 1$

Ainsi : $\lim\limits_{m \to +\infty} (4 - \Pi) \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1/2} = \frac{4 - \Pi}{1/2}$

$= (4 - \Pi) \times 2$

$= 8 - 2\Pi \simeq 1{,}72$

Donc, on a : $\frac{\text{Aire en gris}}{\text{Total}} = \frac{8 - 2\Pi}{4} = \frac{8}{4} - \frac{2}{4}\Pi = 2 - \frac{\Pi}{2} \simeq 0{,}429$

Il y a environ 42,9 % de gris.

Exercice 9. LES CAMÉLÉONS.

Il y a sur une île, 7 caméléons jaunes, 10 caméléons rouges et 5 caméléons verts.
Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous deux la troisième couleur.
Lorsque deux caméléons de même couleur se rencontrent, il ne se passe rien.
Au bout d'un certain temps, les caméléons sont tous de la même couleur. Laquelle ?

Solution

Notons :

a le nombre de rencontres "Jaune-Rouge"
b le nombre de rencontres "Jaune-Vert"
c le nombre de rencontres "Rouge-Vert"

À la fin des rencontres, le nombre de caméléons jaunes est passé de 7 à $7 - a - b + 2c$
Le nombre de caméléons rouges est passé de 10 à $10 - a + 2b - c$
Le nombre de caméléons verts est passé de 5 à $5 + 2a - b - c$

- Si les caméléons sont tous rouges à la fin, alors

$$7 - a - b + 2c = 0 \quad 10 - a + 2b - c = 22 \quad \text{et} \quad 5 + 2a - b - c = 0$$

Mais alors on tire des deux premières équations
$a + b = 2c + 7$ et $a - 2b = -c + 10$ d'où par soustraction $3b = 19 + 3c$ impossible.

- Si les caméléons sont tous jaunes à la fin, alors

$$7 - a - b + 2c = 22 \quad 10 - a + 2b - c = 0 \quad \text{et} \quad 5 + 2a - b - c = 0$$

Mais alors on tire des deux premières équations
$a + b = 2c - 15$ et $a - 2b = -c + 10$ d'où par soustraction $3b = 3c - 25$ impossible.

- Si les caméléons sont tous verts à la fin, alors

$$7 - a - b + 2c = 0 \quad 10 - a + 2b - c = 0 \quad \text{et} \quad 5 + 2a - b - c = 22$$

On tire des deux premières équations

$$a + b = 2c + 7 \text{ et } a - 2b = -c + 10 \text{ d'où par soustraction } 3b = 3c - 3 \text{ ou } b = c - 1$$

Alors, $a = 2c + 7 - b = 2c + 7 - c + 1 = c + 8$.

Si on prend par exemple $c = 1$ on a la solution $a = 9$; $b = 0$; $c = 1$ qui convient :

	Jaunes	Rouges	Verts
Au départ	7	10	5
Après 7 rencontres Jaune-Rouge	0	3	19
Après 1 rencontre Rouge-vert	2	2	18
Après 2 rencontres Jaune-rouge	**0**	**0**	**22**

Les caméléons sont tous verts à la fin.

Citons, pour la seconde fois, cette belle rédaction de l'équipe « Benoit, Goubez » du lycée Jean-Marc Boivin de Chevigny-Saint-Sauveur :

À chaque rencontre les effectifs de deux couleurs diminuent de 1 et ceux de la troisième augmentent de 2

rouge	jaune	vert
x	y	z
$x-1$	$y-1$	$z+2$

or $2 \equiv -1$ [3] donc modulo 3 l'opération donne

rouge	jaune	vert	
x	y	z	
$x-1$	$y-1$	$z-1$	[3]

Donc les effectifs de deux couleurs sont congrus modulo 3 si et seulement si ils étaient congrus au départ.

La différence d'effectifs est un invariant modulo 3

Or pour qu'il ne reste plus qu'une couleur, il faut que les effectifs des deux autres soient à 0 donc égaux donc congrus modulo 3.

Mais $7 \not\equiv 5$ [3] Donc les effectifs jaunes et verts seront toujours différents modulo 3. Ils ne peuvent pas valoir 0 tous les deux.

Même chose pour 10 et 5.

Par contre $7+3=10$ donc $7 \equiv 10$ [3] donc les effectifs jaunes et rouges peuvent être égaux et valoir 0.

Ce sont alors les verts qui ont un effectif maximal.

On peut d'ailleurs y arriver ainsi :

	jaunes	rouges	verts
	7	10	5
(une rencontre vert-rouge)	+2	−1	−1
	9	9	4
(neuf rencontres jaune-rouge)	−9	−9	+18
	0	0	22

Tous les caméléons finissent donc par être verts.

7. PROGRAMMATION (💻)

Dans cette rubrique du corrigé, nous ferons la part belle aux programmes proposés par certaines équipes. Dans cette édition 2020, trois exercices ont été traités sous Python : « L'escargot de Bourgogne », « Taccident » et « Les caméléons ».

<u>L'escargot de Bourgogne</u> :

Stephen Liégeard (Robiot, Rodier, Potot)

```
def escargot(x):
    b=0
    a=1
    for k in range(1,x+1):
        b=b+2
        a=a+b
    return(a)
```

Ozanam (Gendre, Marmond, Pelletier)

```
i=1
s=0
r=2
obj=100
while i!=0:
    i=i+1
    s=s+r
    r=r+2
    if i==obj:
        break
print(s+1)
```

<u>Taccident</u> :

Léon Blum (Badon, Girault, Mikolajski, Seddiki)

```
def ech():
    m=3
    for n in range(3,100):
        m=m+n
        mi=m/n
        for x in range(1,n+1):
            A=m-x-(x+1)
            mf=A/(n-2)
            if mf==mi-0.24:
                return(x,n)
```

Anna Judic (Chaine, Chauvelot, Cornelis, Lemaître)

```
for i in range(3,100):
    s=i/2+i*i/2
    m=s/i
    for x in range(1,i):
        S=s-(x+x+1)
        M=S/(i-2)
        if M==m-0.24:
            print(i,x)
```

Carnot (Astesiano, Leguy, Pitois, Rousseau)

```
n=3
a=1
m1=(n+1)/2
m2=(n*(n+1)*0.5-(2*a+1))*(1/(n-2))
while m1-0.24!=m2:
    n+=1
    m1=(n+1)/2
    m2=(n*(n+1)*0.5-(2*a+1))*(1/(n-2))
    if n>=100:
        n=3
        a+=1
print(n,a,a+1)
```

Charles de Gaulle (Baril, Carle, Genot, Morel)

```
# Assignation des variables utilisées dans le programme

taxi=0
numero=1
numerosuivant=2


for i in range (3,100): #Boucle testant le programme pour un nombre de taxi allant de
3 à 1

    for j in range (i):
        taxi=taxi+j+1   #La somme des numéros de taxi
    moyenne=taxi/i       #Moyenne pour le nombre de taxi testé

    while numero<i:          #Condition qui permet de tester tout les taxis qui se
suivent
        apres=taxi-numero-numerosuivant   #J'enlève les deux taxis accidentés de ma
somme
        accident=apres/(i-2)            #Calcul de la nouvelle moyenne

        if moyenne-0.24==accident:      #Je teste la différence de la nouvelle moyenne
            print ("Il y a {} taxis. Les numéros des taxis sont {} et {}".format(i,
numero,numerosuivant))

#J'augment les numéros qui ont eu un accident afin de tester toutes les possibilités
        numero+=1
        numerosuivant+=1

#Je réinétialise les valeurs
    numero=1
    numerosuivant=2
    taxi=0
```

Les caméléons :

Stephen Liégeard (Bizot, Clinard, Cossart, Garetta)

Programme python;

```
import random
nb = [7,10,5] <-[jaune, rouge, vert]
while((nb[0]+nb[1]) != 0) and ((nb[1]+nb[2])!= 0) and ((nb[0]+nb[2]) != 0):
    couleur = []
    for i in range (len(nb)):
        if nb[i] > 0 :
            couleurs.append(i)
    couleur_1 = random.choice (couleurs)
    couleur_2 = random.choice (couleurs)
    if couleur_1 != couleur_2 :
        couleur_presentes = str( couleur_1) + str (couleur_2)
        if "0" not in couleur_presentes:
            nb[0] + = 2
            nb[1] - = 1
            nb[2] - = 1
        elif "1" not in couleur_presentes :
            nb[1] + = 2
            nb[0] - = 1
            nb[2] - = 1
        else :
            nb[2] + = 2
            nb[1] - = 1
            nb[0] - = 1
print(nb)
```

Le programme choisi aléatoirement deux caméléons et applique la règle dans l'énoncé à chaque tour de boucle.

A la fin, le programme s'arrête lorsqu'il n'y a plus que des caméléons d'une seule couleur.

On voit à la fin du programme qu'il reste seulement des caméléons verts.

4/4

Même si ce programme ne suffit pas pour résoudre l'exercice, il méritait d'être cité…

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://irem.u-bourgogne.fr/